

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

CLAUDE PIQUET

Sur les représentations unitaires d'un groupe

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 14 (1974-1975), exp. n° 1, p. 1-2

http://www.numdam.org/item?id=SC_1974-1975__14__A1_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES REPRÉSENTATIONS UNITAIRES D'UN GROUPE

par Claude PIQUET

N. B. - Cet exposé ne sera pas rédigé ; il est extrait d'un article (de même titre) à paraître dans "Archiv der Mathematik".

NOTATIONS. - G est un groupe (topologique), $\mathcal{X}$ un G -module unitaire. A tout vecteur x de $\mathcal{X}$, on associe la fonction (continue) $b(x)$ de type positif sur G , définie par

$$b(x)(g) = \langle g.x, x \rangle \quad (g \in G).$$

On note $\mathbb{W} = C(\mathcal{X})$ le cône (non convexe, en général) des fonctions de type positif associées à $\mathcal{X}$, $\mathcal{E}^+$ l'enveloppe convexe de $\mathbb{W}$, et $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ - \mathcal{E}^+$ le sous-espace vectoriel réel de $C(G)$ engendré par $\mathbb{W}$. Le cône $\mathcal{E}^+$ détermine une relation d'ordre notée $>>$.

Le groupe G agit sur $\mathcal{E}$ par automorphismes intérieurs : Si $\omega \in \mathcal{E}$,

$$g.\omega(s) = \omega(g^{-1}sg) \quad (s, g \in G).$$

On remarque que $b(g.x) = g.b(x)$, ($g \in G$, $x \in \mathcal{X}$).

1. Géométrie de $\mathbb{W}$.

Elle est décrite par le théorème suivant :

THÉORÈME. - Soit $x \in \mathcal{X}$ et $F(x)$ la face de $\mathcal{E}^+$ engendrée par $b(x)$. Alors $F(x) \subset \mathbb{W}$ et $b^{-1}(F(x)) = \text{Fix}(G, \mathcal{L}(\mathcal{X}))_x$.

COROLLAIRE. - Si $\mathbb{W}$ ne se réduit pas à une demi-droite, $\mathcal{X}$ est simple si, et seulement si, $\mathbb{W} = \text{Ext}(\mathcal{E}^+)$.

2. Cas où $\mathcal{X}$ est un G -module simple.

On peut alors mettre sur $\mathcal{E}$ une structure préhilbertienne particulièrement intéressante.

THÉORÈME. - Il existe un produit scalaire unique sur $\mathcal{E}$, noté $(.|.)$, tel que $\forall x, \forall y \in \mathcal{X}$, $(b(x)|b(y)) = |\langle x, y \rangle|^2$. Le complété $\hat{\mathcal{E}}$ de l'espace préhilbertien réel $(\mathcal{E}, (.|.))$ est un G -module orthogonal ; la fermeture $\mathcal{E}^+$ dans $\hat{\mathcal{E}}$ du cône $\mathcal{E}^+$ est un cône convexe fermé propre.

On peut préciser le lien de $\hat{\mathcal{E}}$ avec $\mathcal{X}$:

THÉORÈME. - $\hat{\mathcal{E}}$ est isométriquement isomorphe à l'espace hilbertien réel $HS_h(\mathcal{X})$

des opérateurs de Hilbert-Schmidt hermitiens de $\mathcal{H}$. Le cône $\overline{\mathcal{E}^+}$ correspond aux opérateurs positifs de $HS_h(\mathcal{H})$, et $\mathcal{W}$ aux projecteurs de rang 1 .

Il en résulte que $\mathcal{W} = \text{Ext}(\overline{\mathcal{E}^+})$ et est fermé ; par complétion, le cône $\overline{\mathcal{E}^+}$ n'obtient pas de nouvelles génératrices extrémales.

3. Génératrices invariantes de $\overline{\mathcal{E}^+}$.

On cherche à savoir si $\text{Fix}(G, \overline{\mathcal{E}^+}) \neq \{0\}$.

LEMME. - Soit $x \in \mathcal{H}$ tel que son orbite $K(x) = G.b(x)$ soit compacte. Alors, la projection orthogonale h_x de 0 sur $\overline{\text{conv } K(x)}$ est non nulle et invariante par G : $h_x \in \text{Fix}(G, \overline{\mathcal{E}^+})$.

Dans le cas où G est compact, on obtient le théorème suivant.

THÉOREME. - Si G est un groupe compact, tout G -module unitaire simple est de dimension finie.

(Texte reçu le 25 janvier 1975)

Claude PIQUET
11 allée de Trévis
92330 SCEAUX
