Séminaire Choquet.
Initiation à l'analyse

Jean-Pierre Ferrier

Ensembles fermés polynomialement convexes

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 13 (1973-1974), exp. n° 12, p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1973-1974__13__A8_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'analyse)
13e année, 1973/74, n° 12, 4 p.

31 janvier 1974

ENSEMBLES FERMÉS POLYNOMIALEMENT CONVEXES

par Jean-Pierre FERRIER

(d'après J. A. SIDDIQI et J.-P. FERRIER)

Résumé

1. Des notions de convexité polynomiale pour des ensembles fermés de $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{C}^n$ s'introduisent naturellement à propos de problèmes d'approximation polynomiale pondérée. Comme illustration, nous allons donner des indications sur la manière dont on peut résoudre le problème suivant :

Soit R une application de classe C^k , $k > \frac{n}{2} + 1$, de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$|R(z) - R(z')| \leqslant \lambda' |z - z'| ,$$

$$|R(z)| \leqslant \lambda |z| + C ,$$

où λ , λ' , C sont des constantes telles que $\lambda \leqslant \lambda' < 1$. On désigne par Σ l'ensemble des points $x + iR(x)$ où x parcourt $\mathbb{R}^n$.

Soit d'autre part Φ une application continue de $[0 , \infty[$ dans $]0 , \infty[$, telle que la fonction $x \longmapsto \log \Phi(e^x)$ soit convexe sur $\mathbb{R}$. On pose $w(z) = 1/\Phi(|z|)$, et on recherche les conditions assurant la densité des polynômes dans l'espace $C_w(\Sigma)$ des fonctions numériques complexes f continues sur Σ telles que $|f| w$ tende vers zéro à l'infini, pour la norme $f \longmapsto \sup_{x \in \Sigma} |f(x)|\ w(x)$.

Une condition suffisante pour cela est que l'on ait

$$(1) \qquad \int^\infty \log \Phi(r) \frac{dr}{r^{1+\rho}} = \infty \quad \text{avec} \quad \rho = \frac{\pi}{\pi - 2 \operatorname{Arctg} \lambda} \qquad [4].$$

On peut par exemple choisir $\Phi(r) = \exp(r^\rho)$, où ρ est le nombre précédemment défini.

Notons tout de suite quelques cas particuliers :

(a) Le cas où $\Sigma = \mathbb{R}^n$ est celui où $R = 0$; on peut alors prendre $\lambda = \lambda' = 0$, et la condition (1) s'écrit

$$\int^\infty \log \Phi(r) \frac{dr}{r^2} = \infty .$$

C'est une condition suffisante très classique pour l'approximation polynomiale pondérée sur $\mathbb{R}^n$. Cette même condition reste cependant vraie dès que l'on peut choisir $\lambda = 0$; cela correspond à une perturbation bornée convenable de $\mathbb{R}^n$.

(b) Lorsque $n = 1$, l'approximation polynomiale pondérée sur une courbe de $\mathbb{C}$ a été étudiée par l'auteur sous des hypothèses plus générales ; il est possible dans ce cas d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes qui montrent **que la valeur** de ρ donnée ne peut pas être améliorée.

Dans le cas de $\underset{\sim}{R}^n$, pour passer de $\underset{\sim}{R}$ à $\underset{\sim}{R}^n$, on utilise simplement un argument de produit tensoriel ; cette méthode ne peut évidemment s'étendre à des sous-variétés de $\underset{\sim}{C}^n$, même aussi particulières que celles envisagées ici. L'approximation pondérée a été étudiée dans le contexte abstrait d'espaces topologiques généraux X et d'algèbres $\mathfrak{a}$ de fonctions continues sur X par P. MALLIAVIN [7], et la situation que nous décrivons n'en est qu'un cas très particulier ; cependant là encore on ramène le problème général à l'approximation polynomiale dans $\underset{\sim}{C}$ en prenant les images de X par des fonctions f de $\mathfrak{a}$; cela suppose qu'il y a suffisamment de fonctions f pour lesquelles $f(X)$ est d'intérieur vide dans $\underset{\sim}{C}$, ce qui n'a en général aucune chance d'être le cas ici.

Le principe que nous suivrons est simple : au lieu de demander à $p(\Sigma)$ d'être un ensemble sur lequel on peut faire l'approximation polynomiale, nous lui demandons seulement d'être polynomialement convexe, et ceci pour suffisamment de polynômes p , de façon que la variété Σ soit elle-même polynomialement convexe. La situation sera bien sûr compliquée par le fait que les ensembles ne sont pas compacts et par la présence de poids, et la notion de convexité ne sera pas aussi simple que dans le cas compact.

$\underset{\sim}{2}$. Soit de façon générale F un ensemble fermé de $\underset{\sim}{C}^n$, et soit w un poids sur F , c'est-à-dire une fonction continue strictement positive telle que $\mathcal{C}_w(F)$ contiennent les polynômes. On peut montrer que si les polynômes sont denses dans $\mathcal{C}_w(F)$, il existe une famille $(p_i)_{i\in I}$ de polynômes telle que :

(i) $|p_i(z)| \dfrac{w(z)}{1+|z|} \leq 1$ pour $i \in I$, $z \in F$,

(ii) $\sup_{i\in I}|p_i(\zeta)| = +\infty$ pour $\zeta \notin F$.

Si ces conditions sont vérifiées avec $w(z)$ au lieu de $\dfrac{w(z)}{1+|z|}$ dans (i), nous dirons que F est <u>polynomialement convexe</u> par rapport au poids w . Lorsque F est compact, il est facile de voir que cette définition coïncide avec la convexité polynomiale ordinaire et ne dépend pas de w .

C'est d'une réciproque que nous avons besoin, et il nous faut renforcer la définition qui précède. Si pour $\varepsilon > 0$, on désigne par F^ε l'ensemble des points z de $\underset{\sim}{C}^n$ tels que $d(z , F) < \varepsilon$, nous supposons que w est un poids sur F^α , $\alpha > 0$, et nous dirons que F est <u>uniformément</u> P-<u>convexe</u> par rapport à w s'il existe $\theta \in]0 , 1[$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, on puisse trouver une famille $(p_i)_{i\in I}$ de polynômes avec

(i) $|p_i(z)|\, w(z) \leq 1$ pour $i \in I$, $z \in F^{\theta\varepsilon}$,

(ii) $\sup_{i\in I}|p_i(\zeta)| = +\infty$ pour $\zeta \notin F^\varepsilon$.

Il est facile de voir que si F est uniformément P-convexe par rapport à w , alors F est convexe par rapport à ce poids ; cela implique aussi que F est uniformément H-convexe [1]. Cette notion technique est justifiée par l'énoncé suivant, obtenu par N. Sibony et l'auteur [3] :

Soit Σ une sous-variété fermée totalement réelle de dimension d de $\underset{\sim}{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^r$, avec $r > \frac{d}{2} + 1$, et soit w un poids sur Σ ; s'il existe un poids w' sur Σ^α, avec $\alpha > 0$, vérifiant

1° $w'(z + \zeta) \geqslant cw(z)$ pour $z \in \Sigma$, $|\zeta| < \alpha$, et une constante $c > 0$.

2° Σ est uniformément P-convexe par rapport au poids $z \longmapsto (1 + |z|^2)\, w'(z)$,

alors les polynômes sont denses dans $\mathcal{C}_w(\Sigma)$.

La démonstration procède par plusieurs étapes : on commence par se ramener à approcher des fonctions de $\mathcal{D}(\underset{\sim}{C}^n)$; si u est une telle fonction, on la remplace par une autre U coïncidant avec u sur Σ, et telle que $\bar{\partial}U$ soit petit au voisinage de Σ, suivant R. NIREMBERG et R. O. WELLS [7] ; on approche alors U par des fonctions holomorphes au voisinage de Σ en résolvant la $\bar{\partial}$-cohomologie dans des ouverts entourant Σ, avec les estimations de L. HÖRMANDER [5] ; on approche enfin par des polynômes en utilisant une méthode de B. A. TAYLOR [8].

3. Dans le cas unidimensionnel, la convexité polynomiale par rapport à un poids w se ramène à un problème d'approximation polynomiale des fonctions $z \longmapsto (z - \zeta)^{-1}$, où ζ n'appartient pas au fermé étudié. Ce même problème se réduit à un problème de moments, puis à un problème d'unicité. Lorsque le poids w est donné par $w(z) = 1/\Phi(|z|)$, où Φ possède les propriétés indiquées en 1, en utilisant des majorations pour les potentiels du noyau $1/z$ données dans [2], on peut par exemple établir l'énoncé suivant :

Soit F un ensemble fermé non borné dont le bord soit une courbe possédant une tangente à variation bornée. Pour que F soit polynomialement convexe par rapport à w, il faut (resp. suffit) que l'on ait, pour toute composante connexe Ω du complémentaire de F, et $\lambda = 1$ (resp. pour une constante $\lambda < 1$),

$$\int \log \Phi(\lambda |u|)\, d\mu_a^\Omega(u) = +\infty ,$$

où a est un point arbitraire de Ω, et μ_a^Ω la mesure harmonique au point a du domaine Ω.

4. Voyons, pour finir, comment on peut démontrer l'énoncé donné en 1. D'abord les propriétés de la fonction Φ permettent de s'affranchir d'un certain nombre d'intermédiaires donnés en 2, et de ramener la question à l'uniforme P-convexité de Σ par rapport au poids w lui-même. On établit cette dernière en considérant des applications polynomiales convenables de $\underset{\sim}{C}^n$ dans $\underset{\sim}{C}$, et en prenant les images réciproques par ces applications d'ensembles fermés polynomialement convexes de $\underset{\sim}{C}$.

Soit $\zeta \notin \Sigma^\varepsilon$; on peut toujours se ramener au cas où $\operatorname{Re} \zeta = 0$ et $R(0) = 0$. Si on pose alors

$$f(z) = z_1^2 + \ldots + z_n^2 ,$$

il est possible de vérifier que, pour θ assez petit, $\overline{\complement f(\Sigma^{\theta\varepsilon})}$ contient un domaine connexe Ω contenant lui-même $f(\zeta)$, et un secteur limité par des arcs de parabole dont l'ouverture est $2\pi - 4 \operatorname{Arctg} \lambda$. On peut lui appliquer l'énoncé donné en 3 , et conclure en calculant μ_a^Ω .

BIBLIOGRAPHIE

[1] CIRKA (E. M.). - Approximation by holomorphic functions on smooth manifolds in C^n , Mathematics of the USSR-Sbornik, t. 7, 1969, p. 95-114 ; [en russe], Mat. Sbornik, t. 78, 1969, p. 101-123.

[2] FERRIER (J.-P.). - Majoration des potentiels du noyau $1/z$, Inventiones Math., Berlin, t. 21, 1973, p. 311-317.

[3] FERRIER (J.-P.) et SIBONY (N.). - Approximation pondérée sur une sous-variété totalement réelle de $\mathbb{C}^n$ (à paraître).

[4] FERRIER (J.-P.) et SIDDIQI (J. A.). - Convexité polynomiale et approximation pondérée sur certaines sous-variétés réelles de $\mathbb{C}^n$ (à paraître).

[5] HÖRMANDER (L.). - L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta Math., t. 113, 1965, p. 89-152.

[6] MALLIAVIN (P.). - L'approximation polynomiale pondérée sur un espace localement compact, Amer. J. Math., t. 81, 1959, p. 605-612.

[7] NIRENBERG (R.) et WELLS (R. O., Jr) - Approximation theorems on differentiable submanifolds of a complex manifold, Trans. Amer. math. Soc., t. 142, 1969, p. 15-35.

[8] TAYLOR (B. A.). - On weighted polynomial approximation of entire functions, Pacific J. Math., t. 36, 1971, p. 523-539.

(Texte reçu le 13 juin 1974)

Jean-Pierre FERRIER
8 rue du Chanoine Jacob
54000 NANCY