

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

GUSTAVE CHOQUET

Frontière-module et représentation intégrale

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 11-12 (1971-1973), exp. n° 8, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1971-1973__11-12__A9_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FRONTIÈRE-MODULE ET REPRÉSENTATION INTÉGRALE

par Gustave CHOQUET

Résumé

Dans des mémoires récents, HUSTAD, HERSBERG, PHELPS et FUHR ont étudié les frontières et représentations intégrales pour un couple (X, H) , où le sous-espace H de $C(X, K)$ sépare le compact X , et où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; ces diverses études supposent, pour l'essentiel, que H contient les constantes ou que X est métrisable.

J'abandonnerai cette restriction et, dans ce cadre élargi, je retrouverai, par des méthodes plus simples, plusieurs résultats antérieurs. En particulier, je caractériserai le cas où H admet une frontière de Šilov-module, et les cas où l'on peut parler d'unicité de la représentation des éléments de H' par des mesures (de type K) de même norme.

1. Frontière-module.

Méthode. - On plonge canoniquement X dans la boule unité B de H' munie de $\sigma(H', H)$. Le cadre devient donc le suivant : B est un convexe compact équilibré d'un ensemble e. l. c. s. V ; le compact X est un fermé de B qui engendre B , ce qui revient à dire que, pour tout $x \in \mathcal{E}(B)$, Tx (où $T = \{t \in K : |t| = 1\}$) rencontre X ; et $H = (\text{Restriction de } A_0(B) \text{ à } X)$, où $A_0(B)$ est l'espace (à norme uniforme) des formes linéaires sur V dont la restriction à B est continue.

On suppose que B engendre V , et, pour simplifier, que $V' = A_0(B)$. Une partie P de B est dite saturée si $tP = P$ pour tout $t \in T$. On appelle frontière-module du couple (X, H) l'ensemble

$$\mathcal{E}_m(X, H) = X \cap \mathcal{E}(B).$$

On appelle ensemble de Šilov-module du couple (X, H) tout fermé $\bar{\omega}$ de X sur lequel tout $f \in H$ atteint le maximum de son module. Par exemple, pour toute partie P de $\mathcal{E}_m(X, H)$ telle que $T.P = \mathcal{E}(B)$, $\bar{P}$ est un tel ensemble.

On a l'équivalence $(x \in \mathcal{E}_m(X, H)) \Leftrightarrow (\text{Toute mesure } \mu \text{ de norme } \leq 1 \text{ sur } X, \text{ telle que } \varepsilon_x \sim \mu \text{ est portée par } \mathfrak{X})$, où on note $\mathfrak{X} = X \cap (T.x)$.

PROPOSITION 1. - Pour tout $x \in \mathcal{E}_m(X, H)$ et tout voisinage ouvert ω de $\mathfrak{X}$ dans X , il existe $f \in H$ telle que, sur X , $|f|$ ne prenne son maximum que dans ω .

Notons $\mathcal{E}'_m(X, H)$ l'ensemble des $x \in \mathcal{E}_m(X, H)$ tels que $\mathfrak{X} = x$.

THÉOREME 2. - Les énoncés suivants sont équivalents :

(a) (X, H) admet une frontière de Šilov-module (i. e. un plus petit ensemble de Šilov-module).

(b) $\mathcal{E}'_m(X, H)$ rencontre tout $\mathcal{X}$ où $x \in \mathcal{E}_m(X, H)$.

Dans ces conditions, la frontière de Šilov est $\overline{\mathcal{E}'_m(X, H)}$, qui peut alors différer de $\mathcal{E}_m(X, H)$.

Remarque. - La frontière usuelle (de Choquet) $\mathcal{E}(X, H)$ est l'ensemble des points extrémaux de l'enveloppe convexe fermée de X ; on a donc $\mathcal{E}_m(X, H) \subset \mathcal{E}(X, H)$. Bien sûr $\overline{\mathcal{E}(X, H)}$ est un ensemble de Šilov-module, mais diffère en général de la frontière de Šilov-module lorsqu'elle existe.

COROLLAIRE 3.

1° Lorsque $\mathcal{E}_m(X, H) = \mathcal{E}'_m(X, H)$, il y a frontière de Šilov-module.

2° Ceci a lieu en particulier lorsque H contient une $f > 0$, ou lorsque H est une algèbre.

PROPOSITION 4.

1° Lorsque X est métrisable, $\mathcal{E}_m(X, H)$ et $\mathcal{E}'_m(X, H)$ sont des G_δ de X .

2° Sinon, ces ensembles peuvent ne pas être des espaces de Baire.

3° Toutefois, pour toute suite (ω_n) d'ouverts relatifs partout denses de $\mathcal{E}_m(X, H)$, $T.(\cap \omega_n)$ est partout dense dans $\mathcal{E}(B)$.

Notre cadre donne une réponse facile à une question de FAKHOURY :

THÉOREME 5. - On se donne deux couples (X_1, H_1) , (X_2, H_2) et une isométrie I de H_1 sur H_2 .

1° $\forall f \in H_1$ tel que $|f| = 1$ sur un H_1 -ensemble de Šilov-module, on a $|I(f)| = 1$ sur $\mathcal{E}_m(X_2, H_2)$.

2° Si, pour $i = 1, 2$, on a $1 \in H_i$ et $X_i =$ (frontière de Šilov-module), il existe une homéomorphie unique φ de X_2 sur X_1 telle que, pour tout $f \in H_1$, on ait $I(f) = f \circ \varphi$.

Plus généralement, d'ailleurs, pour une isométrie I , $|f|$ prend sur $\mathcal{E}_m(X_1, H_1)$ les mêmes valeurs que $|I(f)|$ sur $\mathcal{E}_m(X_2, H_2)$.

2. Mesures maximales pour (X, H) .

Définition 6. - Une mesure μ (de type $\tilde{K}$) sur B (éventuellement sur X) est dite maximale si $|\mu|$ est maximale dans B .

Définition 7.

1° On note $C_e(B)$ le sous-espace de $C(B, R)$ constitué par les fonctions qui sont constantes sur les fibres T_x . Et on pose $S_e = S \cap C_e(B)$.

2° On note $C_h(B)$ le sous-espace de $C(B, \mathbb{K})$ des f homogènes en ce sens que $f(tx) = tf(x)$ pour tout $t \in T$.

On notera B_f , pour tout $f \in C(B, \mathbb{R})$ l'ensemble bordant $\{x \in B : f(x) = \hat{f}(x)\}$.

PROPOSITION 8. - Pour toute $\mu \geq 0$ sur B , les conditions suivantes sont équivalentes :

1° μ est maximale dans B .

2° μ est portée par chacun des ensembles bordants relatifs aux $f \in S_e$.

Disons maintenant que $\mu \vee \nu$ si $\mu(f) = \nu(f)$ pour toute $f \in C_e(B)$.

COROLLAIRE 9. - Pour deux mesures $\mu, \nu \geq 0$ sur B , si $\mu \vee \nu$ et si μ est maximale, ν l'est aussi.

Ceci va permettre de généraliser un théorème de HUSTAD, de façon très simple.

THÉOREME 10. - Pour tout couple (X, H) et toute $\ell \in H'$, il existe une μ sur X (de type $\mathbb{K}$) telle que :

(a) $\|\ell\| = \|\mu\|$,

(b) $\ell(f) = \mu(f)$ pour tout $f \in H$,

(c) μ est maximale.

On utilise bien sûr le plongement de X dans B . Puis on utilise le cas particulier où μ est discrète (approcher une mesure maximale sur B représentant ℓ par des mesures discrètes sur $\mathcal{E}(B)$).

3. Unicité de cette représentation.

Définition 11. - Un convexe compact équilibré B est appelé simplexoïde si tout x de la "sphère" de B est barycentre d'une unique mesure maximale de probabilité.

Exemple : Dans R^3 les polyèdres centrés à faces triangulaires.

THÉOREME 12 (facile à partir d'une modification légère du théorème d'unicité Choquet-Meyer).

$(B \text{ est un simplexoïde}) \Leftrightarrow (\text{Toute face de } B \text{ est un simplexe géométrique})$.

Voici enfin un théorème moins immédiat.

Pour μ, ν sur B , on notera $\mu \approx \nu$. Si $\mu(f) = \nu(f)$ pour toute $f \in C_h(B)$, on dira que μ est faciale si $\|\mu\| = \|r(\mu)\|$.

THÉOREME 13. - On a l'équivalence des énoncés :

- (a) (B est un simplexoïde),
- (b) Deux mesures faciales maximales μ, ν sur B , de même résultante, sont toujours $\approx$ équivalentes.

Ce théorème peut évidemment s'énoncer en termes de X et H .

Gustave CHOQUET
16 avenue d'Alembert
92160 ANTONY
