

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

GUSTAVE CHOQUET

Résultats récents sur les formes positives sur des espaces de fonctions

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 11-12 (1971-1973), exp. n° 6, p. 1-3

http://www.numdam.org/item?id=SC_1971-1973__11-12__A7_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RÉSULTATS RÉCENTS SUR LES FORMES POSITIVES SUR DES ESPACES DE FONCTIONS

par Gustave CHOQUET

Résumé

1. Capacités et mesures.

Soit E un espace topologique séparé ; une application f de $\mathcal{P}(E)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est dite capacité extérieure fortement sous-additive si

1° f est fortement sous-additive ;

2° f est continue à droite sur $\mathcal{P}(E)$;

3° tout ouvert de E est f - $\mathcal{K}$ -capacitable ($\mathcal{K}$ ensemble des compacts de E). On vérifie que c'est une $\mathcal{K}$ -capacité. Si alors on a $F \subset E$ et si on pose $\mathcal{E} = \mathcal{K}(E)$ et $\mathcal{F} = \mathcal{K}(F)$, toute capacité e. f. s. a. sur F a une extension du même type sur E .

Il en résulte que si F est un $\mathcal{K}$ -analytique plongeable dans un $\mathcal{K}_G$ séparé, pour toute f sur F de ce type, F est f - $\mathcal{K}$ -capacitable.

Mesure de Radon sur E . - Par définition, c'est une capacité e. f. s. a. sur E , finie sur $\mathcal{K}$, et additive pour compacts disjoints.

Alors, pour tout $X \subset E$ qui est f - $\mathcal{K}$ -capacitable avec $f(X) < \infty$, l'ensemble des $Y \subset X$ capacitables est une tribu, et la restriction de f à cette tribu est une mesure σ -additive.

THÉOREME 1. - Soient E un $\mathcal{K}$ -analytique complètement régulier, $\varphi : E \rightarrow F$ séparé, avec φ continue surjective ; pour toute mesure de Radon f sur F , bornée, il existe une mesure de Radon e sur E telle que $f = \varphi(e)$.

Voici maintenant un théorème de type Stone-Weierstrass pour les mesures :

THÉOREME 2. - Soient E séparé, H sous-espace réticulé de $C(E, \mathbb{R})$, μ et μ' deux mesures de Radon sur E avec $\mu(f) = \mu'(f) < \infty$ pour toute $f \in H^+$.

S'il existe $X \subset E$ portant μ et μ' , fortement séparé par H (interpolation sur tout couple de points), alors $\mu = \mu'$.

2. Cônes convexes $X \in \mathcal{S}$ (i. e. saillants faiblement complets).

THÉOREME 3. - Si $X \in \mathcal{S}$ (avec $X \subset E$ faible) a une topologie métrisable séparable, la topologie de $E = (X - X)$ peut être affaiblie de façon à ce que E devienne métrisable et que X reste complet, avec même topologie qu'initialement.

COROLLAIRE 4. - Ce cône X est polonais.

Pour tout cône $X \in \mathcal{S}$, on a l'équivalence :

$[X = \varprojlim (X_n \text{ localement compact})] \Leftrightarrow [0 \text{ a dans } X \text{ une base dénombrable de voisinages}]$.

On note $\mathcal{S}_D$ la classe de ces cônes.

THÉOREME 5. - Soit E vectoriel ordonné, positivement engendré ; alors,

1° Si E^+ a un ensemble dénombrable cofinal, $E^+ \in \mathcal{S}_D$

2° Lorsque E^+ est algébriquement fermé, l'inverse est vrai.

Voici maintenant une propriété importante des cônes métrisables :

THÉOREME 6. - Tout $X \in \mathcal{S}$ métrisable est séparable.

3. Mesures coniques.

Rappelons que, sur tout E faible complet, toute mesure conique μ est de Daniell. C'est faux si on suppose seulement μ portée par un cône $X \in \mathcal{S}$.

PROBLÈME 7. - Est-ce que, si $X \in \mathcal{S}$ n'a pas d'éléments extrémaux, et si μ conique est maximale sur X , $S(\mu) = \emptyset$ entraîne que μ n'est pas de Daniell ? Réciproque ?

THÉOREME 8. - Soit K un chapeau universel d'un cône C d'un e. l. c. s. ; soient μ, μ' des mesures de Radon positives sur la "base" X de K ; et soient $\tilde{\mu}, \tilde{\mu}'$ les mesures coniques associées ; alors :

1° $(\tilde{\mu} = \tilde{\mu}') \Leftrightarrow (\mu = \mu')$,

2° $(\mu < \mu' \text{ sur } K) \Leftrightarrow (\tilde{\mu} < \tilde{\mu}' \text{ sur } C)$.

THÉOREME 9. - Si π conique sur E est représentable par une mesure de Radon générale μ , toute $\pi' \leq \pi$ l'est aussi pour une $\mu' \leq \mu$.

Et pour tout compact étoilé $X \subset E$, l'application $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$ de $\mathcal{M}^+(B(X))$ dans $\mathcal{M}^+(E)$ est injective (où $B(X)$ est la "base de X ").

4. Les g-diffusions, outil commode.

Pour E localement compact, $\Sigma(E)$ est l'ensemble des applications s. c. i. de E dans $[0, \infty]$. Un g-opérateur de A dans B (localement compacts) est une application T de $\Sigma(A)$ dans $\Sigma(B)$ "linéaire" avec passage à la limite filtrante croissante. Un tel opérateur est une g-mesure sur A si $B = [0, \infty]$.

Une g-diffusion est l'adjoint d'un g-opérateur.

Toute g-diffusion est s. c. i., en ce sens que, $\forall \varphi \in \Sigma(B)$, l'application

$\mu \rightarrow \langle T_\mu, \varphi \rangle$ est aussi s. c. i..

Ces notions sont liées à la notion de conoïde.

Définition. - Un conoïde est un semi-groupe commutatif, avec élément neutre 0, où R^+ opère de façon que :

$$0x = 0 ; 1.x = x ; \lambda 0 = 0 ; \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y ; \lambda(\mu x) = \lambda\mu.x .$$

Noter qu'en général on n'a pas $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Viennent les notions de sous-conoïde, d'homomorphisme, de conoïde pré-ordonné (pré-ordre avec $(x \leq y) \Rightarrow (x + z \leq y + z)$ et $\lambda x \leq \lambda y$ pour $\lambda \geq 0$), de formes croissantes (non identiques en général aux formes ≥ 0).

On introduit les notions de domination, de conoïdes adaptés, et on montre par des exemples la souplesse de cet outil.

5. Intégrales de Daniell, et théorème de Radon-Nikodym.

Dans V , espace de Riesz, où $\mathcal{Q} = (a_n^i)_i$ est une famille de suites décroissantes d'éléments de V , $T \in V_+^*$ est dite de $\mathcal{Q}$ -Daniell si $\forall (a_n) \in \mathcal{Q}, \lim T(a_n) = 0$.

On étudie cette notion en étendant certains énoncés classiques, en particulier en relation avec le théorème de Hewitt-Smets : Pour tout E topologique, toute forme ≥ 0 sur $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ est de Daniell.

On étudie ensuite l'équivalent du théorème de Radon-Nikodym pour les V_+^* associés à un sous-espace V réticulé de l'espace $\mathcal{Q}(K)$ des fonctions continues à valeurs dans $\bar{R}$ sur un espace sous-stonien, qui sont finies sur un ouvert dense.

6. Décomposition canonique de formes ≥ 0 .

Soit V un sous-espace héréditaire d'un $\mathcal{Q}(K)$ comme ci-dessus. On montre que V_+^* est somme directe de trois sous-cônes :

$$(V_+^*)_0 = \{T : \forall f \in V^+, \varepsilon > 0, T(f) = T(\inf(f, \varepsilon))\}$$

$$(V_+^*)_\infty = \{T : \forall f \in V^+, n > 0, T(f) = T(f - n)^+\}$$

$$(V_+^*)_m = \{T : \forall f \in V^+, \lim_{n \rightarrow \infty} T(\inf f, \frac{1}{n}) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} T(f - n)^+ = 0\} .$$

Evidemment, $(T \text{ de Daniell}) \Rightarrow (T \in (V_+^*)_m)$.

Les éléments de ces trois cônes sont respectivement des évaluations des infiniment petits des f de V^+ , des infiniment grands, et des valeurs finies de ces f .