

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

JEAN SAINT RAYMOND

Sur une conjecture de Fakhoury

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 11-12 (1971-1973), exp. n° C2, p. C1-C3

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1971-1973__11-12__A11_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR UNE CONJECTURE DE FAKHOURY

par Jean SAINT RAYMOND

Le but de cette note est de fournir un contre-exemple à la conjecture suivante de H. FAKHOURY.

CONJECTURE. - Soit K un convexe compact symétrique. Soient p la jauge de K , et S l'ensemble des points x de K , où $p(x) = 1$. Si f est une forme linéaire vérifiant le calcul barycentrique, et si $f|_K$ est continue en tout point de S , $f|_K$ est continue.

LEMME. - Il existe sur ℓ^1 une norme n^* localement uniformément convexe qui est la norme duale d'une norme sur c_0 , et qui est équivalente à la norme canonique de ℓ^1 .

Nous posons, pour tout $x = (\xi_n)_n$ de ℓ^1

$$\begin{cases} \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| \\ \|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

la norme $\|\cdot\|_1$ est la norme canonique de ℓ^1 . Nous définissons, pour $x = (\xi_n)_n$ dans ℓ^1 ,

$$n^*(x) = (\|x\|_1^2 + \|x\|_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

n^* est une norme sur ℓ^1 , et puisque $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$,

$$\|x\|_1 \leq n^*(x) \leq (\|x\|_1^2 + \|x\|_1^2)^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{2}) \cdot \|x\|_1$$

n^* est équivalent à la norme $\|\cdot\|_1$. De plus, puisque

$$n^*(x) = \sup_q \left(\left[\sum_{n=1}^q |\xi_n| \right]^2 + \sum_{n=1}^q \xi_n^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

n^* est s. c. i. pour la topologie $\sigma(\ell^1, c_0)$. Il en résulte que

$$K = \{x \in \ell^1; n^*(x) \leq 1\}$$

est un convexe faiblement fermé, donc que n^* est la norme duale de la jauge de K^0 , en vertu du théorème des bipolaires.

Le convexe K est donc un convexe compact symétrique pour la topologie $\sigma(\ell^1, c_0)$.

Nous montrons maintenant que n^* est l. u. c. Soit x tel que $n^*(x) = 1$, et (x_q) tels que

$$n^*(x_q) \rightarrow 1 \text{ et } n^*(x + x_q) \rightarrow 2.$$

Nous démontrons que $n^*(x - x_q) \rightarrow 0$.

Si nous considérons les points (y_q) (resp. y) de ℓ^2 définis par

$$\begin{aligned} y_q &= (\|x_q\|_1, \xi_1^q, \dots, \xi_k^q, \dots) \\ y &= (\|x\|_1, \xi_1, \dots, \xi_k, \dots) \end{aligned}$$

On a

$$\|y_q\| = n^*(x_q) \rightarrow 1 = n^*(x) = \|y\|$$

et

$$\begin{aligned} (\|y\| + \|y_q\|)^2 &\geq \|y + y_q\|^2 = (\|x\|_1 + \|x_q\|_1)^2 + \|x + x_q\|_2^2 \\ (\|y\| + \|y_q\|)^2 &\geq \|y + y_q\|^2 \geq \|x + x_q\|_1^2 + \|x + x_q\|_2^2 = (n^*(x + x_q))^2 \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{cases} \|y_q\| \rightarrow 1 = \|y\| \\ \|y + y_q\| \rightarrow 2. \end{cases}$$

Comme ℓ^2 est uniformément convexe, on en déduit que $\|y - y_q\| \rightarrow 0$, donc que

$$\begin{cases} \|x_q\|_1 \rightarrow \|x\|_1 \\ (\forall k), \xi_k^q \rightarrow \xi_k. \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k+1}^{\infty} |\xi_j| < \frac{\varepsilon}{6}$. Il existe donc N tel que, pour $q \geq N$, on ait :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k |\xi_j^q - \xi_j| < \frac{\varepsilon}{6} \\ \left| \|x_q\|_1 - \|x\|_1 \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^q - \xi_j| &\leq \sum_{j=1}^k |\xi_j^q - \xi_j| + \sum_{j=k}^{\infty} |\xi_j^q| + \sum_{j=k}^{\infty} |\xi_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^k |\xi_j^q - \xi_j| + \sum_{j=k}^{\infty} |\xi_j| + \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j^q| - \sum_{j=1}^k |\xi_j^q| \\ &\leq \sum_{j=1}^k |\xi_j^q - \xi_j| + \sum_{j=k}^{\infty} |\xi_j| + \|x\|_1 + \frac{\varepsilon}{3} - \left(\sum_{j=1}^k |\xi_j| - \sum_{j=1}^k |\xi_j^q - \xi_j| \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^k |\xi_j^q - \xi_j| + \sum_{j=k}^{\infty} |\xi_j| + \|x\|_1 + \frac{\varepsilon}{3} - \|x\|_1 + \sum_{k+1}^{\infty} |\xi_j| + \sum_{j=1}^k |\xi_j^q - \xi_j| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + 2 \sum_{j=k}^{\infty} |\xi_j| + 2 \sum_{j=1}^k |\xi_j^q - \xi_j| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$\|x_q - x\|_1 < \varepsilon, \text{ et } x_q \rightarrow x.$$

La norme n^* est donc l. u. c.

Soit maintenant f la forme linéaire sur ℓ^1 définie par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k.$$

Comme la suite $(1, 1, \dots, 1, \dots)$ n'appartient pas à c_0 , f n'est pas continue pour $\sigma(\ell^1, c_0)$, donc sa restriction à la boule de rayon $2^{-\frac{1}{2}}$, qui est contenue dans K , n'est pas continue ; donc, a fortiori, $f|_K$ n'est pas continue.

Comme

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \sum_{j=1}^k \xi_j ,$$

f est de première classe affine, et vérifie donc le calcul barycentrique. Reste à prouver que $f|_K$ est continue en tout point de S . Comme K est métrisable, il suffit de montrer que si (x_q) converge faiblement vers $x \in S$, $f(x_q)$ converge vers $f(x)$. Nous démontrons que $n^*(x_q) \rightarrow 1$ et $n^*(x + x_q) \rightarrow 2$, ce qui entraînera, d'après le lemme, que $\|x - x_q\| \rightarrow 0$, donc que

$$|f(x) - f(x_q)| \leq \|x - x_q\| \rightarrow 0 .$$

Si x_q converge faiblement vers x , $(x + x_q)/2$ converge faiblement vers x . Tout revient donc à démontrer que si $x_q \in K$ converge faiblement vers x , $n^*(x_q) \rightarrow 1$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $(1 - \varepsilon).K$ est convexe compact, et ne contient pas x . D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe $g \in c_0$ tel que

$$\begin{cases} g(x) > 1 \\ g(y) \leq 1 \end{cases} \quad \forall y \in (1 - \varepsilon).K .$$

Comme $g(x_q) \rightarrow g(x) > 1$, il existe N tel que $g(x_q) > 1$, donc $n^*(x_q) > 1 - \varepsilon$, et puisque $n^*(x_q) \leq 1$, on a bien

$$n^*(x_q) \rightarrow 1 = n^*(x)$$

et de même

$$n^*\left(\frac{x + x_q}{2}\right) \rightarrow 1$$

donc $n^*(x + x_q) \rightarrow 2$.

On a donc bien démontré que f vérifiait toutes les hypothèses de la conjecture, sans vérifier la conclusion.

Jean SAINT RAYMOND
18 rue de Moscou
75008 PARIS