Hicham Fakhoury

Une caractérisation des simplexes compacts et des cônes réticulés applications

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 9, nº 1 (1969-1970), exp. nº 2, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SC_1969-1970__9_1_A2_0>

Séminaire CHOQUET
(Initiation à l'Analyse)
9e année, 1969/70, n° 2, 12 p.

13 novembre 1969

UNE CARACTÉRISATION DES SIMPLEXES COMPACTS ET DES CÔNES RÉTICULÉS APPLICATIONS

par Hicham FAKHOURY

Introduction. - Cet article développe une Note parue aux Comptes Rendus de l'Académie ([6]), et généralise certains de ses résultats à des cônes convexes saillants faiblement complets.

Dans la première partie, on donne deux caractérisations des simplexes reposant sur l'existence d'une "sélection" affine.

Dans la deuxième, on développe deux applications de ces résultats, notamment une condition pour qu'un espace vectoriel de fonctions continues sur un compact soit isomorphe (pour l'ordre et pour la norme) à l'espace des fonctions affines continues sur un simplexe.

La troisième partie est l'application de ce qui précède à l'étude du produit tensoriel de simplexes.

Dans la dernière partie, on généralise les résultats de la première partie aux cônes convexes saillants faiblement complets.

Notations. - Pour un espace topologique E , l'espace des fonctions numériques continues sur E est noté $C(E)$.

Pour un convexe compact X (dans ce qui suit, X sera toujours contenu dans un e. l. c. séparé), on note :

$S(X)$ le cône des fonctions continues convexes sur X ,

$A(X) = S(X) \cap - S(X)$ l'espace des fonctions affines continues sur X ,

$\mathfrak{M}_+^1(X)$ = le compact des mesures positives de masse 1 sur X muni de la topologie vague,

$b(\mu)$ = le barycentre d'une mesure μ de $\mathfrak{M}_+^1(X)$. C'est l'unique point vérifiant

$$f(b(\mu)) = \mu(f) , \qquad \forall f \in A(X) .$$

On munit $\mathfrak{M}_+^1(X)$ de l'ordre de CHOQUET [3], défini par

$$\mu \prec \nu \iff \mu(f) \leqslant \nu(f) , \qquad \forall f \in S(X) .$$

Cet ordre est inductif, et tout point de X est barycentre d'une mesure maximale.

On sait que si tout point $x \in X$ est barycentre d'une mesure maximale unique, le convexe compact X est un simplexe ; cette mesure est alors notée μ_x .

Un simplexe est dit de Bauer, si $\mathcal{E}(X)$ est fermé dans X .

Pour toute fonction numérique bornée f de X dans $\underset{\sim}{R}$, on note $\hat{f}$ la fonction définie par

$$\hat{f}(x) = \inf\{g(x) \; ; \; g \in A(X) \; ; \; g > f\} \quad .$$

On rappelle les résultats suivants de [3] :

$$\hat{f}(x) = \sup\{\mu(f) \; ; \; b(\mu) = x\} \; , \qquad \forall f \in \mathcal{C}(X) \quad ,$$

et si X est un simplexe :

$$\hat{f}(x) = \mu_x(f) \; , \qquad \forall f \in S(X) \quad .$$

1. Sélections affines.

Pour démontrer le théorème principal, on a besoin du lemme suivant.

LEMME 1. - Soient X un convexe compact, et $f = \ell_1 \vee \ldots \vee \ell_n$ où $\ell_i \in A(X)$; alors tout x de X se décompose en

$$x = \sum_1^n \lambda_i \, x_i \quad ,$$

où $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_1^n \lambda_i = 1$, $f(x_i) = \ell_i(x_i)$, et tel que

$$\hat{f}(x) = \sum_1^n \lambda_i \, \ell_i(x_i) \quad .$$

Démonstration. - Il suffit de remarquer que les sous-graphes de $\hat{f}$, f , et ℓ_i , sont liés par

$$\begin{aligned}\{(x , r) \in X \times \underset{\sim}{R} \; ; \; r \leqslant \hat{f}(x)\} &= c\{(x , r) \in X \times \underset{\sim}{R} \; ; \; r \leqslant f(x)\} \\ &= c[\bigcup_i \{(x , r) \in X \times \underset{\sim}{R} \; ; \; r \leqslant \ell_i(x)\}] \quad .\end{aligned}$$

DÉFINITION 2. - Soit X un convexe compact ; une application $x \rightarrow \sigma_x$ de X dans $\mathfrak{M}_+^1(X)$ est dite une "sélection" si, pour tout x , on a

$$b(\sigma_x) = x \quad .$$

On sait ([3]) que, pour un simplexe X , l'application $x \rightarrow \mu_x$ est une sélection affine ; inversement, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 3. - Un convexe compact qui admet une "sélection" affine est un simplexe. Cette sélection ost alors unique ; et, pour tout x, la mesure σ_x est la mesure maximale de barycentre x.

Démonstration. - Soient x dans X, μ dans $\mathfrak{M}_+^1(X)$ de barycentre x, et $f = \ell_1 \vee \ldots \vee \ell_n$ où $\ell_i \in A(X)$.

Il suffit de montrer que

$$\mu(f) \leqslant \sigma_x(f) \quad .$$

Il est clair que $\mu(f) \leqslant \hat{f}(x)$. Par application du lemme 1, on a

$$\hat{f}(x) = \sum_1^n \lambda_i \, \ell_i(x_i) \ , \qquad \text{où} \quad x = \sum_1^n \lambda_i \, x_i \ ; \quad \lambda_i \geqslant 0 \ ; \quad \sum_1^n \lambda_i = 1 \quad .$$

Par suite,

$$\mu(f) \leqslant \sum_1^n \lambda_i \, \ell_i(x_i) = \sum_1^n \lambda_i \, \varepsilon_{x_i}(f) \leqslant \sum_1^n \lambda_i \, \sigma_{x_i}(f) \quad .$$

Comme σ est affine, il s'ensuit :

$$\sigma_x = \sum_1^n \lambda_i \, \sigma_{x_i} \quad ,$$

d'où

$$\mu(f) \leqslant \sigma_x(f) \quad .$$

Par conséquent $\mu < \sigma_x$. Cette inégalité, étant vraie pour toute mesure μ de barycentre x, prouve que σ_x est la mesure maximale de barycentre x, et que X est un simplexe ; d'où l'unicité de la sélection σ.

Remarque. - Ce théorème fournit une réponse à un problème, posé dans [9], où les auteurs montrent qu'un convexe compact admettant une sélection est un simplexe, et se demandent si la sélection est unique, et si, pour tout x, la mesure σ_x est maximale.

COROLLAIRE 4. - Un convexe compact qui admet une sélection affine vaguement continue est un simplexe de Bauer.

Démonstration. - En effet, un simplexe de Bauer est caractérisé par le fait que l'application $x \to \mu_x$ est vaguement continue.

Pour la deuxième caractérisation, on a besoin de la notion de compact ordonné :

Soient K un convexe compact, C un cône convexe de fonctions affines s. c. s., on préordonne K en posant :

$$x \leqslant y \iff f(x) \leqslant f(y) \ , \quad \forall f \in C \ .$$

Le lemme suivant et sa démonstration sont dus à EDWARDS [5].

LEMME 5. - <u>On pose</u> $\mathfrak{M}(K) = \{x \in K \ ; \ x$ <u>maximal pour l'ordre</u> $\leqslant\}$, <u>alors</u> :
$\partial_C = \mathfrak{M}(K) \cap \mathcal{E}(K) \neq \emptyset$;
<u>Toute fonction de</u> C <u>atteint son maximum sur</u> ∂_C .

<u>Démonstration</u>. - Une face fermée F sera dite croissante, si elle vérifie

$$(x \in F \ ; \ y \geqslant x) \iff y \in F \ .$$

Soit $\mathfrak{F}$ l'ensemble des faces fermées croissantes non vides. L'ensemble $\mathfrak{F}$ est non vide, puisque $X \in \mathfrak{F}$. L'ensemble $\mathfrak{F}$, ordonné par l'inclusion, est inductif vers le bas ; par suite, il existe des faces fermées minimales.

Soient $F \in \mathfrak{F}$ et $f \in C$, alors

$$\{y \in F \ ; \ \sup(f(x) \ ; \ x \in F) = f(y)\} \in \mathfrak{F} \ .$$

Si on note $[x] = \{y \in X \ ; \ f(y) = f(x) \ , \ \forall f \in C\}$, les faces minimales sont de la forme $[x]$. Comme toute face fermée rencontre $\mathcal{E}(K)$, les faces minimales sont donc les faces $[x]$ pour $x \in \partial_C$; ce qui démontre le lemme.

Le corollaire suivant est alors immédiat.

COROLLAIRE 6. - <u>Soient</u> X <u>un convexe compact,</u> f <u>une fonction de</u> $S(X)$, <u>et</u> K_x <u>l'ensemble des mesures de</u> $\mathfrak{M}_+^1(X)$ <u>de barycentre</u> x . <u>Pour tout</u> $x \in X$, <u>on a</u>

$$\hat{f}(x) = \sup\{\mu(f) \ ; \ \mu \in \mathfrak{M}(K_x) \cap \mathcal{E}(K_x)\} \ .$$

<u>Démonstration</u>. - Soit C le cône des applications $\mu \to \mu(f)$ pour $f \in S(X)$, l'ordre sur K_x associé à C coïncide avec l'ordre de Choquet. Le corollaire se réduit alors au lemme 5.

THÉORÈME 7. - <u>Un convexe compact</u> X <u>tel que, pour tout</u> $x \in X$, <u>l'ensemble</u> $\mathfrak{M}(K_x) \cap \mathcal{E}(K_x)$ <u>est réduit à une seule mesure</u> σ_x , <u>est un simplexe</u>.

<u>Démonstration</u>. - Il suffit de montrer que $x \to \sigma_x$ est une sélection affine. Il est clair que c'est une sélection. D'après le corollaire 6,

$$\hat{f}(x) = \sigma_x(f) \ , \qquad \forall f \in S(X) \ .$$

De plus, $\hat{f}$ est concave ; donc, pour tout x , y , z de X et $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ tels que $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$, on a

$$\hat{f}(x) \geqslant \lambda \hat{f}(y) + (1 - \lambda)\, \hat{f}(z) \quad ,$$

d'où

$$\sigma_x(f) \geqslant \lambda \sigma_y(f) + (1 - \lambda)\, \sigma_z(f) \ , \qquad \forall\, f \in S(X) \quad .$$

Autrement dit,

$$\sigma_x \succ \lambda \sigma_y + (1 - \lambda)\, \sigma_z \quad ,$$

les mesures σ_y et σ_z étant maximales, on a l'égalité

$$\sigma_x = \lambda \sigma_y + (1 - \lambda)\, \sigma_z \quad .$$

Par suite, X est un simplexe.

Ce résultat a été obtenu indépendamment par ALFSEN et SKAU dans [1].

2. Applications.

Dans cette partie, on donne une condition suffisante pour que l'image affine d'un simplexe soit un simplexe.

PROPOSITION 8. - Soient X et Y deux convexes compacts, et φ une surjection affine de X sur Y vérifiant :

X est un simplexe,
Pour tout $h \in A(Y)$, l'application $h \circ \varphi$ vérifie le calcul barycentrique,
Pour tout $f \in \mathcal{C}(Y)$, l'application $f \circ \varphi$ est universellement intégrable,
Si $\tilde{\varphi}$ est l'extension de φ à $\mathfrak{M}_+^1(X)$ et $\mathfrak{M}_+^1(Y)$, alors

$$(\varphi(x) = \varphi(x')) \implies \tilde{\varphi}(\mu_x) = \tilde{\varphi}(\mu_{x'}) \quad .$$

Sous ces conditions, Y est un simplexe.

Démonstration. - Pour tout $y \in Y$, et tout x tel que $\varphi(x) = y$, $\tilde{\varphi}(\mu_x)$ est une mesure ne dépendant que de y ; nous la désignerons par ν_y . Montrons que l'application $y \to \nu_y$ est une sélection affine.

(a) $y \to \nu_y$ est affine : Soit $y \in Y$, tel que $y = \lambda y' + (1 - \lambda)\, y''$; et soit x' (resp. x''), tel que $\varphi(x') = y'$ (resp. $\varphi(x'') = y''$). Par suite,

$$\begin{aligned} \nu_y &= \tilde{\varphi}(\mu_{\lambda x' + (1-\lambda) x''}) \\ &= \lambda \tilde{\varphi}(\mu_{x'}) + (1 - \lambda)\, \tilde{\varphi}(\mu_{x''}) \\ &= \lambda \nu_{y'} + (1 - \lambda)\, \nu_{y''} \quad . \end{aligned}$$

(b) $y \to \nu(y)$ <u>est une sélection</u> : Pour $h \in A(Y)$, on a $h(b(\nu_y)) = \mu_x(h \circ \varphi)$. Par hypothèse, $h \circ \varphi$ vérifie le calcul barycentrique, par suite

$$\mu_x(h \circ \varphi) = h(\varphi(x)) = h(y) \quad ,$$

d'où

$$b(\nu_y) = y \quad .$$

D'après le théorème 3, Y est un simplexe.

<u>Remarque</u>. – Les hypothèses de la proposition 8 entraînent $\varphi(\mathcal{E}(X)) = \mathcal{E}(Y)$. Mais inversement, même si φ est continue, la condition $\varphi(\mathcal{E}(X)) = \mathcal{E}(Y)$ ne suffit pas pour montrer que Y est un simplexe.

Soient Y un espace compact, et H un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(Y)$ séparant les points de Y et contenant les constantes.

On munit H' de $\sigma(H', H)$; soit φ le plongement canonique $y \to \varepsilon_y$ de X dans H' . Alors $X = c(\varphi(Y))$ est un convexe compact.

On désigne par $\underset{H}{\sim}$ la relation d'équivalence sur $\mathfrak{M}'_+(Y)$ définie par H .

Dans la suite, on conservera ces notations.

LEMME 9. – <u>Soient</u> ν <u>et</u> ν' <u>dans</u> $\mathfrak{M}'_+(Y)$; <u>les trois énoncés suivants sont équivalents</u> :

(a) $\nu \underset{H}{\sim} \nu'$;

(b) $\int \varphi \, d\nu = \int \varphi \, d\nu'$, <u>où l'intégrale est prise au sens faible</u> ;

(c) $b(\tilde{\varphi}\nu) = b(\tilde{\varphi}\nu')$.

<u>De plus, on déduit de l'application affine</u> $b \circ \tilde{\varphi}$, <u>une bijection entre</u> X <u>et</u> <u>l'ensemble des classes d'équivalence (pour</u> $\underset{H}{\sim}$) <u>sur</u> $\mathfrak{M}'_+(Y)$.

<u>Démonstration</u>. – La première partie est évidente. La deuxième se démontre en remarquant que tout point de X est barycentre d'une mesure portée par $\varphi(Y)$, puisque $\overline{\mathcal{E}(X)} \subset \varphi(Y)$.

THÉORÈME 10. – <u>Soient</u> Y <u>un compact, et</u> H , φ , X <u>comme précédemment. S'il existe une application</u> s <u>de</u> Y <u>dans</u> $\mathfrak{M}'_+(Y)$, <u>universellement scalairement intégrable, telle que</u> :

(a) <u>Pour tout</u> $y \in Y$, $s_y \underset{H}{\sim} \varepsilon_y$,

(b) <u>Pour toutes</u> ν <u>et</u> ν' <u>de</u> $\mathfrak{M}'_+(Y)$, <u>on a</u>

$$(\nu \underset{H}{\sim} \nu') \implies \left(\int s_y \, d\nu' = \int s_y \, d\nu'\right) \quad ;$$

<u>Alors</u> X <u>est un simplexe.</u>

<u>Démonstration.</u> - Pour tout x de X, on pose $\sigma_x = \widetilde{\varphi}(\int s_y \, d\nu)$, où $\widetilde{\varphi}(\nu)$ est de barycentre x.

L'hypothèse $y \to s_y$, universellement scalairement intégrable, donne un sens à $\int s_y \, d\nu$, et la condition (b) permet de définir l'application $x \to \sigma_x$.

L'affinité de cette application se vérifie aisément.

L'application σ est une sélection. Si $f \in H$, on a

$$f(b(\sigma_x)) = \widetilde{\varphi}(\int s_y \, d\nu)(f) = \int d\nu \int f \circ \varphi \, ds_y$$

$$= f \circ \varphi(y) \quad ,$$

d'où $b(\sigma(x)) = x$.

L'application σ est donc une sélection affine, et X est un simplexe.

<u>Remarque.</u> - Les hypothèses du théorème 10 sont en quelque sorte les meilleurs possibles.

Notons (b') la condition suivante :

(b') <u>Pour toutes</u> ν <u>et</u> ν' <u>de</u> $\mathfrak{M}_+^1(X)$ <u>à support fini, on a</u>

$$(\nu \underset{H}{\sim} \nu') \implies (\int s_y \, d\nu = \int s_y \, d\nu') \quad .$$

Si on remplace (b) par (b') dans le théorème 10, la conclusion ne subsiste plus, comme le montre l'exemple suivant, dû à ROGALSKI :

$Y = [0 , 1]$.

Soient λ la mesure de Lebesgue sur $[0 , 1]$, et $\mu = \sum 2^{-n} \varepsilon_{x_n}$ où $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des rationnels de $[0 , 1]$.

On pose $H = \mathrm{Ker}(\lambda - \mu)$.

3. Produits tensoriels.

Le théorème 10 permet de retrouver rapidement les résultats de [4], [8], sur le produit tensoriel de simplexes, et de donner une précision sur les mesures maximales

PROPOSITION 11. - <u>Soient</u> $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ <u>une famille de simplexes,</u> H <u>le sous-espace de</u> $\mathcal{C}(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha)$ <u>formé des fonctions multi-affines, et</u> φ <u>le plongement canonique de</u> $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ <u>de</u> H'. <u>Alors</u> $Y = c[\varphi(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha)]$ <u>est un simplexe, et</u>

$$(y \in \mathcal{E}(Y)) \iff (y = \varphi(x_\alpha) \; ; \; x_\alpha \in \mathcal{E}(X_\alpha) \, , \; \forall \alpha \in A) \quad .$$

<u>Démonstration</u>. - Soient $x_\alpha \in X_\alpha$, et μ_{x_α} la mesure maximale de barycentre x_α . Pour $x = (x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, on note $\bigotimes \mu_{x_\alpha}$ le produit infini des mesures μ_{x_α} , et on pose $s_x = \bigotimes \mu_{x_\alpha}$. L'application $x \to s_x$ vérifie les conditions du théorème 10.

L'espace vectoriel engendré par $\{f \in \mathcal{C}\left(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\right) ; \ f = f_{\alpha_1} \dots f_{\alpha_n} ; \ f_{\alpha_i} \in \mathcal{C}(X_{\alpha_i})\}$ est dense dans $\mathcal{C}\left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha\right)$. De plus d'après [3], pour tout α , l'application $x_\alpha \to \mu_{x_\alpha}$ est scalairement de première classe, donc l'application $x \to s_x$ est scalairement intégrable.

Soit B l'espace des fonctions dépendant d'un nombre fini de variables. B est dense dans H ([8]) ; il suffit de montrer que $s_x \underset{B}{\sim} \varepsilon_x$:

Soit $f \in B$, où f dépend de $x_{\alpha_1} \dots x_{\alpha_n}$:

$$s_x(f) = \bigotimes_1^n \mu_{x_{\alpha_i}}(f) = \int d\mu_{x_{\alpha_n}} \dots \int f \, d\mu_{x_{\alpha_1}} = \varepsilon_x(f) \quad .$$

Soit S^+ le cône engendré par les fonctions de la forme :

$$x_\alpha \to \prod_1^n f_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) \ ; \qquad f_{\alpha_i} \in S^+(X_{\alpha_i}) \quad ;$$

$S^+ - S^+$ est dense dans $\mathcal{C}\left(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\right)$.

Soient ν et ν' dans $\mathcal{M}_+^1\left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha\right)$ telles que $\nu \underset{H}{\sim} \nu'$, et $f \in S^+$; on peut écrire :

$$s_x(f) = \prod_1^n s_{x_{\alpha_i}}(f_i) = \inf\{\prod_1^n h_{\alpha_i} \ ; \ h_{\alpha_i} \in A(X_{\alpha_i}) \ ; \ h_{\alpha_i} > f_{\alpha_i}\} \quad .$$

Comme l'ensemble $\{g \in H \ ; \ g = \prod_1^n h_{\alpha_i} \ ; \ h_{\alpha_i} \in A(X_{\alpha_i}) \ ; \ h_{\alpha_i} > f_{\alpha_i}\}$ est filtrant décroissant vers $s_x(f)$, on a

$$\int d\nu \int f \, ds_x = \int d\nu' \int f \, ds_x \quad .$$

C. Q. F. D.

4. Généralisation aux cônes convexes saillants faiblement complets.

Toute l'étude précédente repose sur le théorème 3 ; on va étendre ce théorème aux cônes convexes saillants faiblement complets, éventuellement sans base.

Cette extension sera possible grâce à l'introduction des mesures coniques ([2]).

Rappel des définitions. - Soient V un espace vectoriel topologique faible, X un cône convexe saillant faiblement complet contenu dans V. Soit $S(X)$ le cône des fonctions f sur X définies par

$$f = \ell_1 \vee \dots \vee \ell_n \; ; \qquad \ell_i \in V' .$$

DÉFINITION 12. - On appelle mesure conique sur X, toute forme linéaire sur $(S(X) - S(X))$, positive sur $(S(X) - S(X))^+$.

DÉFINITION 13. - La résultante d'une mesure conique μ est le point $r(\mu)$ de X, s'il existe, tel que

$$f(r(\mu)) = \mu(f) , \qquad \forall f \in V' .$$

On note $M^+(X)$ le cône des mesures coniques sur X muni de la topologie initiale associée à

$$\mu \to \mu(f) , \qquad \forall f \in (S(X) - S(X)) .$$

On rappelle ([2]) que toute mesure de $M^+(X)$ admet une résultante unique.

On munit $M^+(X)$ de l'ordre de Choquet $\prec$ défini par

$$\mu \prec \nu \iff \mu(f) \leqslant \nu(f) , \qquad \forall f \in S(X) .$$

Dans [2], on trouve le lemme suivant.

LEMME 14. - Soient $f \in S(X)$, $f = \ell_1 \vee \dots \vee \ell_n$, et $x \in X$, alors

$$\hat{f}(x) = \sup\{\mu(f) \; ; \; \mu \in M^+(X) \; ; \; r(\mu) = x\} .$$

Il existe $x_1 , \dots , x_n$ tels que $\sum_i x_i = x$; $\hat{f}(x) = \sum f(x_i)$, et $f(x_i) = \ell_i(x_i)$.

L'équivalent du théorème 3 s'énonce alors comme suit (pour la démonstration, on renvoie à celle du théorème 3).

THÉORÈME 15. - S'il existe une application additive σ de X dans $M^+(X)$ telle que $r(\sigma_x) = x$, alors le cône X est réticulé. Pour tout x, la mesure σ_x est la mesure maximale de résultante x.

Soit $K_x = \{\mu \in M^+(X) \; ; \; r(\mu) = x\}$. On rappelle que K_x est un convexe compact pour la trace de la topologie de $M^+(X)$. Si $\mathfrak{M}(K_x)$ désigne l'ensemble des mesures maximales pour l'ordre de Choquet, d'après le lemme 5, on sait que $\mathfrak{M}(K_x) \cap \mathcal{E}(K_x) \neq \emptyset$.

COROLLAIRE 16. - Si, pour tout x de X, l'ensemble $\mathfrak{M}(K_x) \cap \mathcal{E}(K_x)$ est réduit à une seule mesure σ_x, le cône X est réticulé.

La démonstration est identique à celle du théorème 7.

Soient X et Y deux cônes convexes saillants faiblement complets dans deux e. l. c. s. E et F, φ une application linéaire continue de E dans F telle que $\varphi(X) \subset Y$. L'application φ se prolonge par $\tilde{\varphi}$, définie sur $M^+(X)$ par

$$\tilde{\varphi}(\mu)(f) = \mu(f \circ \varphi) ; \qquad \forall f \in (S(X) - S(X)) .$$

COROLLAIRE 17. - Avec les notations précédentes, supposons X réticulé et φ vérifiant :

$$\varphi(X) = Y ,$$
$$(\varphi(x) = \varphi(y)) \implies \tilde{\varphi}(\mu_x) = \tilde{\varphi}(\mu_y) .$$

Sous ces conditions, Y est réticulé.

La démonstration est la même que celle de la proposition 8.

On désigne par $\mathcal{E}(X)$ l'ensemble des génératrices extrémales d'un cône convexe X. On dit que X vérifie Krein-Milman, si l'on a

$$X = \overline{c(\mathcal{E}(X))} .$$

Soient X et Y deux cônes convexes saillants faiblement complets dans deux e. l. c. s. faibles E et F, φ une application linéaire continue de E dans F telle que $\varphi(X) = Y$. La proposition suivante généralise un résultat de JELLETT [7].

PROPOSITION 18. - Si X et Y sont réticulés, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $\hat{f} \circ \varphi = \widehat{f \circ \varphi}$, $\forall f \in S(Y)$;

(b) L'image par $\tilde{\varphi}$ d'une mesure maximale est une mesure maximale.

Si, de plus, X et Y vérifient Krein-Milman, (a) et (b) sont équivalents à :

(c) $\varphi(\mathcal{E}(X)) \subset \mathcal{E}(Y)$.

Démonstration. - (a) $\implies$ (b) : Soient $\mu_x \in M^+(X)$ maximale de résultante x, et $f \in S(Y)$. Il s'agit de montrer :

$$\tilde{\varphi}(\mu_x)(f) = \widehat{\tilde{\varphi}(\mu_x)}(f) .$$

La mesure μ_x étant maximale, $\tilde{\varphi}(\mu_x)(f) = \widehat{f \circ \varphi}(x)$, d'autre part

$$\widehat{\widetilde{\varphi}(\mu_x)}(f) = \inf\{\widetilde{\varphi}(\mu_x)(h) \ ; \ h > f \ ; \ h \in - S(Y)\}$$
$$= \inf\{\widetilde{\varphi}(\mu_x)(h) \ ; \ h > f \ ; \ h \in S(Y) \cap - S'(Y)\}$$
$$= \inf\{h \circ \varphi(x) \ ; \ h > f \ ; \ h \in S(Y) \cap - S'(Y)\}$$
$$= \hat{f} \circ \varphi(x) \ .$$

(b) $\Longrightarrow$ (a) : Soient $y \in Y$, et μ_y la mesure maximale de résultante y ; φ étant surjective de X sur Y, il existe $x \in X$ tel que $\varphi(x) = y$. Si μ_x désigne la mesure maximale de résultante x, il est clair que $\widetilde{\varphi}(\mu_x) = \mu_y$; par suite

$$\widehat{f \circ \varphi}(x) = \mu_x(f \circ \varphi) \ ,$$

$$\hat{f} \circ \varphi(x) = \mu_y(f) = \mu_x(f \circ \varphi) \ , \qquad \forall\, f \in S(Y) \ .$$

D'où l'on déduit l'égalité recherchée.

Supposons maintenant que X et Y vérifient Krein-Milman.

(b) $\Longrightarrow$ (c) : Soit $x \in \mathcal{E}(X)$, la mesure maximale de résultante x est ε_x. La mesure $\widetilde{\varphi}(\varepsilon_x) = \varepsilon_{\varphi(x)}$ étant maximale, $\varphi(x) \in \mathcal{E}(Y)$.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : Les deux fonctions $\hat{f} \circ \varphi$ et $\widehat{f \circ \varphi}$ sont affines s. c. s., et coïncident sur $\mathcal{E}(X)$, donc sur un ensemble dense. Comme elles sont les enveloppes inférieures des fonctions linéaires continues qui les majorent, elles coïncident sur tout X.

Soit $(X_\alpha , \varphi_{\alpha\beta})$ un système projectif de cônes convexes saillants faiblement complets vérifiant les conditions suivantes :

$X_\alpha \subset E_\alpha$ pour tout α ;

Pour $\alpha \leqslant \beta$, $\varphi_{\alpha\beta}$ est linéaire continue de E_α dans E_β, et telle que

$$\varphi_{\alpha\beta}(X_\beta) = X_\alpha \ ;$$

L'image, par $\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}$, d'une mesure maximale est une mesure maximale ;

$X = \varprojlim X_\alpha$ est non vide.

PROPOSITION 19. - <u>Si pour tout</u> α, <u>le cône</u> X_α <u>est réticulé, il en est alors de même pour le cône</u> X.

<u>Démonstration</u>. - Soit φ_α la projection de X sur X_α ; il est facile de vérifier que $S(X) = \bigcup_\alpha S(X_\alpha) \circ \varphi_\alpha$ et que $S(X) - S(X) = \bigcup_\alpha [S(X_\alpha) - S(X_\alpha)] \circ \varphi_\alpha$. Il suffit d'exhiber une application additive σ de X dans $M^+(X)$ telle que, pour tout x de X, on a $r(\sigma_x) = x$.