

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

GÉRARD DETOURBET

Algèbre d'opérateurs intégraux singuliers dans le cas $\beta > 1$

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, n° 1 (1967-1968), exp. n° A7, p. A1-A12

http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A8_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ALGÈBRE D'OPÉRATEURS INTÉGRAUX SINGULIERS

DANS LE CAS $\beta > 1$

par Gérard DETOURBET

Dans cet exposé, nous établirons un théorème important, bien que négatif, que l'on peut résumer de la façon suivante :

CZ_{β}^0 ($\beta \geq 1$) n'est pas une algèbre pour la composition des opérateurs.

Ce résultat, ne satisfaisant pas, justifiera le plongement naturel (après les théorèmes 2 et 3) de CZ_{β}^0 dans une algèbre d'opérateurs $CZ_{1,\beta}$, somme directe algébrique de CZ_{β}^0 et de $\mathcal{L}(L^2, H^1)$.

§ 1. Index des notations

Σ_n : sphère unité dans R^n munie de la mesure superficielle euclidienne σ ;

$G^s(R^n) = G^s$: ensemble des fonctions localement sommables dans $R^n - \{0\}$ et positivement homogènes de degré s ;

G_E^s : ensemble des fonctions de G^s dont les restrictions à Σ_n appartiennent à l'espace vectoriel E ;

G_E^s : ensemble des fonctions f de G_E^s telles que $\int_{\Sigma_n} f d\sigma = 0$;

G_{β}^k : ensemble des fonctions f de $R^n \times (R^n - \{0\})$ dans $\mathbb{C}$ qui possèdent les propriétés suivantes :

$$- \forall x \in R^n, h(x, \cdot) \in G_{\beta}^k(\Sigma_n),$$

- $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, (x, z) \rightarrow \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^{\alpha}} f(x, z)$ est höldérienne de classe β et bornée de $R^n \times \Sigma_n$ dans $C^{[\beta]}(R^n \times \Sigma)$;

G_{β}^k : ensemble des fonctions $f \in G_{\beta}^k$ telles que, $\forall x \in R^n$,

$$\int_{\Sigma_n} f(x, z) d\sigma = 0 ;$$

CZ_{β}^0 : ensemble des opérateurs linéaires continus de L^2 dans L^2 de la forme $Hf = af + hf$, où $a \in C^{\beta}$ et $h \in G_{\beta}^{-n}$;

$\|\cdot\|_\beta$: 1er cas pour $a \in C^\beta$: c'est alors la borne supérieure des maximums des dérivées d'ordre $|\alpha| \leq [\beta]$ et des constantes d'Hölder ;

2e cas pour $K \in CZ_\beta^0$: c'est alors

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ |z|=1 \\ |\alpha| \leq n}} \left| \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial z^\alpha} \sigma_H(x, z) \right| ;$$

$\|f\|$: la norme de f dans H^1 ;

$Y_{\ell, m}$: l'harmonique sphérique normalisée ($\int_\Sigma |Y_{\ell, m}|^2 d\sigma = 1$) de degré d'homogénéité m ;

$R_{\ell, m}$: l'opérateur associé à l'harmonique $Y_{\ell, m}$,

$$R_{\ell, m} f \cdot x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y| > \varepsilon} |x-y|^{-n} Y_{\ell, m}(x-y) f(y) dy ;$$

$\tilde{Y}_{\ell, m}$: la fonction de $\mathbb{R}^n - \{0\}$ associée à l'harmonique sphérique $Y_{\ell, m}$ par la formule

$$\tilde{Y}_{\ell, m}(z) = |z|^{-n} Y_{\ell, m}(z) .$$

§ 2. Rappels

(2.1) Si $k \in G^{-n}$, alors : $V_p k$ existe presque-partout $\iff k \in \overset{\circ}{G}^{-n}$ (voir [3], théorème 2).

(2.2) Si $k \in \overset{\circ}{G}_{L^2(\Sigma)}^{-n}$, alors : $\|k_\varepsilon f\|_2 \leq A \|f\|_2 \|k\|_{L^2(\Sigma)}$ (voir [6], théorème 1).

(2.3) Si $k \in CZ_\beta^0$, alors : $\|Kf\|_2 \leq A \|K\|_\beta \|f\|_2$ (voir [6], théorème 2).

(2.4) $\left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha (|x|^m \tilde{Y}_{\ell, m}(x)) \right| \leq C |x|^{m-|\alpha|} m^{n/2+|\alpha|-1}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$ (voir [1], théorème 4, p. 33).

(2.5) Si $K \in CZ_\beta^0$ ($\beta \geq 0$) , et si $a_{\ell, m}(x)$ est le coefficient de $\tilde{Y}_{\ell, m}(z)$ dans le développement du noyau de K en harmoniques sphériques, alors la série $a + \sum a_{\ell, m} R_{\ell, m}$ converge vers K pour la norme de $\mathcal{L}(L_k^2, L_k^2)$ ($k \leq [\beta]$) (voir appendice, et [1], théorème 3, p. 70).

(2.6) Nous pouvons, de plus, ajouter à (2.5) que

$$\|a_{\ell, m}\|_\beta \leq C m^{-(3n/2)} \|K\|_\beta \quad \text{et} \quad \|b_{\ell, m}\|_\beta \leq C m^{-2n} \|K\|_\beta ,$$

où $b_{\ell,m}$ est le coefficient de $Y_{\ell,m}(z)$ dans le développement en série d'harmoniques sphériques de σ_K (voir appendice, et [1], théorème 3, p. 70).

(2.7) Rappelons enfin que le nombre d'harmoniques sphériques de degré d'homogénéité m est inférieur à $A m^{n-2}$, où A est une constante.

§ 3. Etude préliminaire

Notations. - Dans ce paragraphe, aucune confusion n'étant à craindre, nous noterons $\tilde{Y}$ pour $\tilde{Y}_{\ell,m}$, et R pour $R_{\ell,m}$.

THÉOREME 1. - Si $a \in C^\beta$ ($\beta > 1$), l'opérateur $(aR - Ra)$ opère continuellement de L^2 dans H^1 , et nous avons

$$|||(aR - Ra)f||| \leq C \|a\|_\beta m^{n/2} \|f\|_2,$$

où C est une constante ne dépendant que de n et β .

Preuve. - L'espace $\mathcal{O}$ étant partout dense dans $\mathcal{L}^2$, il suffit de démontrer ce théorème dans le cas $f = \varphi \in \mathcal{O}$.

Soit donc $\varphi \in \mathcal{O}$. Nous avons, par définition de R ,

$$(3.0) \quad (aR - Ra) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \tilde{Y}(x-y) \{a(x) - a(y)\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(y) dy;$$

β étant supérieur à 1, nous pouvons écrire

$$(3.1) \quad a(x) - a(y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i) \frac{\partial a}{\partial x_i}(x) + b(x, y),$$

avec $b(x, y)$ vérifiant

$$(3.2) \quad |b(x, y)| \leq n \|a\|_\beta |x - y|^\alpha \quad \begin{cases} \alpha = \beta, & \text{si } \beta < 2, \\ \alpha = 2, & \text{si } \beta \geq 2. \end{cases} \quad (1)$$

⁽¹⁾ Cette majoration du reste s'obtient en l'écrivant sous forme intégrale. Démontrons cette formule. Posons $\gamma = 1$ si $\beta \geq 2$, et $\gamma = \beta - 1$ si $\beta < 2$. Nous avons

$$a(y) - a(x) = \sum_1^n \int_0^{y_i - x_i} \frac{\partial a}{\partial x_i}(x + te_i) dt.$$

$$\Rightarrow a(y) - a(x) - \sum_1^n (y_i - x_i) \frac{\partial a}{\partial x_i}(x) = b(x, y) = \sum_1^n \int_0^{y_i - x_i} \left\{ \frac{\partial a}{\partial x_i}(x + te_i) - \frac{\partial a}{\partial x_i}(x) \right\} dt$$

donc

$$|b(x, y)| \leq \sum_1^n \|a\|_\beta \int_0^{y_i - x_i} |x - y|^\gamma dt \leq n \|a\|_\beta |x - y|^{\gamma+1}.$$

(i) Transformation de l'expression (3.0) : Intégrons par parties l'intégrale de (3.0), nous obtenons

$$(3.3) \quad \int_S \tilde{Y}(x-y) \{a(x) - a(y)\} \varphi(y) \cos \theta_i \, d\sigma \\ - \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \tilde{Y}(x-y) \left(\sum_1^n (x_j - y_j) \frac{\partial a}{\partial x_j}(x) + b(x, y) \right) \right\} \varphi(y) \, dy ,$$

où S désigne la sphère de centre x et de rayon ε , σ la mesure superficielle euclidienne, et θ_i l'angle de la normale extérieure à S avec Ox_i . Transformons (3.3) en l'écrivant sous la forme

$$(3.4.1) \quad \int_S \tilde{Y}(x-y) \{a(x) - a(y)\} \varphi(y) \cos \theta_i \, d\sigma$$

$$(3.4.2) \quad + \int_{|x-y| > 1} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x_i}(x-y) \{a(x) - a(y)\} \varphi(y) \, dy \\ + \int_{\varepsilon \leq |x-y| \leq 1} \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x_i}(x-y) b(x, y) \varphi(y) \, dy$$

$$(3.4.3) \quad + \int_{\varepsilon \leq |x-y| \leq 1} \left\{ \sum_j (x_j - y_j) \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x_i}(x-y) \frac{\partial a}{\partial x_j}(x) \right\} \varphi(y) \, dy \\ + \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \tilde{Y}(x-y) \frac{\partial a}{\partial x_i}(y) \varphi(y) \, dy .$$

(ii) Le fait que φ soit un élément de $\mathcal{Q}$ implique que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in \mathcal{L}^2$, donc (3.0) définit une fonction de $\mathcal{L}^2$. Par ce fait, toutes les fonctions de x définies par les intégrales de (3.4.1), (3.4.2), (3.4.3), existent presque-partout. Ceci appliqué à la première intégrale de (3.4.3) prouve, en accord avec (2.1), que

$$\int_{\Sigma_n} (x_j - y_j) \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x_i}(x-y) \, d\sigma = 0 .$$

(iii) En appliquant (2.2) et (2.4), nous majorons la norme dans $\mathcal{L}^2$ des fonctions définies dans (3.4.3) (les intégrales considérées comme fonctions de x) par

$$C_m^{n/2} \|\varphi\|_2 \|a\|_\beta .$$

(iv) En utilisant (2.4) et (3.2), nous majorons les intégrales de (3.4.2) respectivement par

$$C \|a\|_\beta m^{n/2} \int_{|x-y| > 1} |x-y|^{-n-1} |\varphi(y)| \, dy , \\ C \|a\|_\beta m^{n/2} \int_{\varepsilon \leq |x-y| \leq 1} |x-y|^{-n-1+\alpha} |\varphi(y)| \, dy .$$

Le théorème de Young ($\|u \star v\|_2 \leq \|u\|_1 \|v\|_2$) assure alors l'appartenance à $\mathcal{L}^2$ de ces deux fonctions de x , et donne une majoration par

$$C \|a\|_{\beta} m^{n/2} \|\varphi\|_2 ,$$

C dépendant alors de β .

(v) Nous avons $|a(x) - a(y)| \leq n|x - y| \|a\|_{\beta}$, donc (3.4.1) est majorée par

$$C_m^{(n-2)/2} \|a\|_{\beta} \int_S \varepsilon^{-n+1} |\varphi(y)| dy .$$

φ étant continue, cette intégrale converge uniformément vers

$$C_m^{(n-2)/2} \|a\|_{\beta} |\varphi(x)| = |\ell(x)| .$$

Donc $\ell(x) \in \mathcal{L}^2$, et nous avons

$$\|\ell\|_2 \leq C_m^{n/2} \|a\|_{\beta} \|\varphi\|_2 .$$

(vi) En regroupant les résultats de (iii), (iv), et (v), nous obtenons

$$(3.5) \quad \|(aR - Ra) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\|_2 \leq C_m^{n/2} \|a\|_{\beta} \|\varphi\|_2 ,$$

où C est une constante dépendant de β et de n .

(vii)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle aR , \varphi \rangle = \langle \left(\frac{\partial a}{\partial x_i}\right) R , \varphi \rangle + \langle aR , \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle ,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle Ra , \varphi \rangle = \langle R \frac{\partial a}{\partial x_i} , \varphi \rangle + \langle Ra , \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle ,$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \{(aR - Ra)\varphi\} = \left(\frac{\partial a}{\partial x_i} R - R \frac{\partial a}{\partial x_i}\right)\varphi + (aR - Ra) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} ,$$

donc

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \{(aR - Ra)\varphi\} \right\|_2 \leq \left\| (aR - Ra) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_2 + \left\| \left(\frac{\partial a}{\partial x_i} R - R \frac{\partial a}{\partial x_i}\right)\varphi \right\|_2 ,$$

par application de (3.5) et (2.2), nous obtenons facilement

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \{(aR - Ra)\varphi\} \right\|_2 \leq C_m^{n/2} \|a\|_{\beta} \|\varphi\|_2 ,$$

$$\| (aR - Ra)\varphi \| \leq C_m^{n/2} \|a\|_{\beta} \|\varphi\|_2 .$$

§ 4. Définition et propriétés du pseudo-produit
de deux opérateurs intégraux singuliers de classe C_β^∞

Soient K_1 et $K_2 \in CZ_\beta^0$, et $\sigma(K_1)$ et $\sigma(K_2)$ les symboles associés. Le théorème 2 de [6] établit entre autre que $\sigma : H \rightarrow \sigma(H)$ est une isomorphie de CZ_β^0 dans G_β^0 , donc nous pouvons associer à $\sigma(K_1) \sigma(K_2) \in G_\beta^0$ un élément de CZ_β^0 - noté $K_1 \circ K_2$ et appelé pseudo-produit de K_1 et K_2 - tel que

$$\sigma(K_1 \circ K_2) = \sigma(K_1) \sigma(K_2) .$$

THÉOREME 2. - Si K_1 et K_2 sont dans CZ_β^0 , alors l'opérateur $K_1 K_2 - K_1 \circ K_2$ applique continuellement L^2 dans H^1 .

Preuve. - Avec les notations utilisées jusqu'ici, nous pouvons écrire

$$K_1 = \sum_{m \geq 0} a_{\ell, m}^1 R_{\ell, m} \quad \text{et} \quad K_2 = \sum_{\mu \geq 0} a_{\lambda, \mu}^2 R_{\lambda, \mu} ,$$

en prenant la notation $a_{0,0} = a$ et $R_{0,0} = I$ (opérateur identité). Alors

$$K_1 K_2 = \sum a_{\ell, m}^1 R_{\ell, m} a_{\lambda, \mu}^2 R_{\lambda, \mu}$$

et

$$K_1 \circ K_2 = \sum a_{\ell, m}^1 a_{\lambda, \mu}^2 R_{\ell, m} R_{\lambda, \mu} \quad (2) ,$$

ceci donnant

$$(K_1 K_2 - K_1 \circ K_2) = \sum a_{\ell, m}^1 (R_{\ell, m} a_{\lambda, \mu}^2 - a_{\lambda, \mu}^2 R_{\ell, m}) R_{\lambda, \mu} .$$

Soit donc $f \in L^2$,

$$||| (K_1 K_2 - K_1 \circ K_2) f ||| \leq \sum ||| a_{\ell, m}^1 (R_{\ell, m} a_{\lambda, \mu}^2 - a_{\lambda, \mu}^2 R_{\ell, m}) R_{\lambda, \mu} f ||| ,$$

$$||| (K_1 K_2 - K_1 \circ K_2) f ||| \leq \sum \|a_{\ell, m}^1\|_\beta ||| (R_{\ell, m} a_{\lambda, \mu}^2 - a_{\lambda, \mu}^2 R_{\ell, m}) R_{\lambda, \mu} f ||| ,$$

(2) En effet,

$$\sigma_{K_1} = \sum \gamma_m a_{\ell, m}^1 Y_{\ell, m} , \quad \sigma_{K_2} = \sum \gamma_\mu a_{\lambda, \mu}^2 Y_{\lambda, \mu} , \quad \gamma_m = C \Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)^{-1} ,$$

donc

$$\sigma_{K_1} \sigma_{K_2} = \sum \gamma_m \gamma_\mu a_{\ell, m}^1 a_{\lambda, \mu}^2 Y_{\ell, m} Y_{\lambda, \mu} ,$$

donc

$$K_1 \circ K_2 = \sum a_{\ell, m}^1 a_{\lambda, \mu}^2 R_{\ell, m} R_{\lambda, \mu} .$$

appliquons le résultat du théorème 1,

$$||| (K_1 K_2 - K_1 \circ K_2) f ||| \leq \sum c \|a_{\ell, m}^1\|_{\beta} (m+1)^{n/2} \|a_{\lambda, \mu}^2\|_{\beta} \|f\|_2 .$$

Les majorations (2.7) donnent alors :

$$||| (K_1 K_2 - K_1 \circ K_2) f ||| \leq \left(\sum_{\substack{m \geq 0 \\ \mu \geq 0}} (m+1)^{-2} (\mu+1)^{-(n/2)-2} \right) c \|K_1\|_{\beta} \|K_2\|_{\beta} \|f\|_2 .$$

La série entre parenthèses étant convergente, nous avons le résultat final suivant:

$$||| (K_1 K_2 - K_1 \circ K_2) f ||| \leq c \|K_1\|_{\beta} \|K_2\|_{\beta} \|f\|_2 .$$

C. Q. F. D.

Il est important de savoir si le produit de composition de deux opérateurs de Calderón-Zygmund est un opérateur de Calderón-Zygmund, car dans ce cas CZ_{β}^0 serait une algèbre. Le théorème 3 que nous allons maintenant établir prouve malheureusement qu'il n'en est rien.

THÉOREME 3. - Si H est un opérateur intégral singulier de type C_{β}^{∞} qui applique L^2 dans H^1 , il est identiquement nul.

Preuve. - Appelons Σ le sous-ensemble des éléments de G_{β}^0 pour lesquels l'opérateur associé applique continuellement L^2 dans H^1 .

Notons par u les rotations autour du point $x_0 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Si $h \in G_{\beta}^0$, notons $h_u(x, z) = h(u(x), u(z + x_0) - x_0)$, alors nous avons, en notant K_u l'élément de CZ_{β}^0 tel que $\sigma_{K_u} = h_u$, $K_u f_u = (Kf)_u$, ceci impliquant, grâce à la conservation de la norme par rotation, que $h_u \in \Sigma$ si $h \in \Sigma$.

(i) Démontrons que Σ est un idéal de G_{β}^0 . Soient donc $\sigma \in \Sigma$ et $h \in G_{\beta}^0$ qui ont pour opérateurs associés respectifs Λ et H . Nous avons

$$\begin{aligned} ||| \Lambda \circ Hf ||| &\leq ||| (\Lambda H - \Lambda \circ H) f ||| + ||| \Lambda Hf ||| \\ &\leq C \|f\|_2 + C' \|Hf\|_2 \leq C'' \|f\|_2 , \end{aligned}$$

donc $\sigma_{\Lambda \circ H} \in \Sigma$, mais $\sigma_{\Lambda \circ H} = \sigma h$, d'où le résultat.

(ii) Pour que l'opérateur H soit nul, il faut et il suffit que son symbole soit nul. Nous allons donc raisonner par l'absurde, et supposer que le symbole h de H n'est pas identiquement nul, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ tel que $h(x_0, z) \neq 0$.

(iii) Démonstration de la contradiction : Puisque $h(x_0, z) \neq 0$, il existe un nombre fini de rotations u_i ($i = 1, \dots, n$) telles que la fonction

$$G(x, z) = \sum_{i=1}^n |h_{u_i}(x, z)|^2$$

vérifie $G(x_0, z) \neq 0$ pour tout z .

Considérons alors $a(x) \in C^\beta$ telle que $a(x_0) \neq 0$ et $a(x) = 0$ si $G(x, z) = 0$, puis définissons la fonction $G_1(x, z)$ par

$$G_1(x, z) = \begin{cases} 0, & \text{si } a(x) = 0, \\ a(x) G(x, z)^{-1}, & \text{si } a(x) \neq 0. \end{cases}$$

Par construction, nous avons $G \in \Sigma$ et $G_1 \in G_\beta^0$, donc, puisque Σ est un idéal de G_β^0 , $GG_1 \in \Sigma$. Comme $GG_1 = a(x)$, nous pouvons écrire que, pour tout $f \in L^2$,

$$\|a(x)f\| \leq A\|f\|_2,$$

puisque l'opérateur associé à $a(x)$ se réduit à la multiplication par $a(x)$. Cette inégalité implique que $a(x) \equiv 0$ et que $h(x_0, z) = 0$ pour tout z , ce qui est la contradiction cherchée.

§ 5. Etude de l'algèbre $CZ_{1,\beta}$

Les théorèmes 2 et 3 précédemment établis montrent que le produit de composition de deux éléments de CZ_β^0 n'est pas un élément de CZ_β^0 , mais est la somme d'un élément de CZ_β^0 (le pseudo-produit) et d'un opérateur 1-régularisant. Cette remarque faite, la classe $CZ_{1,\beta}$ des opérateurs S de la forme $H + K$ avec

$$\begin{cases} H \in CZ_\beta^0 & (\beta > 1 \text{ fixé}), \\ K \text{ 1-régularisant}, \end{cases}$$

s'introduit tout naturellement. Etudions ses propriétés algébriques, et pour cela établissons le théorème suivant :

THÉORÈME 4.

- (a) $CZ_{1,\beta}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(L^2, L^2)$.
- (b) Pour tout S de $CZ_{1,\beta}$, la décomposition $S = H + K$, avec $H \in CZ_\beta^0$ ($\beta > 1$) et K 1-régularisant, est unique ($CZ_{1,\beta} = CZ_\beta^0 \oplus \mathcal{L}(L^2, H^1)$).

(c) L'application $S \rightarrow \sigma_H$ est un homomorphisme d'algèbres (de $CZ_{1,\beta}$ sur G_β^0)
dont le noyau algébrique est $\mathcal{L}(L^2, H^1)$.

Preuve.

(i) $CZ_{1,\beta}$ est une algèbre : Soient deux éléments S_1 et S_2 de $CZ_{1,\beta}$. Ils s'écrivent

$$\begin{aligned} S_1 &= H_1 + K_1, \\ S_2 &= H_2 + K_2, \end{aligned} \quad \text{avec } H_1, H_2 \in CZ_\beta^0 \quad \text{et} \quad K_1, K_2 \in \mathcal{L}(L^2, H^1),$$

donc

$$S_1 S_2 = (H_1 + K_1)(H_2 + K_2) = H_1 H_2 + H_1 K_2 + K_1 H_2 + K_1 K_2 ;$$

de façon évidente, les trois opérateurs $H_1 K_2$, $K_1 H_2$, $K_1 K_2$ sont dans $\mathcal{L}(L^2, H^1)$; d'autre part, $H_1 H_2 = H_1 \circ H_2 + U$, d'après le théorème 3, avec $H_1 \circ H_2 \in CZ_\beta^0$ et $U \in \mathcal{L}(L^2, H^1)$. D'où le fait que $CZ_{1,\beta}$ est une algèbre.

(ii) Décomposition unique : Soient $S \in CZ_{1,\beta}$, et deux décompositions (H_1, K_1) , (H_2, K_2) de S . Nous avons alors $H_1 - H_2 = K_2 - K_1$. Mais $H_1 - H_2 \in CZ_\beta^0$, donc $K_2 - K_1 \in CZ_\beta^0 \cap \mathcal{L}(L^2, H^1)$, le théorème 3 affirme alors que $K_2 - K_1 = 0$. Ceci signifie que les deux décompositions sont identiques.

Nous pouvons donc écrire $CZ_{1,\beta} = CZ_\beta^0 \oplus \mathcal{L}(L^2, H^1)$.

(iii) $S \rightarrow \sigma_H$, homomorphisme : Soit $S \in CZ_{1,\beta}$, alors $S = H + K$. σ_H est défini et appartient à G_β^0 . Définissons $\theta : CZ_{1,\beta} \rightarrow G_\beta^0$ par $S \rightarrow \theta(S) = \sigma_H$. Alors

$$\theta(SS') = \theta(H \circ H' + V), \quad \text{avec } V \in \mathcal{L}(L^2, H^1),$$

mais

$$\theta(SS') = \sigma_{H \circ H'} = \sigma_H \sigma_{H'} = \theta_S \theta_{S'}.$$

Donc θ est un homomorphisme d'algèbres.

(iv) $\mathcal{L}(L^2, H^1)$, noyau de θ : Ceci se déduit de la définition de θ .

Cherchons le centre de $CZ_{1,\beta}$, et énonçons le théorème :

THÉOREME 5. - Le centre de $CZ_{1,\beta}$ est l'ensemble des multiples de l'opérateur
identité.

Preuve. - Soit K un élément central de $CZ_{1,\beta}$. Il commute en particulier avec les éléments $a \in C^\beta$. Donc

$$Ka.f = aKf, \quad \forall f \in L^2.$$

Supposons f positive, continue et appartenant à L^2 . Définissons la fonction

$$\psi(x) = \{f(x)\}^{-1} K.f(x).$$

Si $g(x)$ est de la forme $a(x) f(x)$ avec $a \in C^\beta$, nous avons

$$K.g(x) = a(x)K.f(x) = a(x) f(x) \psi(x) = g(x) \psi(x).$$

Maintenant, les fonctions de la forme $a(x) f(x)$ sont denses dans L^2 , donc nous avons la relation générale

$$(5.1) \quad Kg = g\psi, \quad \forall g \in L^2,$$

et

$$(5.2) \quad \|\psi\|_\infty = \|K\| < \infty$$

(venant du fait que K est continu).

Soit x_0 un point de R^n . Définissons une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} f_n(x) \text{ est constante sur la sphère de centre } x_0 \text{ et de rayon } \frac{1}{n}, \\ f_n(x) \text{ a pour support cette sphère,} \\ \int_{R^n} f_n dx = 1. \end{cases}$$

Soit $H \in CZ_\beta^0$ défini par le noyau h . Nous avons, d'après la commutativité, $HKf_n = KHf_n$, soit

$$(5.3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y| > \varepsilon} h(x-y) f_n(y) \psi(y) dy = \psi(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y| > \varepsilon} h(x-y) f_n(y) dy.$$

Quand $n \rightarrow \infty$, le second membre de (5.3) tend vers $\psi(x) h(x - x_0)$, si x_0 a été choisi comme étant un point pour lequel la dérivée de l'intégrale de ψ est ψ . Nous avons, de plus, le premier membre de (5.3) qui tend vers $h(x - x_0) \psi(x_0)$, quand $n \rightarrow \infty$. Tout ceci se résume alors par

$$\psi(x) h(x - x_0) = \psi(x_0) h(x - x_0) \quad \text{presque-partout}.$$

Choisissons maintenant h de façon qu'elle ne s'annule que sur un ensemble de mesure nulle. Dans ce cas, nous pouvons affirmer que $\psi(x_0) = \psi(x)$ presque-partout,

ou encore, en transformant (5.1), que $K.g = \psi(x_0)g$ presque-partout et pour tout g de L^2 , ce qui est équivalent à : K est un multiple de l'opérateur identité de L^2 dans L^2 .

C. Q. F. D.

Appendice

Rappelons que, si $P(x)$ est polynôme harmonique de degré $m > 0$, alors

$$(app.1) \quad \mathfrak{F}(VP(x) |x|^{-n-m}) = \gamma_m P(x) |x|^{-m}, \quad \text{où } \gamma_m = C\Gamma(\frac{m}{2}) \Gamma(\frac{m+n}{2})$$

(C , constante dépendant de la définition prise pour la transformée de Fourier).

Rappelons aussi que, si L est l'opérateur défini par $Lf = |x|^2 \Delta f$ (conservant le degré d'homogénéité), nous avons

$$(app.2) \quad \tilde{Y}_{k,m}(x) = (-m)^{-r} (m+n-2)^{-r} L^r \tilde{Y}_{k,m}, \quad \forall r \geq 0.$$

Rappelons enfin que, si $f \in L^2(\Sigma_n)$, alors nous pouvons écrire

$$(app.3) \quad f(x) = \sum a_{k,m} Y_{k,m}(x), \quad \text{avec } a_{k,m} = \int_{\Sigma_n} f(\theta) Y_{k,m}(\theta) d\sigma,$$

la convergence ayant lieu dans $L^2(\Sigma_n)$, et que, d'autre part, si f est $2r$ -fois dérivable, alors $a_{k,m}$ s'écrit

$$(app.4) \quad a_{k,m} = (-m)^{-r} (m+n-2)^{-r} \int_{\Sigma_n} Y_{k,m} L^r f d\sigma.$$

(Pour les démonstrations de ces propriétés, voir [5].)

Considérons la fonction $\sigma_K(x, z)$, symbole de $K \in CZ_{\beta}^0$ ($\beta \geq 0$). Appliquons (app.4) à σ_K , et transformons à l'aide de Cauchy-Schwarz. On obtient

$$(app.5) \quad \|b_{\ell,m}\|_{\beta} \leq C_m^{-2n} \|K\|_{\beta} \quad (\text{se reporter à la définition de } \|K\|_{\beta}).$$

D'autre part, compte tenu de la majoration $|Y_{\ell,m}| \leq C_m^{(n-2)/2}$ et de (2.7), nous pouvons affirmer que la série

$$\sum b_{\ell,m} Y_{\ell,m}(x) \quad \text{converge normalement vers } \sigma(x, z).$$

Prenons φ , une fonction à décroissance rapide. Nous pouvons écrire, d'après PLANCHEREL,

$$K\bar{\varphi} = \int \sigma_K(x, z) \bar{\varphi}(z) dz = \int \{\sum b_{\ell,m}(x) Y_{\ell,m}(z)\} \bar{\varphi}(z) dz,$$

appliquant la convergence normale,

$$K\overline{\varphi} = \sum b_{\ell,m}(x) \int Y_{\ell,m}(z) \overline{\varphi}(z) dz ,$$

appliquant (app.1),

$$K\overline{\varphi} = \sum b_{\ell,m}(x) \gamma_m^{-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z| > \varepsilon} |z|^{-n} Y_{\ell,m}(z) \overline{\varphi}(z) dz .$$

Comme $\sum \gamma_m^{-1} b_{\ell,m}(x) Y_{\ell,m}(z)$ converge normalement ($\gamma_m^{-1} < C m^{n/2}$), nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z| > \varepsilon} \{a(x) + k(x, z)\} \overline{\varphi}(z) dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|z| > \varepsilon} \{\gamma_m^{-1} b_{\ell,m}(x) Y_{\ell,m}(z) |z|^{-n}\} \overline{\varphi}(z) dz ,$$

ceci étant valable pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, nous avons

$$a_{\ell,m} = \gamma_m^{-1} b_{\ell,m} ,$$

ce qui donne, d'après (app.5),

$$(app.6) \quad \|a_{\ell,m}\|_{\beta} \leq C m^{-(3/2)n} \|K\|_{\beta} .$$

A partir de (app.5) et de (app.6), il est facile d'établir (2.5).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CALDERÓN (Alberto P.). - Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbolicas. - Buenos Aires, Universidad de Buenos Aires, 1960 (Cursos y Seminarios de Matemática, 3).
- [2] CALDERÓN (A. P.) and ZYGMUND (A.). - Singular integral operators and differential equations, Amer. J. of Math., t. 79, 1957, p. 901-921.
- [3] COURRÈGE (Philippe). - Transformation de Fourier pour les fonctions homogènes de degré $-n$ sur R^n , Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 7e année, 1967/68, n° A.2, 15 p.
- [4] MÜLLER (Claus). - Spherical harmonics. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 17).
- [5] SOMEN (André). - Emploi des harmoniques sphériques, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 7e année, 1967/68, n° A.3, 9 p.
- [6] VAN DER OORD (Eric). - Opérateurs de Calderón-Zygmund dans R^n , I, Séminaire Choquet : Initiation à l'analyse, 7e année, 1967/68, n° A.5, 9 p.