

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

ERIC VAN DER OORD

**Indice d'une application linéaire. Théorème de Riesz.
Opérateurs compacts dans L^2**

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 7, n° 1 (1967-1968), exp. n° A1, p. A1-A8

[<http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A2_0>](http://www.numdam.org/item?id=SC_1967-1968__7_1_A2_0)

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INDICE D'UNE APPLICATION LINÉAIRE. THÉORÈME DE RIESZ.
 OPÉRATEURS COMPACTS DANS L^2

par Eric VAN DER OORD

On considère des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

1. Inverse relatif d'une application linéaire.

DÉFINITION 1. - On se place dans la catégorie des espaces vectoriels. Soit
 $U : F \rightarrow G$ une application linéaire. Une application linéaire $X : G \rightarrow F$ est
un inverse relatif de U si l'on a :

$$UXU = U$$

$$XUX = X .$$

PROPOSITION 1. - Avec les notations précédentes, $\text{Im}(X)$ est supplémentaire de
 $\text{Ker}(U)$, XU un projecteur P de F sur $\text{Im } X$, UX un projecteur Q de G sur
 $\text{Im}(U)$, et la donnée de X équivalent à celle des projecteurs P et Q . De plus,
 U induit une bijection U_X de $\text{Im}(XU)$ sur $\text{Im } U$, et X la bijection inverse.

1° Si U admet un inverse relatif X , on a :

$$XU XU = XU ,$$

donc XU est un projecteur.

$$\text{Im } X = \text{Im } XUX \subset \text{Im } XU \subset \text{Im } X ,$$

donc $\text{Im } XU = \text{Im } X$.

$$\text{Ker } U \subset \text{Ker } XU \subset \text{Ker } UXU = \text{Ker } U ,$$

donc $\text{Ker } XU = \text{Ker } U$, et de même, la définition étant symétrique en U et X ,
 UX est un projecteur de G sur $\text{Im } U$.

2° Réciproquement, si l'on a les projecteurs P et Q , U induit un isomorphisme U_0 de $\text{Im } P$ sur $\text{Im } U$. Si J est l'injection de $\text{Im } P$ dans F , on pose :

$$X = J U_0^{-1} Q .$$

THEOREME 1. - La proposition précédente subsiste dans la catégorie des espaces de Banach et des applications linéaires continues.

En effet, alors $\text{Im } P$ est fermé, donc J est continue, et U_0 est un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques (e. v. t.) d'après le théorème de Banach.

DÉFINITION 2. - On dit qu'une application linéaire U est régulière si elle admet un inverse relatif.

2. Opérateurs compacts.

DÉFINITION 3. - Soient F et G des e. v. normés, $U : F \rightarrow G$ une application linéaire ; on dit que U est compacte si l'image $U(B_F)$ de la boule unité F est relativement compacte dans G .

PROPRIÉTÉS.

- Une application linéaire compacte est continue.
- Si $V : G \rightarrow H$ est continue, VU est compacte.
- Si $V' : E \rightarrow F$ est continue, UV' est compacte.
- Une application linéaire continue, de rang fini, est compacte.
- En outre, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2. - Si G est complet, l'espace $K(F, G)$ des applications linéaires compactes est fermé dans $L(F, G)$.

En effet, si $U \in \overline{K(F, G)}$, $U(B_F)$ est tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble P précompact dans G tel que

$$U(B_F) \subset B(P, \varepsilon) ;$$

$U(B_F)$ est précompact, d'où le résultat, puisque G est complet (cf. BOURBAKI, [1], Topologie générale, chapitre 2, § 4, n° 2).

PROPOSITION 3. - Si $U : F \rightarrow G$ est compacte, sa transposée $U^* : G' \rightarrow F'$ est compacte.

Démonstration. - On a :

$$U^*(B_{G'}) = \{L \circ U \mid L \in B_{G'}\} .$$

Donc $U^*(B_{G'})$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur B_F , est isomorphe à $B_{G'}$, muni de la topologie de la convergence uniforme sur $U(B_F)$. Or $B_{G'}$ est équicontinu, et $U(B_F)$ relativement compact, d'où le résultat d'après le théorème d'Ascoli.

Remarque. - L'adhérence $L\mathfrak{B}(F, G)$ de l'ensemble des applications linéaires de rang fini dans $L(F, G)$ vérifie

$$L\mathfrak{B}(F, G) \subset K(F, G) ,$$

lorsque G est complet.

On ne sait pas si l'inclusion inverse a lieu pour tout couple (F, G) d'espaces de Banach, la postuler constitue "l'hypothèse d'approximation". Elle est vraie si F ou G est un Hilbert.

3. Opérateurs à indice.

On se place dans la catégorie des espaces vectoriels.

DÉFINITION 4. - Une application linéaire $u : F \rightarrow G$ est dite d'indice fini $\chi(u)$ si son noyau et son image sont respectivement de dimension et codimension finies, et l'on pose :

$$\chi(u) = \dim \text{Ker } U - \text{codim Im } U .$$

Propriétés.

- Si U a un inverse relatif X , $\chi(X) = -\chi(U)$.
- Si F et G sont de dimension finie, $\chi(\cdot)$ est constante sur $\text{Hom}(F, G)$ et vaut $\dim F - \dim G$.

THÉOREME 2. - Soit

$$F \xrightarrow{U} G \xrightarrow{V} H .$$

Alors si deux des trois morphismes V, U, VU sont d'indice fini, le troisième l'est aussi, et l'on a :

$$\chi(VU) = \chi(V) + \chi(U) .$$

Démonstration. - On décompose F, G, H de la manière suivante :

$$\begin{array}{llll} F = & \tilde{F} \oplus F_2 \oplus F_1 & F_1 = \text{Ker } U , & F_1 \oplus F_2 = \text{Ker } VU , \\ & \downarrow \tilde{G} \downarrow & & \\ G = & G_3 \oplus \tilde{G} \oplus G_2 \oplus G_1 & G_1 \oplus G_2 = \text{Ker } V , & \tilde{G} \oplus G_2 = \text{Im } U , \\ & \downarrow \tilde{H} \downarrow & & \\ H = & H_1 \oplus \tilde{H} \oplus H_2 & \tilde{H} = \text{Im } VU , & H_1 \oplus \tilde{H} = \text{Im } V . \end{array}$$

On a des isomorphismes : $F_2 \rightarrow G_2$, $\tilde{F} \rightarrow \tilde{G} \rightarrow \tilde{H}$, $G_3 \rightarrow H_1$.

Le théorème est alors aisé à vérifier en écrivant les définitions.

L'importance des opérateurs à indice est liée au fait suivant :

THÉOREME 3. - Si F et G sont des espaces de Banach, et si $U : F \rightarrow G$ est continue et d'indice fini, alors U admet un inverse relatif continu.

En effet, $\text{Ker } U$ est de dimension finie, donc admet un supplémentaire topologique. Il en est de même pour $\text{Im } U$ en vertu du lemme suivant.

LEMME 1. - Soit $U : F \rightarrow G$ un morphisme d'espaces de Banach. Si $\text{Im } U$ est de codimension finie, $\text{Im } U$ est fermé.

En effet, si N est un supplémentaire algébrique (de dimension finie) de $\text{Im } U$, le morphisme

$$\begin{aligned} U_1 : F \times N &\rightarrow G \\ (f, t) &\mapsto Uf + t \end{aligned}$$

est continu surjectif, donc

$$\text{Im } U \simeq F \times \{0\} / \text{Ker } U \times \{0\}$$

est complet, donc fermé.

4. Propriétés de stabilité de l'indice.

Dans la suite de l'exposé, on restera dans la catégorie des espaces de Banach.

THÉOREME 4. - Soient F et G des espaces de Banach, $U : F \rightarrow G$ un morphisme d'indice fini, X un inverse relatif continu de U . Alors si $T : F \rightarrow G$ vérifie $\|T\| < \frac{1}{\|X\|}$, $U + T$ est d'indice fini, et

$$\chi(U + T) = \chi(U) .$$

En effet, $1_G + TX$ est inversible dans $L(G, G)$, donc d'indice nul, et :

$$\chi(X) = \chi(X(1_G + TX)) = \chi(XUX + XTX) = 2\chi(X) + \chi(U + T) ,$$

d'où

$$\chi(U + T) = -\chi(X) = \chi(U) .$$

THÉOREME 5 (RIESZ). - Soient F un espace de Banach, $K : F \rightarrow F$ un endomorphisme compact de F ; alors $U = 1_F - K$ est d'indice nul.

Démonstration.

1° $\text{Ker } U$ est de dimension finie : en effet, $B_F \cap \text{Ker } U \subset K(B_F)$; la boule unité de $\text{Ker } U$ est compacte, donc $\text{Ker } U$ est de dimension finie.

2° $\text{Im } U$ est fermé : il suffit de montrer que la bijection continue

$$U_1 : F_0 \rightarrow \text{Im } U ,$$

où F_0 est un supplémentaire topologique de $\text{Ker } U$, est bicontinue ; dans le cas contraire, il existerait une suite f_n vérifiant

$$\forall n, f_n \in F_0, \|f_n\| = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n - Kf_n = 0 .$$

Or, K étant compacte, il existe une sous-suite f_{n_K} telle que $\lim_{K \rightarrow \infty} Kf_{n_K}$ existe ; si f est cette limite, elle doit vérifier :

$$\|f\| = 1, f \in F_0, f \in \text{Ker } U$$

ce qui est impossible.

3° Alors $\text{Im } U = (\text{Ker } U^*)^\perp$, et $\text{Im } U$ est de codimension finie, puisque $U^* = 1_{\mathbb{F}} - K^*$, et que K^* est compacte.

4° Enfin $\chi(1_{\mathbb{F}} + \lambda K)$ est une fonction définie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, et le théorème 4 montre qu'elle est continue et localement constante. Elle est donc constante et

$$\chi(U) = 0 .$$

COROLLAIRE. - Soient $U, K : F \rightarrow G$. Si U est d'indice fini et si K est compact, $U + K$ est d'indice fini et $\chi(U + K) = \chi(U)$.

Si X est un inverse relatif continu de U , on a

$$X.(U + K) = 1_{\mathbb{F}} + XK + (XU - 1_{\mathbb{F}})$$

et XK et $XU - 1_{\mathbb{F}}$ sont compacts, d'où

$$\chi(U + K) = -\chi(X) = \chi(U) .$$

Application : Alternative de Fredholm. - Si l'on a une équation $f - Kf = g$ (g donnée, f inconnue) dans un espace de Banach, K étant un opérateur compact, l'espace des solutions de l'équation $f - Kf = 0$ est de dimension finie n ; il existe alors n formes linéaires $L_1, \dots, L_n$ indépendantes telles que les conditions $L_i(g) = 0$, $1 \leq i \leq n$, soient nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution f de l'équation $f - Kf = g$.

En particulier, si $f - Kf = 0 \Rightarrow f = 0$ (cas d'unicité), l'équation admet toujours une solution. Elle est donnée par $f = (1 - K)^{-1} g = g + Zg$, où

$$Z = (1 - K)^{-1} K$$

est encore un opérateur compact.

Exemple : Opérateurs compacts dans L^2 . Opérateurs à noyau. - Soient X un espace topologique localement compact, μ une mesure de Radon positive sur X . On désignera par L^2 l'espace de Hilbert $L^2(X, \mu)$, et par $\underline{L}^2$ l'espace

$$L^2(X \times X, \mu \otimes \mu) .$$

Si T est un endomorphisme continu de L^2 , on notera $\|T\|$ sa norme

$$\|T\| = \sup_{\substack{\|\varphi\|=1 \\ \|\psi\|=1}} \langle \psi, T\varphi \rangle ,$$

$$\varphi, \psi \in L^2, \quad \|\varphi\| = \left(\int |\varphi(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2}, \quad \langle \varphi, \psi \rangle = \int_X \varphi(t) \bar{\psi}(t) d\mu(t) .$$

La norme de $\underline{L}^2$ sera notée $||| \cdot |||$.

Soit $K(x, y) \in L^2$; si φ, ψ sont deux fonctions quelconques de L^2 ,

$$\varphi(y) \bar{\psi}(x) \in \underline{L}^2 \quad \text{et} \quad |||\varphi(y) \bar{\psi}(x)||| = \|\varphi\| \cdot \|\psi\| .$$

On a alors,

$$\iint |K(x, y)| |\psi(x)| |\varphi(y)| d\mu(x) d\mu(y) \leq |||K||| \cdot \|\varphi\| \cdot \|\psi\| < +\infty$$

et le théorème de Fubini permet alors de conclure que l'application $\underline{K} : L^2 \rightarrow L^2$

$$(\underline{K}\varphi)(x) = \int K(xy) \varphi(y) d\mu(y) \quad (\varphi \in L^2)$$

est continue, et que l'on a

$$|||\underline{K}||| \leq |||K||| .$$

DÉFINITION 5. - On dit que $\underline{K}$ est l'opérateur intégral associé au noyau $K \in \underline{L}^2$.

THÉORÈME 6. - L'application $\theta : \underline{L}^2 \rightarrow L(L^2, L^2)$ définie par $\theta(K) = \underline{K}$ est une injection continue dont l'image $\mathcal{K}(L^2, L^2)$ est contenue dans $\mathcal{K}(L^2, L^2)$.

1° θ est continue : cela résulte de l'inégalité $|||\underline{K}||| \leq |||K|||$.

2° θ est injective : $|||\underline{K}||| = 0$ entraîne que K est orthogonal dans $\underline{L}^2$ à toute fonction de la forme $\psi(x) \bar{\varphi}(y)$, $\varphi, \psi \in L^2$. Or les fonctions de ce type forment un sous-ensemble total de $\underline{L}^2$.

3° Si $K \in \underline{L}^2$, $\underline{K}$ est compact : En effet K est limite dans $\underline{L}^2$ de fonctions en escalier, donc $(|||\underline{K}||| \leq |||K|||) \underline{K}$ est limite, dans $L(L^2, L^2)$, d'opérateurs de rang fini.

Remarque. - Pour $K \in \underline{L}^2$, $\varphi, \psi \in L^2$, on a

$$\langle \psi, \underline{K}\varphi \rangle = \iint K(xy) \varphi(y) \overline{\psi(x)} d\mu(x) d\mu(y) .$$

Le théorème de Fubini montre alors que $\underline{K}^*$ admet aussi un noyau :

$$(\underline{K})^* = {}^t \underline{K} \quad \text{où} \quad {}^t K(xy) = K(yx) .$$

THÉORÈME 7. - $\mathfrak{K}(L^2, L^2)$ est un idéal à gauche dans $L(L^2, L^2)$. Soit $K \in \underline{L}^2$, $T \in L(L^2, L^2)$. La formule :

$$(\widetilde{TK})(x, y) = T(K(\cdot, y))(x)$$

définit une application continue $\widetilde{T} : \underline{L}^2 \rightarrow \underline{L}^2$.

En effet, pour presque tout y , $K(\cdot, y) \in L^2$ et si l'on pose

$$k(y) = \|K(\cdot, y)\| ,$$

on a ,

$$k(y) \in L^2 \quad \text{et} \quad \|k\| = \|K\| .$$

Or, T étant continu,

$$\|T(K(\cdot, y))\| \leq \|T\| \cdot k(y) ,$$

d'où

$$\widetilde{TK} \in L^2 \quad \text{et} \quad \|\widetilde{TK}\| \leq \|T\| \cdot \|K\| .$$

Reste à montrer que $\widetilde{TK} = T \circ \underline{K}$, or l'application continue

$$\alpha : \underline{L}^2 \rightarrow L(L^2, L^2)$$

$$K \mapsto \widetilde{TK} - T \circ \underline{K}$$

vérifie $\alpha(K) = 0$ chaque fois que K est de la forme $\psi(x) \varphi(y)$, $\psi, \varphi \in L^2$, puisqu'alors

$$\widetilde{TK} = T(\psi)(x) \cdot \varphi(y)$$

comme l'ensemble des $\varphi(y) \psi(x)$ est total dans $\underline{L}^2$, la proposition en résulte.

Remarque. - On a plus simplement, en utilisant un résultat sur l'intégration des fonctions vectorielles par rapport à μ (Bourbaki, [2] Intégration, ch. IV, § 4, n° 2, théorème I)

$$T\left(\int_{L^2} K(\cdot, y) \varphi(y) d\mu(y)\right) = \int_{L^2} T(K(\cdot, y)) \varphi(y) d\mu(y)$$

T étant un opérateur continu de L^2 .

COROLLAIRE. - $\mathcal{K}(L^2, L^2)$ est un idéal bilatère : cela résulte du fait que $\mathcal{K}$ est fermé pour la transposition.

Remarque. - Si T est à noyau, $T = \underline{S}$, on a

$$\widetilde{TK}(x, y) = \int S(x, z) K(z, y) d\mu(z) .$$

Conséquence. - Si dans l'équation $f - \underline{K}f = g$ on est dans le cas d'unicité, on a $f = 1 + Zg$, avec $Z = (1 - K)^{-1} K$, donc Z est associé à un noyau.

Remarque. - On peut se demander s'il existe des opérateurs compacts de L^2 sans noyau. La réponse est affirmative en général. Si par exemple l'espace L^2 envisagé est séparable, soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne. Alors la suite d'opérateurs $(K_p)_{p \in \mathbb{N}}$, définie par

$$K_p \varphi = \sum_{n=1}^p \alpha_n \langle \varphi, e_n \rangle e_n$$

converge dans $\mathcal{K}(L^2, L^2)$ vers un opérateur compact K dès que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Cependant il résulte de la théorie de Hilbert et Schmidt que cet opérateur n'est associé à un noyau que si $\sum |\alpha_n|^2 < +\infty$ (voir par exemple RIESZ et NAGY [4], p. 239 et seq.).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (Nicolas). - Topologie générale, Chap. 1 et 2, 3e édition. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1142 ; Bourbaki, 2).
- [2] BOURBAKI (Nicolas). - Intégration, Chap. 4. - Paris, Hermann, 1952 (Act. scient. et ind., 1175 ; Bourbaki, 13).
- [3] DIEUDONNÉ (Jean). - Foundations of modern analysis. - New York, Academic Press, 1960 (Pure and applied Mathematics, Academic Press, 10).
- [4] RIESZ (Frédéric) et NAGY (Béla Sz.). - Leçons d'analyse fonctionnelle, 3e édition. - Budapest, Académie des Sciences de Hongrie, 1955.
- [5] Séminaire de Mathématiques, dirigé par Adrien DOUADY et Paul KRÉE, Année 1965/66. Tome 2 : exposés 11 à 20. - Nice, Université de Nice, Faculté des Sciences, s. d. (multigraphié).