

# SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

MARC ROGALSKI

## **Représentation intégrale des mesures excessives relativement à un semi-groupe d'opérateurs**

*Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse*, tome 3 (1964), exp. n° 6, p. 1-11

[http://www.numdam.org/item?id=SC\\_1964\\_\\_3\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SC_1964__3__A4_0)

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

REPRÉSENTATION INTÉGRALE DES MESURES EXCESSIVES  
RELATIVEMENT À UN SEMI-GROUPE D'OPÉRATEURS

par Marc ROGALSKI

L'utilisation des mesures coniques a permis à G. CHOQUET de généraliser son théorème de représentation intégrale aux cônes convexes faiblement complets. Elle a permis ainsi d'énoncer de nouveaux théorèmes de représentation intégrale en analyse, en particulier dans les cas d'unicité : cônes réticulés bien coiffés (voir [1], [2], [3], [4] et [5] pour le théorème lui-même).

G. CHOQUET et J. DENY ont, au Séminaire de Théorie du Potentiel en 1960, exposé un théorème de représentation des mesures positives  $\mu$ , sur un groupe abélien localement compact, à base dénombrable, vérifiant l'équation de convolution

$$\mu = \mu \star \sigma$$

où  $\sigma$  est une mesure positive donnée. Nous renvoyons à cet exposé [7].

G. A. HUNT a récemment utilisé le théorème de G. CHOQUET pour donner une représentation intégrale des mesures excessives relativement à un semi-groupe d'opérateurs sur  $C_K(\mathcal{E})$ , où  $\mathcal{E}$  est localement compact à base dénombrable. C'est ce théorème qui sera exposé ici.

1. Rappels.

Soient  $\mathcal{E}$  un espace localement compact à base dénombrable,  $\mathfrak{M}^+(\mathcal{E})$  le cône des mesures de Radon positives, muni de la topologie vague.

(1)  $\mathfrak{M}^+(\mathcal{E})$  est bien coiffé. - En effet, si  $K_n$  est une suite exhaustive de compacts, et  $\widetilde{1}_{K_n}$  une régularisée continue à support compact inclus dans  $K_{n+1}$  de l'indicateur de  $K_n$ , les ensembles  $V_{n,m} : \{\mu \mid \langle \mu, \widetilde{1}_{K_n} \rangle \leq \frac{1}{m}\}$  forment un système fondamental dénombrable de voisinages de l'origine dans  $\mathfrak{M}^+(\mathcal{E})$ . On en déduit très simplement que  $\mathfrak{M}^+(\mathcal{E})$  est bien coiffé (cf. [1]).

(2) Les chapeaux sont métrisables. - Cela résulte de ce que  $\mathcal{E}$  est à base dénombrable.

(3) Si  $E$  est un sous-cône convexe vaguement fermé de  $\mathfrak{M}^+(\mathcal{E})$ , il possède les propriétés précédentes.

(4) Si  $E$  est de plus réticulé pour son ordre propre, on a le théorème de représentation intégrale :

THÉORÈME 1. - Tout point de  $E$  est résultante d'une mesure conique maximale unique, localisable en une mesure de Radon sur un chapeau, portée par les points extrémaux.

## 2. Notations et définitions.

$\mathcal{E}$  sera un espace localement compact à base dénombrable  $\mathfrak{M}(\mathcal{E})$ ,  $\mathfrak{M}^+(\mathcal{E})$  : mesures de Radon, mesures de Radon positives ou nulles.

$\mathfrak{M}_K(\mathcal{E})$  : mesures de Radon à support compact

$\mathcal{C}(\mathcal{E})$  : fonctions continues

$\mathcal{C}_K(\mathcal{E})$  : fonctions continues à support compact.

A. Soit  $(P_t)_{t \geq 0}$  une famille d'applications linéaires de  $\mathcal{C}_K(\mathcal{E})$  dans  $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ , positives :

$$f \geq 0 \implies P_t f \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Extension : Si  $f \geq 0$  mesurable, on posera :

$$P_t f = \sup_{\substack{g \in \mathcal{C}_K^+(\mathcal{E}) \\ g \leq f}} P_t g.$$

Nous supposerons que la famille  $(P_t)_{t \geq 0}$  vérifie les propriétés suivantes :

(1)  $\forall f \in \mathcal{C}_K^+(\mathcal{E})$ , l'application  $(x, t) \rightsquigarrow P_t f(x)$  est continue sur  $\mathcal{E} \times \mathbb{R}^+$ .

(2)  $\forall f \in \mathcal{C}_K^+(\mathcal{E})$ ,  $\forall s, t \geq 0$ ,

$$P_s P_t f = P_{s+t} f \quad (\text{propriété de semi-groupe}).$$

(3)  $P_0 \equiv I$  et  $P_t f \rightarrow f$  uniformément sur tout compact, quand  $t \rightarrow 0$ .

(4)  $\forall f \in \mathcal{C}_K^+(\mathcal{E})$ , l'application  $x \rightsquigarrow \mathcal{U}f(x)$  :

$$\mathcal{U}f(x) = \int_0^\infty P_t f(x) dt$$

est continue.

Remarque. - Les opérateurs  $P_t$  peuvent être définis au moyen de noyaux, mais seules les propriétés formelles ci-dessus nous suffiront.

Fonctions excessives. - Nous dirons que  $f$  est excessive, si  $f$  est positive ou nulle, mesurable, si  $P_t f \leq f$ ,  $\forall t > 0$  et si  $P_t f \rightarrow f$  simplement quand  $t \rightarrow 0$ .

Nous n'étudierons pas ici les fonctions excessives (cf. [8]).

### B. Extension du semi-groupe aux mesures.

Si  $\mu \in \mathfrak{M}_K(\mathcal{E})$ ,  $\mu P_t$  sera définie par :

$$\forall f \in C_K(\mathcal{E}), \quad \langle \mu P_t, f \rangle = \langle \mu, P_t f \rangle.$$

Extension : Si  $\mu \geq 0$ , on peut définir  $\mu P_t$  par  $\mu P_t = \sup_K \mu_K P_t$ , où  $\mu_K$  est la restriction de  $\mu$  au compact  $K$ , si les  $\mu_K P_t$  sont uniformément majorés sur tout compact.

Si  $f \geq 0$  est mesurable, si  $\mu$  est positive ou nulle et si  $\mu P_t$  est définie, on a donc :

$$\langle \mu P_t, f \rangle = \langle \mu, P_t f \rangle \leq +\infty.$$

Propriété de semi-groupe pour les mesures positives. - Si  $\mu P_t$  et  $\mu P_{t+s}$  sont définies,  $\mu P_t P_s = \mu P_{t+s}$ .

Soit  $f \in C_K^+(\mathcal{E})$ .

$$\begin{aligned} \langle \mu P_t P_s, f \rangle &= \sup \langle (\mu P_t)_K P_s, f \rangle \\ &= \sup \langle (\mu P_t)_K, P_s f \rangle \\ &= \langle \mu P_t, P_s f \rangle \leq +\infty \\ &= \langle \mu, P_t P_s f \rangle \\ &= \langle \mu, P_{t+s} f \rangle \\ &= \langle \mu P_{t+s}, f \rangle. \end{aligned}$$

Cela se produira, par exemple, chaque fois que  $\mu \in \mathfrak{M}_K^+(\mathcal{E})$ .

### 3. Mesures excessives.

Soit  $\mu$  une mesure positive ; nous dirons que  $\mu$  est excessive, si  $\mu P_t \leq \mu$ ,  $\forall t > 0$ . D'après la propriété de semi-groupe,  $\mu P_t$  décroît quand  $t$  croît.

$\mu$  sera dite harmonique, si  $\mu P_t = \mu$ ,  $\forall t > 0$ .

THÉORÈME 2. - Les mesures excessives forment un cône convexe saillant vaguement fermé  $E$ , stable par l'opération

$$\mu, \nu \rightsquigarrow \inf(\mu, \nu) .$$

Démonstration.

a. Que  $E$  soit convexe saillant est bien évident. Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures de  $E$ , et

$$\alpha = \inf(\mu, \nu) .$$

$\alpha P_t$  existe, et on a

$$\alpha P_t \leq \mu P_t \leq \mu ,$$

$$\alpha P_t \leq \nu P_t \leq \nu ,$$

d'où  $\alpha P_t \leq \alpha$  et  $\alpha \in E$ .

b. Soit  $\mu_n$  une suite de mesures de  $E$ , convergeant vers  $\mu$ . Il faut montrer que  $\mu P_t$  existe et que  $\mu P_t \leq \mu$ .

Il faut donc étudier  $\sup_K \langle \mu_K P_t, f \rangle$  pour  $f \in C_K^+(\mathcal{E})$ .

$$\begin{aligned} \sup_K \langle \mu_K P_t, f \rangle &= \sup_K \langle \mu_K, P_t f \rangle \\ &= \sup_K \lim_n \langle \mu_{nK}, P_t f \rangle \\ &\leq \lim_n \sup_K \langle \mu_n K, P_t f \rangle \\ &= \lim_n \langle \mu_n, P_t f \rangle \\ &= \lim_n \langle \mu_n P_t, f \rangle \\ &\leq \lim_n \langle \mu_n, f \rangle \\ &= \langle \mu, f \rangle , \end{aligned}$$

Donc  $\mu P_t$  existe et  $\mu P_t \leq \mu$ .

C. Q. F. D.

Pour avoir l'unicité d'une représentation intégrale par les points extrémaux de  $E$ , il faut montrer que ce cône est réticulé pour son ordre propre. Cette démonstration, délicate, nécessite quelques préliminaires.

THÉORÈME 3. - Décomposition de Riesz.

Si  $\mu$  est une mesure excessive,  $\mu$  peut s'écrire de façon unique sous la forme

d'une somme d'une mesure  $\mu'$  excessive telle que  $\mu'P_t \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , et d'une mesure  $\mu''$  harmonique.

$\mu'$  est dite purement excessive.

Démonstration.

Unicité. - Nécessairement  $\mu'' = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu P_t$  et  $\mu' = \mu - \mu''$ .

Existence. -  $\mu P_t$  décroît quand  $t \rightarrow \infty$ , donc  $\mu'' = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu P_t$  existe, et

$$\mu'' P_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu P_{s+t} = \mu'' ,$$

donc  $\mu''$  est harmonique. Si on pose  $\mu' = \mu - \mu''$ ,

$$\mu' P_t = \mu P_t - \mu'' \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow \infty .$$

Enfin

$$\mu P_t = \mu'' + \mu' P_t \leq \mu'' + \mu'$$

donc  $\mu' P_t \leq \mu'$  :  $\mu'$  est excessive.

C. Q. F. D.

LEMME 1. - Si  $\mu$  et  $\nu$  sont excessives et si  $\mu - \nu$  est excessive, alors  $\mu' \geq \nu'$  et  $\mu'' \geq \nu''$ .

En effet

$$(\mu - \nu)'' = \mu'' - \nu'' \geq 0$$

$$(\mu - \nu)' = \mu' - \nu' \geq 0 .$$

LEMME 2. - Si  $\mu$  est purement excessive, et si

$$\nu \leq \mu , \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \nu P_t = 0$$

#### 4. Potentiels.

L'hypothèse (4) sur le semi-groupe  $(P_t)_{t \geq 0}$  va nous permettre de définir le potentiel  $\mu \mathcal{U}$  d'une mesure  $\mu$ .

DÉFINITION. - Si  $\mu \in \mathbb{F}_K(\mathcal{E})$ ,  $\mu \mathcal{U}$  sera définie par :

$$\forall f \in C_K(\mathcal{E}) : \quad \langle \mu \mathcal{U} , f \rangle = \langle \mu , \mathcal{U}f \rangle .$$

Nous avons pour l'opérateur  $\mathcal{U} = \int_0^\infty P_t dt$ , les mêmes extensions que pour les opérateurs  $P_t$ .

$\mu \mathcal{U}$  s'appelle le potentiel de  $\mu$ .

PROPOSITION 1. - Si  $\mu$  est positive, et si  $\mu^u$  existe, elle est excessive et  $\mu P_t \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  (les potentiels sont purement excessifs).

Formellement, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\mu^u P_t &= \mu \int_0^{+\infty} P_{s+t} ds \\ &= \mu \int_t^{+\infty} P_s ds \leq \mu^u\end{aligned}$$

et  $\mu \int_t^{+\infty} P_s ds \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow +\infty$ .

De façon précise, soit  $f \in C_K^+(\mathcal{E})$ ,

$$\begin{aligned}\langle \mu^u P_t, f \rangle &= \sup_K \langle \mu^u_K, P_t f \rangle \\ &= \sup_K \langle \mu^u, P_t f|_K \rangle \\ &= \sup_K \langle \mu, \int_0^{+\infty} P_s [P_t f|_K] ds \rangle \\ &= \langle \mu, \int_0^{+\infty} P_s P_t f ds \rangle \\ &= \langle \mu, \int_t^{+\infty} P_s f ds \rangle \\ &= \langle \int_t^{+\infty} \mu P_s ds, f \rangle \leq \langle \mu^u, f \rangle\end{aligned}$$

et de plus  $\langle \int_t^{+\infty} \mu P_s ds, f \rangle \rightarrow 0$ , quand  $t \rightarrow +\infty$ .

C. Q. F. D.

PROPOSITION 2. - Si  $\mu$  est excessive :  $\frac{1}{t} \int_0^t \mu P_s ds \rightarrow \mu$ , quand  $t \rightarrow 0$ .

Soit  $f \in C_K^+(\mathcal{E})$

$$\langle \mu, \frac{1}{t} \int_0^t P_s f ds \rangle \leq \langle \mu, f \rangle.$$

Soit  $\sup_K \langle \mu_K, \frac{1}{t} \int_0^t P_s f ds \rangle \leq \langle \mu, f \rangle$ .

$$\begin{aligned}\sup_K \lim_{t \rightarrow 0} \langle \mu_K, \frac{1}{t} \int_0^t P_s f ds \rangle &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \sup_K \langle \mu_K, \frac{1}{t} \int_0^t P_s f ds \rangle \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{t \rightarrow 0} \sup_K \langle \mu_K, \frac{1}{t} \int_0^t P_s f ds \rangle \leq \langle \mu, f \rangle,\end{aligned}$$

car le premier membre est  $\sup_K \langle \mu_K, f \rangle$ , grâce à l'hypothèse (3) sur les  $(P_t)_{t \geq 0}$ , c'est-à-dire  $\langle \mu, f \rangle$ . D'où le résultat annoncé.

LEMME 3. - Si  $\varphi$  est une fonction numérique continue positive décroissante,  
 $\frac{1}{t} \int_0^t \varphi(u) du$  est une fonction décroissante de  $t$ .

PROPOSITION 3. - Si  $\mu$  est purement excessive,  $\mu$  est une limite croissante de potentiels. Plus précisément si  $\mu_t$  est le potentiel de  $\frac{\mu - \mu P_t}{t}$ ,  $\mu = \lim_{t \rightarrow 0} \mu_t$ .

Soit donc  $\mu$  excessive telle que  $\mu P_t \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ .  $\int_0^A \mu P_s ds$  existe car elle est majorée par  $A\mu$ , puisque  $\mu P_s \leq \mu$

$$\begin{aligned} \frac{\mu - \mu P_t}{t} \int_0^A P_s ds &= \frac{1}{t} \int_0^A \mu P_s ds - \frac{1}{t} \int_t^{A+t} \mu P_s ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \mu P_s ds - \frac{1}{t} \int_A^{A+t} \mu P_s ds. \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{t} \int_A^{A+t} \mu P_s ds \leq \frac{A+t-A}{t} \mu P_A = \mu P_A \rightarrow 0 \text{ quand } A \rightarrow +\infty$$

et

$$\frac{1}{t} \int_0^t \mu P_s ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t \mu ds = \mu,$$

donc

$$\frac{\mu - \mu P_t}{t} \int_0^A P_s ds \rightarrow \frac{1}{t} \int_0^t \mu P_s ds \leq \mu \text{ quand } A \rightarrow +\infty.$$

Donc  $\mu_t = \frac{\mu - \mu P_t}{t} \mathbb{1}$  existe, vaut  $\frac{1}{t} \int_0^t \mu P_s ds$  et  $\mu_t \leq \mu$ .

Si  $f \in C_K^+(\mathcal{E})$ ,  $\langle \mu_t, f \rangle = \langle \mu, \frac{1}{t} \int_0^t P_s f ds \rangle$  est une fonction décroissante de  $t$ , d'après le lemme 3.

Donc, d'après la proposition 2,  $\mu_t \nearrow \mu$ , quand  $t \searrow 0$ .

C. Q. F. D.

PROPOSITION 4. - Si  $\mu \mathbb{1}$  existe,

$$\frac{\mu \mathbb{1} - \mu \mathbb{1} P_t}{t} \rightarrow \mu \text{ quand } t \rightarrow 0.$$

Nous ne le démontrerons que pour  $\mu$  à support compact (si  $\mu$  est purement excessive, c'est la proposition 3), renvoyant aux travaux de J. DENY pour le cas général (Cf. [9]).

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\mu \mathbb{1} - \mu \mathbb{1} P_t}{t}, f \right\rangle &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left\langle \frac{\mu - \mu P_t}{t} \int_0^A P_s ds, f \right\rangle \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[ \left\langle \frac{1}{t} \int_0^t \mu P_s ds, f \right\rangle - \left\langle \frac{1}{t} \int_A^{A+t} \mu P_s ds, f \right\rangle \right]. \end{aligned}$$



D'après l'existence de  $\mu u$ ,  $\frac{1}{t} \int_A^{A+t} \mu P_s ds \rightarrow 0$  quand  $A \rightarrow +\infty$ . Donc

$$\left\langle \frac{\mu u - \mu u P_t}{t}, f \right\rangle = \left\langle \mu, \frac{1}{t} \int_0^t P_s f ds \right\rangle.$$

Si  $\mu$  est à support compact, le résultat provient de l'hypothèse (3) sur le semi-groupe  $(P_t)_{t \geq 0}$ .

Si  $\mu$  est excessive, la proposition 2 donne le même résultat.

PROPOSITION 5. - Principe d'unicité des masses.

Si  $\mu u = \nu u$ , alors  $\mu = \nu$ .

$$\frac{\mu u - \mu u P_t}{t} = \frac{\nu u - \nu u P_t}{t}$$

si  $t \rightarrow 0$ , le premier membre tend vers  $\mu$ , le second vers  $\nu$ . Donc  $\mu = \nu$ .

C. Q. F. D.

COROLLAIRE. - L'application  $\mu \rightsquigarrow \mu u$  est bijective, et le cône  $U$  des potentiels est un sous-cône de  $E$  réticulé pour son ordre propre.

$$\inf(\mu u, \nu u) = \inf(\mu, \nu) \cdot u.$$

Si  $V$  est le cône des mesures qui ont un potentiel, et si  $U$  est le cône des potentiels,  $\mu \rightsquigarrow \mu u$  est une bijection de  $V$  sur  $U$ . L'ordre  $\leq$  sur  $V$  se transporte en l'ordre propre  $\ll$  de  $U$  qui coïncide avec l'ordre  $<$  induit sur  $U$  par l'ordre propre  $<$  de  $E$ .

### 5. Représentation intégrale des mesures excessives.

Nous noterons  $<$  l'ordre propre de  $E$ , et  $\mu \vee \nu$  l'enveloppe inférieure, si elle existe, de 2 mesures de  $E$  pour son ordre propre.

THÉORÈME 4. - Le cône  $E$  est réticulé pour son ordre propre, ainsi que  $H$ , cône des mesures harmoniques. Si  $\alpha = \alpha' + \alpha''$ ,  $\beta = \beta' + \beta''$ ,  $\gamma = \alpha \vee \beta = \gamma' + \gamma''$  avec

$$\begin{aligned} \gamma' &= \inf(\alpha', \beta') \text{ purement excessive,} \\ \gamma'' &= \lim_{t \rightarrow \infty} [\inf(\alpha'', \beta'')] P_t \text{ harmonique.} \end{aligned}$$

a.  $\lambda = \inf(\alpha', \beta')$  est excessive, et  $\lambda P_t \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$ , donc  $\lambda$  est purement excessive.

b. Si  $\gamma = \alpha \vee \beta = \gamma' + \gamma''$  existe, on a nécessairement  $\gamma'' \leq \lambda$  (lemme 1). Posons  $\delta = \inf(\alpha'', \beta'')$ , excessive (théorème 2).  $\gamma'' \leq \delta$  est alors nécessaire (lemme 1). Donc

$$\gamma'' P_t = \gamma'' \leq \delta P_t .$$

Si  $t \rightarrow \infty$ , on obtient la relation nécessaire  $\gamma'' \leq \delta''$ . Posons  $\mu = \lambda + \delta''$ ;  $\mu$  est excessive.

Nous allons montrer que  $\mu$  est effectivement  $\alpha \vee \beta$ .

c. Si  $\nu < \alpha$  et  $\nu < \beta$ , il faut d'abord montrer que  $\nu < \lambda + \delta''$ .

Si  $\alpha - \nu$  et  $\beta - \nu$  sont excessives,  $\alpha' - \nu'$  et  $\beta' - \nu'$  sont excessives. Donc  $\inf(\alpha' - \nu', \beta' - \nu') = \lambda - \nu'$  est excessive.

D'autre part,  $\nu'' \leq \alpha''$  et  $\beta''$  (lemme 1), donc

$$\nu'' \leq \inf(\alpha'', \beta'') = \delta ,$$

donc

$$\nu'' P_t = \nu'' \leq \delta P_t ,$$

et, en faisant  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$\nu'' \leq \delta'' .$$

Donc  $\delta'' - \nu''$  est harmonique  $\geq 0$ .  $\lambda + \delta'' - \nu = \lambda - \nu' + \delta'' - \nu''$  est excessive. Donc

$$\nu < \lambda + \delta'' .$$

d. Reste à montrer que  $\alpha - \mu$  et  $\beta - \mu$  sont excessives.

$$\alpha - \mu = \alpha'' - \delta'' + \alpha' - \inf(\alpha', \beta')$$

$\alpha'' - \delta''$  est harmonique  $\geq 0$ .

Si nous avons démontré le

LEMME 4. - Si  $\alpha'$  et  $\beta'$  sont purement excessives,  $\alpha' \vee \beta'$  existe, et c'est  $\inf(\alpha', \beta')$ .

alors  $\alpha' - \inf(\alpha', \beta')$  sera excessive et  $\alpha - \mu$  sera bien excessive.

Démonstration du lemme 4.

$\alpha'_t = \frac{\alpha' - \alpha' P_t}{t} u \nearrow \alpha$  quand  $t \searrow 0$  (proposition 3).  $\alpha'_t = \alpha' K_t$  où  $K_t = \frac{I - P_t}{t} u$  est un opérateur  $\geq 0$  sur les mesures excessives. Il en résulte que, si  $\gamma = \inf(\alpha', \beta')$ , on a

$$\gamma_t = \inf(\alpha'_t, \beta'_t) .$$

Soit  $\nu < \alpha'$  et  $\beta'$ .

$$\nu_t < \alpha'_t \text{ et } \beta'_t \Rightarrow \nu_t < \gamma_t \nearrow \gamma$$

$$\nu_t < \gamma ;$$

or  $\nu_t \nearrow \nu$ , donc

$\nu < \gamma$

$\gamma_t < \alpha'_t \nearrow \alpha'$  et  $\gamma_t < \beta'_t \nearrow \beta'$ , donc  $\gamma_t < \alpha'$  et  $\beta'$ , or  $\gamma_t \nearrow \gamma$ , donc  
 $\gamma < \alpha'$  et  $\beta'$ .

C. Q. F. D.

e. Enfin si  $\alpha$  et  $\beta$  sont harmoniques,  $\alpha' = \beta' = 0$ .

$$\alpha \vee \beta = \lim_{t \rightarrow 0} [\inf(\alpha, \beta)]_{P_t}$$

est harmonique. Comme l'ordre induit sur  $H$ , par l'ordre propre de  $E$ , est l'ordre propre de  $H$ ,  $H$  est réticulé pour son ordre propre.

C. Q. F. D.

On peut donc énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 5. - Toute mesure excessive est résultante d'une mesure conique maximale unique, localisable en une mesure de Radon sur un chapeau, portée par les points extrémaux du cône  $E$ .

On a assez peu de résultats, dans le cas général, sur la nature de ces points extrémaux. Il en existe a priori de trois sortes : mesures harmoniques, potentiels, et mesures purement excessives, mais non potentiels (c'est d'ailleurs l'existence de ces mesures qui rend si délicate la démonstration du théorème 4, beaucoup plus simple dans [7] par exemple).

Il semble qu'on ait plus de renseignements dans le cas où le semi-groupe  $(P_t)$  est markovien, en utilisant les processus de Markov.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BONY (Jean-Michel). - Représentation intégrale des cônes convexes faiblement complets, Séminaire Choquet : Initiation à l'Analyse, t. 3, 1963/64, n° 5, 7 p.
- [2] CHOQUET (Gustave). - Mesures coniques maximales sur les cônes convexes faiblement complets, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 6, 1961/62, n° 12, 15 p.
- [3] CHOQUET (Gustave). - Ensembles et cônes convexes faiblement complets, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 254, 1962, p. 2123-2125.
- [4] CHOQUET (Gustave). - Axiomatique des mesures maximales. Applications aux cônes convexes faiblement complets, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 37-39.

- [5] CHOQUET (Gustave). - Etude des mesures coniques, cônes convexes saillants faiblement complets sans génératrices extrémales, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 255, 1962, p. 445-447.
- [6] DENY (Jacques). - Les noyaux élémentaires, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 4, 1959/60, n° 4, 12 p.
- [7] DENY (Jacques). - Sur l'équation de convolution  $\mu = \mu * \sigma$ , Séminaire Brelot-Choquet-Deny, t. 4, 1959/60, n° 5, 11 p.
- [8] DENY (Jacques). - Eléments de théorie du potentiel par rapport à un noyau de Hunt, Séminaire Brelot-Choquet-Deny : Théorie du Potentiel, t. 5, 1960/61, n° 8, 8 p.
- [9] DENY (Jacques). - Noyaux de convolution de Hunt et noyaux associés à une famille fondamentale, Annales Inst. Fourier, Grenoble, t. 12, 1962, p. 643-667.
-