

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

GABRIEL MOKOBODZKI

Sélections continues

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 2 (1963), exp. n° 1, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SC_1963__2__A1_0>

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1963, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SÉLECTIONS CONTINUES

par Gabriel MOKOBODZKI

[d'après Ernest MICHAEL (*)]

1. Position du problème.

Soient X et Y deux espaces topologiques séparés, $\Phi : X \rightarrow Y$ une application multivoque de X dans Y (pour tout $x \in X$, $\Phi(x)$ est un sous-ensemble non vide de Y). Quelles conditions doit vérifier le triplet (X, Φ, Y) pour qu'il existe une famille d'applications continues f ayant les propriétés suivantes ?

(a) $f : X \rightarrow Y$ et $f(x) \in \Phi(x)$ pour tout $x \in X$.

(b) Pour tous $x_0 \in X$, $y_0 \in \Phi(x_0)$, il existe un voisinage U de x_0 tel que f est définie sur U , continue,

$$f : U \rightarrow Y, \quad f(x) \in \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in U$$

et

$$f(x_0) = y_0.$$

(c) Si A est fermé dans X et si g est une application continue de A dans Y telle que $g(x) \in \Phi(x)$ pour tout $x \in A$, alors il existe f définie sur X (ou dans un voisinage de A) et

$$f : X \rightarrow Y, \quad f(x) \in \Phi(x) \quad \text{pour tout } x \in X$$

et

$$f(x) = g(x) \quad \text{pour tout } x \in A.$$

On appellera sélection continue de Φ , une application continue f définie sur un sous-ensemble X' de X , à valeurs dans Y , et telle que, pour tout $x \in X'$,

$$f(x) \in \Phi(x).$$

On a ainsi une formulation générale pour les problèmes de sections continues d'une application, d'extensions d'applications continues, etc., qui semble particulièrement bien adaptée.

(*) L'exposé qui suit est seulement une introduction aux travaux de MICHAEL sur les sélections continues et sur la caractérisation des espaces paracompacts : MICHAEL (Ernest). - Continuous selections, I., Annals of Math., t. 63, 1956, p. 361-382.

Une classe importante d'applications multivoques intervient dans les problèmes de sélections continues : ce sont les applications multivoques semi-continues inférieurement dont on rappelle la définition :

DÉFINITION. - Une application multivoque Φ de X dans Y sera dite semi-continue inférieurement (en abrégé s. c. i.) si, pour tout $x \in X$ et tout ω ouvert de Y tel que $\Phi(x) \cap \omega \neq \emptyset$, il existe un voisinage V de x tel que

$$(x' \in V) \implies (\Phi(x') \cap \omega \neq \emptyset) .$$

2. Exemples de telles applications.

1° Soit f une application continue de Y sur X ; alors $x \mapsto f^{-1}(x)$ est s. c. i. si et seulement si f est ouverte.

2° Soit $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'applications continues de X dans Y ; alors Φ , définie sur X par

$$\Phi(x) = \bigcup_{\alpha \in A} \{\varphi_\alpha(x)\} \quad \forall x \in X ,$$

est s. c. i.

3° Une fonction univoque est s. c. i. si et seulement si elle est continue au sens ordinaire.

4° Soit f une fonction numérique sur X , s. c. i. au sens ordinaire ; alors $x \mapsto]x, f(x)]$ définit une application multivoque s. c. i.

3. Quelques propriétés des applications multivoques s. c. i.

Soient X et Y des espaces topologiques.

1° Si $(\Phi_i)_{i \in I}$ est une famille d'applications s. c. i. de X dans Y , alors $\Phi = \bigcup_{i \in I} \Phi_i$ est s. c. i.

2° Si $\Phi : X \rightarrow Y$ est s. c. i., $\bar{\Phi}$, définie pour tout $x \in X$ par $\bar{\Phi}(x) = \overline{\Phi(x)}$, est encore s. c. i.

3° Soient Z un espace topologique, Φ et Ψ des applications s. c. i. de X dans Y et de Y dans Z respectivement. Alors $\Psi \circ \Phi : X \rightarrow Z$, définie pour tout $x \in X$ par

$$(\Psi \circ \Phi)(x) = \bigcup_{y \in \Phi(x)} \Psi(y) ,$$

est encore s. c. i. En particulier, si Y s'identifie à un sous-espace de Z et si Ψ est l'injection canonique de Y dans Z , Φ peut être considérée comme application s. c. i. de X dans Z .

4° On dira que $\Psi : Y \rightarrow Z$ est de graphe ouvert, si le graphe de Ψ dans $Y \times Z$ est ouvert dans $Y \times Z$, et Ψ est alors s. c. i. Si en outre $\Phi : X \rightarrow Y$ est s. c. i., alors

$$\Psi \circ \Phi : X \rightarrow Z$$

est de graphe ouvert.

5° Soient Φ, Ψ , des applications s. c. i. de X dans Y . Si Ψ est de graphe ouvert et si $\Phi \cap \Psi$ est une application multivoque (c'est-à-dire $\Phi(x) \cap \Psi(x) \neq \emptyset \forall x \in X$), alors

$$x \mapsto \Phi(x) \cap \Psi(x)$$

est s. c. i.

Applications. - Soient $(Y, \mathcal{U})$ un espace uniforme, X un espace topologique, Φ une application s. c. i. de X dans Y . Si V est un entourage ouvert de $\mathcal{U}$, alors

$$V\Phi : x \mapsto V(\Phi(x))$$

est s. c. i. de graphe ouvert. Cela résulte du fait que l'application $y \mapsto V(y)$ est s. c. i. de graphe ouvert.

Réciproquement, si pour tout entourage ouvert V de $\mathcal{U}$, $V\Phi$ est s. c. i., alors Φ est s. c. i.

Voici un lemme utile dans les problèmes de sélections :

LEMME 1. - Soit $(Y, \mathcal{U})$ un espace uniforme séparé, et soit F un sous-espace non vide de Y , complet, donc fermé dans Y . On considère le filtre $\mathfrak{F}$ qui a pour base les ensembles $V(F)$ où V parcourt $\mathcal{U}$.

Tout filtre de Cauchy $\mathfrak{S}$ sur Y , plus fin que $\mathfrak{F}$, converge vers un point de F .

Démonstration. - Soit $\mathfrak{S}_0$ le filtre de Cauchy minimal associé à $\mathfrak{S}$. Alors $\mathfrak{S}_0$ admet une trace sur F , d'où le résultat.

4. Deux techniques pour obtenir des sélections continues.

A. - Soient X un espace topologique, (Y, d) un espace métrique, Φ une

application multivoque de X dans Y telle que $\forall x \in X$, $\Phi(x)$ est complet dans Y .

On pose $V_n = d^{-1}([0, \frac{1}{n}[)$; V_n est un entourage ouvert de (Y, d) .

PROPOSITION 1. - Soit f_n une suite d'applications continues de X dans Y telle que

- 1° f_n est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme ;
- 2° Pour tout n , f_n est une sélection continue de $V_n \Phi$.

Dans ces conditions, la suite f_n converge uniformément vers une application continue f de X dans Y , et f est une sélection continue de Φ .

Démonstration. - A l'aide du lemme précédent, on montre que la suite f_n converge simplement vers une fonction f , et celle-ci est limite uniforme de la suite f_n .

B. - Soient toujours X un espace topologique et (Y, d) un espace métrique.

DÉFINITION. - On dira que $f : X \rightarrow Y$ est ε -continue si, pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ω de x tel que

$$(x' \in \omega) \implies d(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

LEMME 2. - Soit f_n une suite d'applications de X dans Y telle que :

- 1° f_n est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme ;
- 2° Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\varepsilon > 0$, il existe $n' \geq n$ tel que $f_{n'}$ soit ε -continue.

Si la suite f_n converge simplement vers une fonction f , alors f est continue.

Soit maintenant Φ une application multivoque de X dans Y telle que, pour tout $x \in X$, $\Phi(x)$ soit complet. On peut alors améliorer la proposition précédente :

PROPOSITION 2. - Soit f_n une suite d'applications de X dans Y telle que :

- 1° f_n est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme ;
- 2° Pour tout n , f_n est une sélection de $V_n \Phi$, et f_n est ε_n -continue ($\varepsilon_n \downarrow 0$).

Dans ces conditions, la suite f_n converge uniformément vers une sélection continue f de Φ .

Revenons au problème des sélections continues. Le lemme suivant montre la nécessité d'utiliser des applications multivoques s. c. i.

LEMME 3. - Soient X et Y deux espaces topologiques, Φ une application multivoque de X dans Y . Si, pour tout $x_0 \in X$, et $y_0 \in \Phi(y_0)$, il existe un voisinage U de x_0 et une sélection continue f de Φ , définie dans U , et telle que $f(x_0) = y_0$, alors Φ est s. c. i.

5. Caractérisation des espaces paracompacts.

Soit X un espace topologique dont tout point est fermé.

PROPOSITION 3. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) X est paracompact.
- (2) Pour tout espace de Banach Y et toute application s. c. i. Φ de X dans Y , telle que $\Phi(x)$ soit convexe fermé pour tout $x \in X$, il existe une sélection continue f de Φ définie sur X tout entier ; pour tout $x \in X$, $\{x\}$ est fermé.

La démonstration de (1) $\Rightarrow$ (2) repose sur le lemme suivant.

LEMME 4. - Soit V un voisinage ouvert symétrique convexe de 0 dans Y . Il existe une sélection continue de $\Phi + V$.

Pour tout $y \in Y$, soit U_y l'ouvert

$$U_y = \{x ; x \in X, \Phi(x) \cap (y + V) \neq \emptyset\} ;$$

les ouverts U_y forment un recouvrement de X , et il existe une partition de l'unité $(p_i)_{i \in I}$ qui lui est subordonnée, les supports des p_i formant une famille localement finie. Pour chaque $i \in I$, soit y_i tel que le support de p_i soit contenu dans U_{y_i} . On pose

$$f = \sum p_i(x) \cdot y_i ;$$

- a. f est continue, car les supports des p_i forment une famille localement finie,
- b. $f(x) \in \Phi(x) + V$, pour tout $x \in X$.

$$f(x) = \sum_{x \in U_{y_i}} p_i(x) \cdot y_i ,$$

puisque $S_{p_i} \subset U_{y_i}$; d'autre part,

$$(x \in U_{y_i}) \iff \Phi(x) \cap (y_i + V) \neq \emptyset ,$$

ou encore

$$(x \in U_{y_i}) \iff y_i \in \Phi(x) + V .$$

Enfin :

$$\sum p_i(x) = 1 \quad \text{et} \quad \sum p_i(x) \cdot y_i \in \Phi(x) + V ,$$

puisque les p_i sont ≥ 0 et $\Phi(x) + V$ convexe.

Ce lemme étant démontré, soit V_1 la boule unité (ouverte) de Y . On définit V_n par récurrence en posant $V_{n+1} = \frac{1}{2^n} V_n$. On construit une suite f_n qui satisfait aux conditions suivantes :

- (1) $f_n : X \rightarrow Y$;
- (2) $f_n(x) \in (f_{n-1}(x) + 2V_{n-1}) \quad \forall x \in X$;
- (3) $f_n(x) \in (\Phi(x) + V_n) \quad \forall x \in X$.

Une telle construction est possible ; supposons que l'on ait déjà défini des f_n satisfaisant à ces conditions pour $n \leq k$; posons

$$\Phi_{k+1} = \Phi \cap (f_k + V_k) .$$

Par hypothèse, $\Phi_{k+1}(x) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$, et Φ_{k+1} est s. c. i. ; il existe alors une sélection continue f_{k+1} de $(\Phi_{k+1} + V_{k+1})$, et l'on a, pour tout $x \in X$,

$$f_{k+1}(x) \in (f_k(x) + V_k + V_{k+1}) \subset f_k(x) + 2V_k ,$$

$$f_{k+1}(x) \in (\Phi_{k+1}(x) + V_{k+1}) \subset \Phi(x) + V_{k+1} .$$

Enfin on remarque que

$$\sum_{p=n}^{+\infty} V_p \subset 2V_n ,$$

et que la suite f_n est une suite de Cauchy pour la convergence uniforme ; la fonction $f = \lim f_n$ est alors une sélection continue de Φ .

Démonstration de (2) $\Rightarrow$ (1). - Nous admettrons l'équivalence des propriétés 1 et 1' pour un espace topologique.

1. X est paracompact ;

1'. Tout point de X est fermé, et pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U}$ de X , il existe une partition continue de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$, c'est-à-

dire une famille de fonctions numériques continues ≥ 0 , $(p_U)_{U \in \mathcal{U}}$, telle que $\forall U \in \mathcal{U}$ et $x \notin U$, $p_U(x) = 0$ et, pour tout $x \in X$, $\sum_{U \in \mathcal{U}} p_U(x) = 1$.

Nous nous ramènerons à démontrer que (2) $\Rightarrow$ 1'. Soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X , et soit $(p_U)_{U \in \mathcal{U}}$ une partition continue de l'unité subordonnée à $\mathcal{U}$ (si elle existe). Pour chaque $x \in X$, la famille de nombres réels $(p_U(x))_{U \in \mathcal{U}}$ peut être considérée comme un élément de $\ell^1(\mathcal{U})$, c'est-à-dire comme une application de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant à la condition

$$\|y\| = \sum_{U \in \mathcal{U}} |y(U)| = \sum_{U \in \mathcal{U}} p_U(x) < +\infty;$$

globalement, nous pouvons considérer la famille (p_U) comme une application f de X dans $\ell^1(\mathcal{U})$. Traduisons dans ce langage les conditions imposées à la famille $(p_U)_{U \in \mathcal{U}}$:

1° f doit être continue lorsqu'on munit $\ell^1(\mathcal{U})$ de la topologie définie par la norme usuelle : si $y \in \ell^1(\mathcal{U})$,

$$\|y\| = \sum_{U \in \mathcal{U}} |y(U)|.$$

2° Pour tout $x \in X$, soit $\Phi(x) \subset \ell^1_+(\mathcal{U})$ défini par

$$(y \in \Phi(x)) \iff (y(U) = 0 \text{ pour tout } U \not\ni x)$$

et

$$\sum y(U) = 1.$$

Pour tout $x \in X$, on doit avoir $f(x) \in \Phi(x)$. Il est clair que $\Phi(x) \neq \emptyset$ $\forall x \in X$, et que $\Phi(x)$ est un ensemble convexe fermé, donc complet, puisque $\ell^1(\mathcal{U})$ est un espace de Banach.

On est ainsi ramené à trouver une sélection continue de l'application multivoque Φ , ce qu'on pourra faire grâce au lemme suivant :

LEMME 5. - L'application multivoque Φ de X dans $\ell^1_+(\mathcal{U})$, définie précédemment, est semi-continue inférieurement.

Démonstration. - Soit E le sous-espace vectoriel de $\ell^1(\mathcal{U})$ formé des $y \in \ell^1(\mathcal{U})$ tels que $y(U) = 0$, sauf pour un nombre fini d'ouverts $U \in \mathcal{U}$. Pour tout $x \in X$, posons

$$\Phi_1(x) = \{y ; y \in E, y \geq 0, y(U) = 0, \forall U \not\ni x ; \sum_U y(U) = 1\}.$$

Lorsqu'on munit E de la topologie induite par celle de $\ell^1(u)$, on voit facilement que Φ_1 , considérée comme application multivoque de X dans E est s. c. i., et comme pour tout $x \in X$

$$\Phi(x) = \overline{\Phi_1(x)} \quad (\text{adhérence dans } \ell^1(u)),$$

il en résulte que Φ elle-même est s. c. i., ce qui termine la démonstration.
