

SÉMINAIRE CHOQUET. INITIATION À L'ANALYSE

GEORGES ZELLER-MEIER

Frontière minimale pour des algèbres de fonctions

Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse, tome 1 (1962), exp. n° 3, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SC_1962__1__A3_0

© Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse
(Secrétariat mathématique, Paris), 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Choquet. Initiation à l'analyse » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

FRONTIÈRE MINIMALE POUR DES ALGÈBRES DE FONCTIONS

par Georges ZELLER-MRIER

[d'après un article de Errett BISHOP ⁽¹⁾]

Soient C un compact et f une fonction continue à valeurs complexes sur C .
On posera

$$S(f) = \{x \mid x \in C, |f(x)| = \|f\|\} \quad S(f) \text{ est fermé}.$$

Si A est un ensemble de fonctions continues à valeurs complexes sur C , $M \subset C$ sera dit frontière pour A , si

$$M \cap S(f) \neq \emptyset, \quad \forall f \in A.$$

Une frontière pour A sera dite minimale si elle est contenue dans toute frontière pour A . Il résulte de la définition que si elle existe, elle est unique.

THÉOREME 1. - Si A est une algèbre séparante de Banach de fonctions continues à valeurs complexes sur C , compact métrisable, il existe une frontière minimale pour A :

$$M_0 = \{x \mid x \in C, \exists f \in A, S(f) = \{x\}\}.$$

a. Toute frontière pour A contient nécessairement M_0 . Il suffit donc de montrer que M_0 est une frontière.

b. Montrons donc que $M_0 \cap S(f) \neq \emptyset, \forall f \in A$.

Considérons

$$\Gamma = \{\gamma \mid \gamma \subset C, \exists f_\gamma \in A, S(f_\gamma) = \gamma\};$$

c'est un ensemble de fermés de C .

Soit $f \in A$, considérons les sous-ensembles Γ' de Γ tels que

1° $S(f) \in \Gamma'$

2° Toute $\cap$ d'un nombre fini de $\gamma \in \Gamma'$ est non vide.

(1) BISHOP (Errett). - A minimal boundary for function algebras, Pacific J. of Math., t. 9, 1959, p. 629-642.

Les Γ' étant ordonnés par inclusion, ils forment un ensemble ordonné inductif.

D'après le lemme de Zorn, $\exists \Gamma_0$ maximal, tel que

1° $S(f) \in \Gamma_0$.

2° Toute intersection d'un nombre fini de $\gamma \in \Gamma_0$ est non vide.

C compact $\Rightarrow D = \bigcap_{\gamma \in \Gamma_0} \gamma \neq \emptyset$ et D compact.

C compact métrisable $\Rightarrow \exists$ une suite $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ $\gamma_n \in \Gamma_0$ tel que $D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n$.

Soit $x_0 \in D$. Posons

$$f_n = \frac{f\gamma_n}{f\gamma_n(x_0)} ;$$

on a $f_n \in A$, et comme $x_0 \in S(f\gamma_n)$,

$$S(f_n) = \gamma_n \quad f_n(x_0) = \|f_n\| = 1 ;$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n}$ converge uniformément sur C vers $g \in A$, et on a

$$\|g\| = g(x_0) = 1 .$$

$\forall K \in \mathbb{N}$, $\forall x \notin \gamma_K$, on a

$$|g(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{f_n(x)}{2^n} \right| < 1$$

car

$$\forall x, |f_n(x)| \leq 1 \text{ et } x \notin \gamma_K \Rightarrow |f_K(x)| < 1 .$$

Donc

$$S(g) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n = D .$$

Montrons que

$$S(g) = \{x_0\} \Rightarrow x_0 \in M_0$$

et comme $x_0 \in D \subset S(f)$

$$M_0 \cap S(f) \neq \emptyset$$

C. Q. F. D.

Raisonnons par l'absurde : supposons que $S(g)$ ait plus d'un point.

A séparante $\Rightarrow \exists h_1 \in A$, h_1 non constante sur $S(g)$, on peut supposer $|h_1| \leq 1$ sur $S(g)$ et $h_1 = 1$ en un point; $h = h_1 + h_1^2$, $h \in A$ et $|h(x)| \leq 2$, $\forall x \in S(g)$ avec $|h(x)| = 2 \Leftrightarrow h_1(x) = 1$.

Donc $\exists h \in A$, $|h|$ non constant sur $S(g)$.

Considérons

$$E = \{x \mid x \in S(g), |h(x)| = 2\}$$

E est fermé $\subset S(g)$ et $S(g) - E$ est non vide. Soit $x_1 \in E$. Posons

$$g_0 = \frac{g}{g(x_1)}, \quad h_0 = \frac{h}{h(x_1)}, \quad g_0, h_0 \in A$$

et

$$\|g_0\| = g_0(x_1) = 1 \quad S(g_0) = S(g)$$

$$h_0(x_1) = 1 \quad |h_0(x)| \leq 1, \quad \forall x \in S(g), \quad |h_0(x)| < 1, \quad \forall x \in S(g) - E.$$

Posons

$$K = \|h_0\| \geq 1 \quad \text{et} \quad V_n = \{x \mid 1 + 2^{-n}(K-1) \leq |h_0(x)| \leq 1 + 2^{-n+1}(K-1)\}$$

$$x \in V_n \Rightarrow |h_0(x)| > 1 \Rightarrow V_n \cap S(g) = \emptyset.$$

Donc $\forall x \in V_n$, $|g_0(x)| < 1$ et comme V_n est compact $\exists p_n \in \mathbb{N}$ tel que

$$|g_0(x)|^{p_n} \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in V_n.$$

Considérons maintenant

$$k = h_0 + 4(K-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_0^{p_n}}{2^n} \quad k \in A \quad \text{et} \quad k(x_1) = 1 + 4(K-1).$$

On a

$$\forall x \in S(g) - E \quad |h_0(x)| < 1, \quad |g_0(x)| = 1 \implies |k(x)| < 1 + 4(K-1)$$

$$\forall x \in C - \bigcup_n V_n \quad |g_0(x)| \leq 1, \quad |h_0(x)| \leq 1 \implies |k(x)| \leq 1 + 4(K-1)$$

$$\forall K \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in V_K \quad |h_0(x)| \leq 1 + 2^{-K+1}(K-1) \quad \text{et} \quad |g_0(x)|^{p_K} \leq \frac{1}{2}$$

$$\implies |k(x)| \leq 1 + 4(K-1) \quad .$$

On a donc

$$k(x_1) = \|k\| \quad ,$$

donc

$$x_1 \in S(k) \cap D \neq \emptyset \quad \text{et} \quad S(k) \cap (S(g) - E) = \emptyset \quad .$$

Or $S(k) \cap D \neq \emptyset \implies k \in \Gamma_0$ d'après l'hypothèse d'intersections finies. D'où

$$(S(g) - E) \subset S(g) \subset D \subset S(k)$$

ce qui est contradictoire avec $S(k) \cap (S(g) - E) = \emptyset$.

THÉORÈME 2. - Avec les mêmes hypothèses que pour le théorème 1 et

$$U_n = \{x \mid x \in C, \exists f \in A, \|f\| = 1, |f(x)| > \frac{3}{4}, |f(y)| < \frac{1}{4},$$

$$\forall y \in D_n(x)\} \quad ,$$

où $D_n(x) = \{y \mid y \in C, d(x, y) \geq \frac{1}{n}\}$.

U_n est ouvert et $M_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. La frontière minimale est donc un G_δ .

a. $f \in A$. Posons

$$\sigma_n(f) = \{x \mid x \in C, |f(x)| > \frac{3}{4}, |f(y)| < \frac{1}{4}, \forall y \in D_n(x)\} \quad .$$

Si $x_0 \in \sigma_n(f)$, il ne peut exister une suite de points $y_1, y_2, \dots, y_p, \dots$ tels que

$$d(x_0, y_p) < \frac{1}{n}, \quad \forall p$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} d(x_0, y_p) = \frac{1}{n}$$

$$|f(y_p)| \geq \frac{1}{4}, \quad \forall p,$$

car la boule : $\{y \mid y \in C, d(x_0, y) \leq \frac{1}{n}\}$ étant compacte, la suite $\{y_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ aurait une valeur d'adhérence y_0 pour laquelle $d(x_0, y_0) = \frac{1}{n} \Rightarrow y_0 \in D_n(x)$ et $|f(y_0)| \geq \frac{1}{4}$ ce qui est contradictoire avec $x_0 \in \sigma_n(f)$.

Donc $\exists D > 0$ tel que $|f(y)| < \frac{1}{4}, \quad \forall y$, tel que $d(x, y) \geq \frac{1}{n} - D$

$\Rightarrow$ la boule ouverte $\{x \mid x \in C, d(x_0, x) < D\} \subset \sigma_n(f)$.

Donc $\sigma_n(f)$ est ouvert et, comme $U_n = \bigcup_{\substack{f \in A \\ \|f\|=1}} \sigma_n(f)$, U_n est ouvert.

b. $M_0 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$, car si $x \in M_0$, $\exists f \in A$, $S(f) = \{x\}$, et on peut supposer $\|f\| = |f(x)| = 1$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n(x)$ est compact et comme $|f| < 1$ sur $D_n(x)$, $\exists p_n \in \mathbb{N}$, $\forall y \in D_n(x)$, $|f(y)|^{p_n} < \frac{1}{4}$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$x \in \sigma_n(f^{p_n}) \Rightarrow x \in U_n, \quad \forall n.$$

C. Q. F. D.

c. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \subset M_0$.

Soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, nous allons construire par récurrence une suite $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $g_n \in A$ avec les 4 propriétés

$$(1) \quad \|g_{n+1} - g_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$(2) \quad \|g_n\| \leq 3(1 - \frac{1}{2^{n+1}})$$

$$(3) \quad g_n(x) = 3(1 - \frac{1}{2^n})$$

$$(4) \quad |g_{n+1}(y) - g_n(y)| < \frac{1}{2^{n+1}}, \quad \forall y \in D_n(x).$$

En effet

$$x \in U_1 \implies \exists f \in A, \|f\| = 1, x \in \sigma_1(f) ;$$

prenons $g_1 = \frac{3}{2} \frac{f}{f(x)}$

$$|f(x)| > \frac{3}{4} \implies \|g_1\| \leq \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} < 3(1 - \frac{1}{2^2}) \text{ et } g_1(x) = 3(1 - \frac{1}{2}) .$$

Supposons g_K définie : $g_K(x) = 3(1 - 2^{-K})$.

$$g_K \text{ est continue } \implies \exists j > K, j \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall y \in C - D_j$$

$$|g_K(y)| < 3(1 - \frac{1}{2^K}) + \frac{1}{2^{K+2}}$$

$$x \in U_j \implies \exists f \in A, \|f\| = 1, |f(x)| > \frac{3}{4} \text{ et } |f(y)| < \frac{1}{4},$$

$$\forall y \in D_j(x) .$$

Posons

$$h = \frac{3}{2^{K+1}} \frac{f}{f(x)} ;$$

on a

$$h(x) = \frac{3}{2^{K+1}}, \|h\| \leq \frac{1}{2^{K-1}}, |h(y)| < \frac{1}{2^{K+1}}, \forall y \in D_j(x) \supset D_K(x) .$$

En prenant $g_{K+1} = g_K + h$, on a bien $g_{K+1} \in A$ et les propriétés 1, 3, 4. Vérifions que l'on a la propriété 2 :

Si $y \in D_j(x)$,

$$|g_{K+1}(y)| \leq |g_K(y)| + |h(y)| \leq \|g_K\| + \frac{1}{2^{K+1}} < 3(1 - \frac{1}{2^{K+1}}) + \frac{1}{2^{K+1}} < 3(1 - \frac{1}{2^{K+2}}) ;$$

et si $y \in C - D_j(x)$,

$$|g_{K+1}(y)| \leq 3(1 - \frac{1}{2^K}) + \frac{1}{2^{K+2}} + \|h\| \leq 3(1 - \frac{1}{2^{K+2}}) .$$

Or

- (1) $\Rightarrow g_n$ converge uniformément dans A vers g ;
 (2) $\Rightarrow \|g\| \leq 3$;
 (3) $\Rightarrow g(x) = 3$;
 (4) $\Rightarrow$ si $y \in D_n(x)$, $|g(y)| \leq \|g_n\| + \sum_{K \geq n} |g_{K+1}(y) - g_K(y)| < 3(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) + \sum_{K \geq n} \frac{1}{2^{K+1}} < 3$.

Donc $S(g) = \{x\} \Rightarrow x \in M_0$.

C. Q. F. D.

Remarques.

1° Si C n'est pas métrisable, il peut ne pas exister de frontière minimale.

Considérons $I = (0, 1)$, $C = I^J$, J ensemble d'indices α non dénombrable. A = algèbre des fonctions continues sur C ne dépendant que d'une infinité dénombrable de variables.

A est une algèbre séparante de fonctions, elle est de Banach pour la convergence uniforme car si $f_n \rightarrow f$, on a $f = f_0 + \sum_{n \geq 0} (f_{n+1} - f_n)$ ce qui montre que f ne dépend que d'une infinité dénombrable de variables.

(Le théorème de Stone-Weierstrass montre que A est l'ensemble des fonctions continues sur C .)

Or

$N_1 = \{x \mid x \in C, x_\alpha = 0 \text{ sauf pour une infinité dénombrable d'indices}\}$
 est une frontière de A ;

$N_2 = \{x \mid x \in C, x_\alpha = 1 \text{ sauf pour une infinité dénombrable d'indices}\}$
 est une autre frontière de A et

$$N_1 \cap N_2 = \emptyset .$$

2° La frontière minimale peut être plus petite que la frontière de Šilov.

Considérons

$$C = \{z \mid z \in \underline{\mathbb{C}}, |z| = 1\} .$$

A = ensemble des fonctions continues f sur C telles qu'il existe $\hat{f}$ sur

$|z| \leq 1$ avec $f = \hat{f}$ sur C , $\hat{f}$ holomorphe sur $|z| < 1$ et $\hat{f}(0) = \hat{f}(1)$.

A est une algèbre séparante de Banach.

La frontière de Šilov est C ; la frontière minimale est $C - \{1\}$ (principe du maximum).
