Claude Chevalley

Le corps de rationalité d'une classe de diviseurs

Séminaire Claude Chevalley, tome 4 (1958-1959), exp. nº 7, p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958-1959__4__A7_0>

LE CORPS DE RATIONALITÉ D'UNE CLASSE DE DIVISEURS

par Claude CHEVALLEY

Soit X une variété sur un corps K algébriquement clos ; soit R le corps des fonctions numériques sur X. Soit k un sous-corps de K, une structure de k-variété sur X est par définition constituée par la donnée d'un sous-corps R_k de R qui possède les propriétés suivantes :

1° R_k contient k ; R est engendré par K et R_k, et R_k est linéairement disjoint de K au-dessus de k ;

2° X peut se représenter comme réunion d'ouverts affines U possédant la propriété suivante : l'algèbre des fonctions régulières sur U est engendrée (sur K) par des éléments de R_k.

Nous supposerons désormais X munie d'une structure de k-variété. Pour tout sur-corps k' de k contenu dans K, nous noterons $R_{k'}$ le corps engendré par k' et R_k ; les éléments de $R_{k'}$ seront dits <u>rationnels</u> sur k'. Un point $x \in X$ est dit rationnel sur k' si toute fonction de $R_{k'}$ qui est définie en x y prend une valeur appartenant à k'. Un ouvert affine U de X est dit <u>rationnel sur</u> k' si l'algèbre des fonctions régulières sur U est engendrée par des éléments de $R_{k'}$; un ouvert quelconque est dit rationnel sur k' s'il est réunion d'ouverts affines rationnels sur k'. Soient U un ouvert affine rationnel sur k', P l'algèbre des fonctions régulières sur U, F une partie relativement fermée de U et $U' = U - F$. <u>Pour que U' soit rationnel sur k', il faut et il suffit que F soit l'ensemble des zéros communs à certaines fonctions</u> $f_\alpha \in P \cap R_{k'}$. En effet, pour montrer que la condition est nécessaire, on peut tout de suite se ramener au cas ou U' est un ouvert affine rationnel sur k' ; soient alors f'_j $(1 \leq j \leq r)$ des générateurs de l'algèbre des fonctions régulières sur U' [1]. Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de P composé des $f \in P$ tels que $ff'_j \in P$ $(1 \leq j \leq r)$; on voit facilement que F est exactement l'ensemble des zéros communs aux fonctions de $\mathfrak{a}$; par ailleurs, P ayant une base composée d'éléments de $R_{k'}$, il est clair qu'il en est de même de $\mathfrak{a}$. Pour montrer que la condition est suffisante, on se ramène tout de suite au cas où F est l'ensemble des zéros d'<u>une</u> fonction $f \in P \cap R_{k'}$, $f \neq 0$; or U' est alors un ouvert affine dont l'algèbre affine est $P[f^{-1}]$, ce qui montre que U' est rationnel

[1] Qui soient des éléments de $R_{k'}$.

sur k' .

Un sous-espace vectoriel V de la structure d'espace vectoriel de R sur K est dit rationnel sur un sous-corps k' de K contenant k si V a une base composée d'éléments de $R_{k'}$. Si V , V' sont des sous-espaces de R rationnels sur k' , les espaces $V + V'$, $V \cap V'$, VV' (l'espace engendré par les produits vv' , $v \in V$, $v' \in V'$), et si $V' \neq \{0\}$, $V : V'$ (l'ensemble des w tels que $wv' \in V$ pour tout $v' \in V'$) sont rationnels sur k' . C'est évident en ce qui concerne $V + V'$, VV' . En ce qui concerne $V \cap V'$ et $V : V'$, on observe que, si W est un espace rationnel sur k' et (ω_i) une base de K/k' , tout élément w de W se met d'une manière et d'une seule sous la forme $\sum_i \omega_i w_i$, $w_i \in R_{k'} \cap W$; ceci étant, pour qu'un sous-espace T de W soit rationnel sur k' , il faut et il suffit que la condition $w \in T$ entraîne $w_i \in T$ pour tout i .

Soient V un sous-espace vectoriel de R rationnel sur k et W un sous-espace de V ; parmi les sous-corps de K contenant k , sur lesquels W est rationnel, il y en a un, soit k' , qui est contenu dans tous les autres ; on l'appelle le corps de rationalité de W . On peut l'obtenir comme suit : soit $(v_i)_{i \in I}$ une base de V composée d'éléments de R_k , et soit I' un sous-ensemble de I tels que les v_i , $i \in I'$, forment une base de V/W ; si $i \in I - I'$, on peut écrire $v_i \equiv \sum_{j \in I'} a_{ji} v_j \pmod W$, avec $a_{ji} \in K$; k' est le corps engendré par les a_{ji} .

Dans ce qui suit, nous appellerons pour simplifier, "faisceau" tout faisceau d'idéaux fractionnaires $\neq \{0\}$ sur X . Si U est un ouvert de X , les sections d'un faisceau A sur U s'identifient aux éléments d'un sous-espace vectoriel de R , que nous désignerons par $\Gamma(U , A)$. Si U est un ouvert affine, $\Gamma(U , A)$ est un idéal fractionnaire pour l'algèbre affine de U , que nous désignerons par $P(U)$. Si $x \in U$, le module ponctuel de A , que nous noterons $A(x)$, est l'idéal fractionnaire pour l'anneau local $\mathcal{O}(x)$ de x engendré par $\Gamma(U , A)$. Un faisceau est uniquement déterminé par ses modules ponctuels ; si on se donne pour chaque $x \in X$ un idéal fractionnaire $A_x \neq \{0\}$ pour $\mathcal{O}(x)$, une condition nécessaire et suffisante pour que les A_x soient les modules ponctuels d'un faisceau est que X puisse être recouvert par des ouverts affines U dont chacun possède la propriété suivante : il existe un idéal fractionnaire $\mathfrak{A}$ pour $P(U)$ tel que, pour tout $x \in U$, A_x soit l'idéal fractionnaire pour $\mathcal{O}(x)$ engendré par $\mathfrak{A}$, on a alors

$$\mathfrak{A} = \bigcap_{x \in U} A_x = \Gamma(U , A)$$

si A est le faisceau admettant les A_x comme modules ponctuels.

Soient P un domaine d'intégrité, S une partie de P ne contenant pas 0 et $Q = P[S^{-1}]$. Pour tout idéal fractionnaire $\mathfrak{A}$ pour P , soit $\mathfrak{A}^Q$ l'idéal fractionnaire pour Q engendré par $\mathfrak{A}$. Si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont des idéaux fractionnaires pour P , on a

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^Q = \mathfrak{A}^Q + \mathfrak{B}^Q \qquad (\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B})^Q = \mathfrak{A}^Q \cap \mathfrak{B}^Q$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^Q = \mathfrak{A}^Q \mathfrak{B}^Q \qquad (\mathfrak{A} : \mathfrak{B})^Q = \mathfrak{A}^Q : \mathfrak{B}^Q ,$$

comme on le voit facilement soit directement, soit en utilisant la théorie des modules plats. On déduit de là que, si A , B sont des faisceaux, il existe des faisceaux $A + B$, $A \cap B$, AB , $A : B$ tels que l'on ait

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x) \qquad (A \cap B)(x) = A(x) \cap B(x)$$
$$(AB)(x) = A(x)\,B(x) \qquad (A : B)(x) = A(x) : B(x)$$

pour tout $x \in X$, et aussi

$$\Gamma(U , A + B) = \Gamma(U , A) + \Gamma(U , B) \qquad \Gamma(U , A \cap B) = \Gamma(U , A) \cap \Gamma(U , B)$$
$$\Gamma(U , AB) = \Gamma(U , A)\,\Gamma(U , B) \qquad \Gamma(U , A : B) = \Gamma(U , A) : \Gamma(U , B)$$

pour tout ouvert affine U .

Si A et B sont deux faisceaux et si $A(x) \subset B(x)$ pour tout x (ou, ce qui revient au même, $\Gamma(U , A) \subset \Gamma(U , B)$ pour tout ouvert affine U), on dit que A est multiple de B , et on écrit $A \subset B$.

On dit qu'un faisceau A est <u>rationnel</u> sur un sous-corps k' de K contenant k si, pour tout ouvert affine U rationnel sur k' , $\Gamma(U , A)$ est rationnel sur k' . S'il en est ainsi, pour tout ouvert U rationnel sur k' , $\Gamma(U , A)$ est rationnel sur k' puisque $\Gamma(U , A)$ est l'intersection des $\Gamma(U_i , A)$ pour les U_i d'un recouvrement (que l'on peut supposer fini) de U par des ouverts affines rationnels sur k' . De plus, pour tout $x \in X$, $A(x)$ est engendré (comme idéal fractionnaire pour $\mathcal{O}(x)$) par des éléments de $R_{k'}$.

Si A , B sont des faisceaux rationnels sur k' , il en est de même de $A + B$, $A \cap B$, AB , $A : B$.

Pour tout faisceau A , on appelle <u>ensemble porteur</u> de A l'ensemble des x tels que $A(x) \neq \mathcal{O}(x)$. Cet ensemble est fermé et $\neq X$. Supposons que A soit rationnel sur un sous-corps k' de K contenant k ; si E est l'ensemble porteur de A et si U est un ouvert affine rationnel sur k' , $E \cap U$ est l'ensemble des zéros communs à certaines fonctions appartenant à $P(U) \cap R_{k'}$;

en effet, E est la réunion des ensembles porteurs de $A \cap \mathcal{O}$ et de $\mathcal{O} : (A + \mathcal{O})$ qui sont des faisceaux rationnels sur k' contenus dans $\mathcal{O}$; on se ramène donc au cas où $A \subset \mathcal{O}$; mais alors $\Gamma(U , A)$ a une base composée d'éléments de $P(U) \cap R_{k'}$, ce qui établit l'assertion. Il résulte de là que $X - E$ est rationnel sur k' . Réciproquement, on a le résultat suivant :

LEMME 1. - <u>Si Ω est un ouvert non vide rationnel sur k' , il existe un faisceau $A \subset \mathcal{O}$ tel que l'ensemble porteur de A soit $X - \Omega$.</u>

Si A , B sont des faisceaux contenus dans $\mathcal{O}$, l'ensemble porteur de $A + B$ est l'intersection de ceux de A et B ; il suffira donc de démontrer le lemme dans le cas où Ω est un ouvert affine rationnel sur k' . Soit alors $P(\Omega) = F[u_1 , \ldots , u_h]$, les u_i étant des éléments $\neq 0$ de $R_{k'}$. Pour tout x , soit $A(x)$ l'ensemble des $v \in \mathcal{O}(x)$ tels que $vu_i \in \mathcal{O}(x)$ $(1 \leq i \leq h)$; si on désigne par $u_i \mathcal{O}$ le faisceau dont les modules ponctuels sont les $u_i \mathcal{O}(x)$, on a $A(x) = (\bigcap_{i=1}^{h}(u_i \mathcal{O} : \mathcal{O})(x)) \cap \mathcal{O}(x)$, d'où il résulte que les $A(x)$ sont les modules ponctuels d'un faisceau A rationnel sur k' . On sait que Ω est l'ensemble des points $x \in X$ en lesquels les fonctions u_i sont toutes définies ; il en résulte que l'ensemble porteur de A est $X - \Omega$.

LEMME 2. - <u>Soit x_0 un point de X rationnel sur k . Il existe alors une suite (B_n) de faisceaux contenus dans $\mathcal{O}$ qui possède les propriétés suivantes : on a $B_0 = \mathcal{O}$, $B_{n+1} \subset B_n$; pour tout $n > 0$, l'ensemble porteur de B_n est $\{x_0\}$; $B_{n+1}(x_0)$ est un sous-espace vectoriel (sur K) de codimension 1 de $B_n(x_0)$; on a $\bigcap_{n=0}^{\infty} B_n(x_0) = \{0\}$.</u>

Soit U un ouvert affine rationnel sur k' et soit $\mathfrak{M}$ l'idéal des fonctions de $P(U)$ nulles en x_0 . L'espace $\mathfrak{M}$ est rationnel sur k' ; il en est de même de $\mathfrak{M}^{\nu}$ pour tout ν . De plus, $\mathfrak{M}^{\nu+1}$ est de codimension finie dans $\mathfrak{M}^{\nu}$, et tout sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}^{\nu}$ contenant $\mathfrak{M}^{\nu+1}$ est un idéal. Il en résulte qu'il y a une suite décroissante $(\mathfrak{B}_n)$ d'idéaux de $P(U)$ commençant par $\mathfrak{B}_0 = P(U)$ telle que chaque $\mathfrak{M}^{\nu}$ figure parmi les $\mathfrak{B}_n$ et que, pour tout n , $\mathfrak{B}_{n+1}$ soit de codimension 1 dans $\mathfrak{B}_n$ et soit rationnel sur k' . Il est clair qu'il y a un faisceau $B_n \subset \mathcal{O}$ tel que $B_n(x) = \mathcal{O}(x)$ pour tout $x \neq x_0$, $\Gamma(U , B_n) = \mathfrak{B}_n$. L'injection $P \longrightarrow \mathcal{O}(x_0)$ définit pour tout n un isomorphisme de $P/\mathfrak{B}_n$ sur $\mathcal{O}(x_0)/B_n(x_0)$; $B_{n+1}(x_0)$ est donc de codimension 1 dans $B_n(x_0)$; toute puissance de l'idéal premier maximal de $\mathcal{O}(x_0)$ figurant parmi les $B_n(x_0)$, on a $\bigcap_n B_n(x_0) = \{0\}$. Enfin il est clair que les faisceaux B_n sont rationnels sur k' .

A tout diviseur D sur X est attaché un faisceau que nous désignerons par A_D ; pour tout $x \in X'$, $A_D(x)$ est un idéal fractionnaire principal. Nous dirons que D est *rationnel sur un sous-corps* k' *de* K contenant k si A_D est rationnel sur k' . S'il en est ainsi, et si x est un point quelconque de X , D possède une fonction de définition en x qui appartient à $R_{k'}$. Les diviseurs rationnels sur k' forment un sous-groupe du groupe des diviseurs.

LEMME 3. - *Soit* D *un diviseur de* X . *Supposons qu'il existe un faisceau* F *rationnel sur* k *tel que* $A_D \subset F$. *Alors l'ensemble des sous-corps de* K *contenant* k' *sur lesquels* D *est rationnel a un plus petit élément.*

Soit U un ouvert affine rationnel sur k ; on a $\Gamma(U , A_D) \subset \Gamma(U , F)$, et $\Gamma(U , F)$ est un espace vectoriel rationnel sur k . L'ensemble des sous-corps de K contenant k sur lesquels $\Gamma(U , A_D)$ est rationnel a donc un plus petit élément k_U . Soit k' le corps engendré par les k_U pour tous les ouverts affines U rationnels sur k ; il est clair que k' est le plus petit sous-corps de K contenant k sur lequel D soit rationnel.

On dit qu'une classe C de diviseurs de X est *rationnelle sur un sous-corps* $k' \supset k$ *de* K si C contient un diviseur rationnel sur k' .

La variété X est dite *semi-complète* si, pour tout faisceau F , $\Gamma(X , F)$ est de dimension finie. Il en est en particulier ainsi, si X est complète.

THÉORÈME 1. - *Soit* X *une* k*-variété semi-complète qui possède un point* x_0 *rationnel sur* k . *Si* C *est une classe de diviseurs sur* X , *l'ensemble des sous-corps de* K *contenant* k *sur lesquels* C *est rationnelle a un plus petit élément.*

Nous choisirons un ouvert affine U_0 rationnel sur k contenant x_0 et un faisceau $H \subset \mathcal{O}$ rationnel sur k', dont l'ensemble porteur est $X - U_0$. Il existe un diviseur $D \in C$ tel que l'on ait $A_D(x) \subset \mathcal{O}(x)$ pour tout $x \in U_0$. En effet, soit D_0 un élément quelconque de C ; il y a un élément $f \in P(U_0)$ tel que $f \neq 0$, $f\,\Gamma(U_0 , A_{D_0}) \subset P_{U_0}$; $D = D_0 + \mathrm{div}\, f$ possède alors la propriété voulue. Soit D un diviseur ayant la propriété énoncée ; alors $\mathcal{O} : (\mathcal{O} + A_D)$ est un faisceau contenu dans $\mathcal{O}$ dont l'ensemble porteur est contenu dans $X - U_0$. Ceci étant, il est bien connu qu'il existe un $m > 0$ tel que

$$H^m \subset \mathcal{O} : (\mathcal{O} + A_D) \quad ,$$

d'où

$$H^m A_D \subset \mathcal{O} \quad .$$

Nous choisirons des faisceaux B_n qui possèdent les propriétés du lemme 2, et nous désignerons par C_n l'ensemble des diviseurs $D' \in C$ tels que $H^m A_{D'} \subset B_n$. On a donc $D \in C_0$, d'ou $C_0 \neq \emptyset$; on a $C_{n+1} \subset C_n$, $\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \emptyset$. Soit

$$\Phi_n = \Gamma(X , B_n : H^m A_D) \quad ;$$

pour qu'un diviseur D' appartienne à C_n , il faut et il suffit qu'il se mette sous la forme $D + \operatorname{div} f$, avec un élément $f \neq 0$ de Φ_n . On a $\Phi_{n+1} \subset \Phi_n$; montrons que Φ_{n+1} est de codimension ≤ 1 dans Φ_n . Soit g une fonction de définition de D en x_0 . On a $H^m(x_0) = \mathcal{O}(x_0)$, si donc $\varphi \in \Phi_n$, on a $\varphi g \in B_n(x)$ et une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi \in \Phi_{n+1}$ est que $\varphi g \in B_{n+1}(x)$; comme $B_{n+1}(x)$ est de codimension 1 dans $B_n(x)$, notre assertion est établie. Par ailleurs, Φ_0 est de dimension finie > 0 (puisque X est semi-complète et $1 \in \Phi_0$) ; il y a donc un $\nu \geqslant 0$ tel que $\dim \Phi_\nu = 1$, $\dim \Phi_{\nu+1} = 0$. Cela implique que C_ν est un ensemble à un seul élément ; soit Δ cet élément. Nous allons montrer que Δ est rationnel sur tout sous-corps k' de K contenant k sur lequel C est rationnelle. Soit D_1 un diviseur de C rationnel sur k' . Pour tout n , C_n est l'ensemble des diviseurs de la forme $D_1 + \operatorname{div} \psi$, où ψ est un élément $\neq 0$ de l'espace

$$\Psi_n = \Gamma(X , \mathcal{O}_n : H^m A_{D_1}) \quad .$$

Comme $C_\nu = \{\Delta\}$, Ψ_ν est de dimension 1 . Par ailleurs $B_n : H^m A_{D_1}$ est un faisceau rationnel sur k' , de sorte que Ψ_n a une base composée d'éléments rationnels sur k' . Si ψ est un élément $\neq 0$ de $\Psi_\nu \cap R_{k'}$, on a $\Delta = D_1 + \operatorname{div} \psi$, ce qui montre que Δ est rationnel sur k' (car $\operatorname{div} \psi$ l'est évidemment). Par ailleurs, on a $A_\Delta \subset \mathcal{O} : H^m$, et $\mathcal{O} : H^m$ est rationnel sur k . L'ensemble des sous-corps de K contenant k sur lesquels Δ est rationnel a donc un plus petit élément k' ; il est clair que k' est aussi le plus petit sous-corps de K contenant k sur lequel C soit rationnelle.
