Pierre Gabriel

Les foncteurs dérivés des foncteurs classiques

Séminaire Claude Chevalley, tome 4 (1958-1959), exp. nº 3, p. 1-30
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958-1959__4__A3_0>

LES FONCTEURS DÉRIVÉS DES FONCTEURS CLASSIQUES

par Pierre GABRIEL

1. Les foncteurs classiques.

On va rapidement passer en revue les foncteurs classiques : Tor , Hom , $\varinjlim$, foncteur image directe, foncteur image réciproque. On préparera ainsi l'étude des leurs foncteurs dérivés, lorsqu'ils existent.

a. Le foncteur Tor. - Si $(T, \mathcal{A})$ est un espace topologique annelé et si F et G sont deux faisceaux de $\mathcal{A}$-modules, on définit le faisceau $\mathrm{Tor}_n^{\mathcal{A}}(F, G)$ de $\mathcal{A}$-modules comme le faisceau associé au préfaisceau :

$$U \to \mathrm{Tor}_n^{\mathcal{A}(U)}(F(U), G(U)) .$$

Comme les Tor commutent aux limites inductives, on en déduit que

$$(\mathrm{Tor}_n^{\mathcal{A}}(F, G))_x = \mathrm{Tor}_n^{\mathcal{A}_x}(F_x, G_x)$$

et que $(\mathrm{Tor}_n^{\mathcal{A}})$ est, pour F fixé (resp. G fixé), un foncteur homologique en G (resp. en F) qui s'annule sur les faisceaux localement libres.

Si $(V, \mathcal{A})$ est un ensemble algébrique et si F et G sont des faisceaux quasi-cohérents (resp. cohérents) alors les $\mathrm{Tor}_n^{\mathcal{A}}(F, G)$ sont quasi-cohérents (resp. cohérents) : cela résulte de la formule générale

$$(\mathrm{Tor}_n^A(M, N))_S = \mathrm{Tor}_n^{A_S}(M_S, N_S) ,$$

où M et N sont des modules sur l'anneau A et S un système multiplicativement stable de A .

b. Le foncteur $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}$. - Si F et G sont deux faisceaux de $\mathcal{A}$-modules sur l'espace topologique annelé $(V, \mathcal{A})$, on rappelle que $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(F, G)$ désigne le faisceau dont les sections sur l'ouvert U sont

$$(\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(F, G))(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}|U}(F|U, G|U) .$$

Si $(V, \mathcal{A})$ est un ensemble algébrique, et si F et G sont deux faisceaux quasi-cohérents sur V , $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{A}}(F, G)$ n'est pas en général un faisceau quasi-cohérent (Prendre pour G le faisceau $\mathcal{O}$ et pour F la somme directe d'un nombre infini de faisceaux isomorphes à $\mathcal{O}$). On a cependant la proposition suivante.

PROPOSITION. - *Si F est un faisceau cohérent et si G est un faisceau quasi-cohérent* (resp. *cohérent*), *alors* $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(F , G)$ *est quasi-cohérent* (resp. *cohérent*).

Il suffit de faire la démonstration dans le cas où V est affine, où A est son anneau des coordonnées et où $F = \widetilde{M}$, $G = \widetilde{N}$. Soit dans ce cas une suite exacte $L_1 \to L_o \to M \to 0$, où L_1 et L_o sont des A-modules libres de type fini. On a alors le beau diagramme (si $f \in A$) :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to (\mathrm{Hom}_A(M , N))_f & \to & (\mathrm{Hom}_A(L_o , N))_f \simeq N_f^{p_o} & \to & (\mathrm{Hom}_A(L_1 , N))_f \simeq N_f^{p_1} \\
\downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w \\
0 \to \mathrm{Hom}_{A_f}(M_f , N_f) & \to & \mathrm{Hom}_{A_f}(L_{o_f} , N_f) \simeq N_f^{p_o} & \to & \mathrm{Hom}_{A_f}(L_{1_f} , N_f) \simeq N_f^{p_1}
\end{array} ,$$

et v et w sont des isomorphismes ; donc u est un isomorphisme et la proposition en découle.

Le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}$ est exact à gauche, et nous calculerons plus tard ses foncteurs dérivés.

c. Il est clair que la somme directe, la limite inductive de modules quasi-cohérents sont des modules quasi-cohérents. Il n'en va pas de même du produit direct et de la limite projective.

2. L'image directe et l'image réciproque d'un faisceau.

On va considérer une nouvelle catégorie :

Les objets sont les triplets $(V , \mathcal{O}, F)$, où V est un espace topologique, $\mathcal{O}$ un faisceau d'anneaux et F un faisceau de $\mathcal{O}$-modules (espaces topologiques avec faisceau de modules).

Si $(V , \mathcal{O}, F)$ et $(W , \mathcal{B}, G)$ sont deux objets de la catégorie un morphisme φ du premier dans le second sera la donnée d'un morphisme, encore noté φ de $(V , \mathcal{O})$ dans $(W , \mathcal{B})$, et pour tout ouvert U de W, d'un homomorphisme de groupes abéliens, encore noté φ_U :

$$\varphi_U : G(U) \to F(\varphi^{-1}(U))$$

φ_U est supposé compatible avec les opérations de restriction et avec les homomorphismes d'anneaux :

$$\varphi_U : \mathcal{B}(U) \to \mathcal{A}(\varphi^{-1}(U)) .$$

Le composé de deux morphismes est défini de façon évidente.

a. <u>L'image directe d'un faisceau de modules</u>. - Si $(V , \mathcal{A}, F)$ est un espace topologique avec faisceau de modules, et si ψ est un morphisme d'espaces topologiques annelés

$$\psi : (V , \mathcal{A}) \to (W , \mathcal{B}) ,$$

alors il existe sur W un faisceau de $\mathcal{B}$-modules G et il existe un morphisme

$$\varphi : (V , \mathcal{A}, F) \to (W , \mathcal{B}, G)$$

qui induit ψ sur le couple $(V , \mathcal{A})$, et qui satisfait à la condition suivante :
Tout morphisme $\chi : (V , \mathcal{A} , F) \to (W , \mathcal{B}, H)$ où H est un $\mathcal{B}$-module, se factorise en $\chi = \chi' \circ \varphi$ où

$$\chi' : (W , \mathcal{B}, G) \to (W , \mathcal{B}, H)$$

est induit par un morphisme de $\mathcal{B}$-modules de H dans G .

<u>En outre le couple</u> (φ , G) <u>est unique à un isomorphisme près ; c'est l'image directe</u> $\psi_*(F)$ <u>de</u> F .

En fait $(\psi_*(F))(U) \simeq F(\varphi^{-1}(U))$, la structure de $\mathcal{B}(U)$-module étant définie par l'application

$$\varphi_U : \mathcal{B}(U) \to \mathcal{A}(\varphi^{-1}(U)) .$$

En outre la correspondance $F \Rightarrow \varphi_*(F)$ est fonctorielle. Le foncteur φ_* est exact à gauche et on a la formule de composition $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$.

Donnons <u>l'exemple suivant</u> : soit $\varphi : B \to A$ un morphisme d'anneaux commutatifs (noethériens ou non) à élément unité.

L'image réciproque de tout idéal premier est un idéal premier et définit une application $\varphi : V(A) \to V(B)$. Si $f \in B$ l'image réciproque de l'ouvert spécial U_f n'est autre que $U_{\varphi(f)}$ et f définit une application

$$\mathcal{B}(U_f) = B_f \longrightarrow \mathcal{U}(U_{\varphi(f)}) = A_{\varphi(f)} \quad .$$

Par passage à la limite inductive on aboutit ainsi à un morphisme φ (encore !) $(V(A)\ ,\mathcal{U}) \longrightarrow (V(B)\ ,\mathcal{B})$.

Si maintenant M est un A-module et $\mathcal{M}$ son faisceau associé, alors $\varphi_*(\mathcal{M})(U_f) = M_{\varphi(f)}$ et $\varphi_*(\mathcal{M})$ n'est autre que le faisceau sur $V(B)$ associé à M (qui est un B-module par "restriction" des scalaires). Dans ce cas, l'image directe d'un faisceau quasi-cohérent est quasi-cohérente ; la proposition est générale :

PROPOSITION. - Si $\varphi : (V\ ,\mathcal{O}) \longrightarrow (W\ ,\mathcal{B})$ est un morphisme d'ensembles algébriques, l'image directe d'un faisceau algébrique quasi-cohérent est quasi-cohérente.

En effet, soit F un faisceau algébrique quasi-cohérent sur V . On se ramène tout de suite au cas où W est affine, et, modulo ce qui précède, la proposition est donc démontrée si V est affine. Si V n'est pas affine (W l'étant toujours), soit (U_i) un recouvrement affine de V et soit F_i l'image directe de $F|\mathcal{U}_i$ dans V pour l'injection. Alors $\varphi_*(F_i) = (\varphi|U_i)_*(F|U_i)$ et $\varphi_*(F_i)$ est quasi-cohérent. Il en va de même de $\varphi_*(F_{ij})$ où F_{ij} désigne l'image directe dans V de $F|U_i \cap U_j$. Mais alors la suite exacte :

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow \prod_i F_i \longrightarrow \prod_{i<j} F_{ij}$$

entraîne

$$0 \longrightarrow \varphi_*(F) \longrightarrow \prod_i \varphi_*(F_i) \longrightarrow \prod_{i<j} \varphi_*(F_{ij})$$

et $\varphi_*(F)$ est le noyau d'un morphisme de faisceaux quasi-cohérents, d'où le résultat.

PROPOSITION. - Soit $\varphi : (V\ ,\mathcal{O}) \longrightarrow (W\ ,\mathcal{B})$ un morphisme d'ensembles algébriques. Les propositions suivantes sont équivalentes :

a. L'image réciproque de tout ouvert affine est un ouvert affine.

b. Il existe un recouvrement fini (W_i) de W par des ouverts affines dont les images réciproques sont des ouverts affines.

c. Si $0 \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow 0$ est une suite exacte de faisceaux quasi-cohérents de V , alors la suite :

$$0 \to \varphi_*(F) \to \varphi_*(G) \to \varphi_*(H) \to 0 \qquad \text{est exacte.}$$

d. Si $0 \to F \to G \to H \to 0$ est une suite exacte de faisceaux cohérents de V , alors la suite :

$$0 \to \varphi_*(F) \to \varphi_*(G) \to \varphi_*(H) \to 0 \qquad \text{est exacte.}$$

Démonstration cyclique :

(a) $\Rightarrow$ (b) : c'est vrai

(b) $\Rightarrow$ (c) : En effet, on a manifestement $\varphi_*(F)|W_i = \varphi_*(F|\varphi^{-1}(W_i))$, et il suffit donc de faire la démonstration quand V et W sont affines. Mais alors "prendre l'image directe" d'un faisceau quasi-cohérent, c'est "restreindre les scalaires" sur les modules associés et cette opération conserve les suites exactes.

(c) $\Rightarrow$ (d) : c'est vrai

(d) $\Rightarrow$ (a) : Soit en effet U un ouvert affine de W , et $U' = \varphi^{-1}(U)$ son image réciproque dans V ; soit aussi

$$0 \to F' \to G' \to H' \to 0$$

une suite exacte de faisceaux cohérents de U' . D'après le théorème de Serre il suffit de montrer que les sections sur U' forment une suite exacte.

On admettra pour cela qu'il existe une suite exacte de faisceaux cohérents de V ,

$$0 \to F \to G \to H \to 0$$

telle que $F|U' = F'$, $G|U' = G'$, $H|U' = H'$ (Pour une démonstration voir la Théorie de Grothendieck, par A. BOREL et J.-P. SERRE). Il en résulte que la suite suivante est exacte

$$0 \to \varphi_*(F) \to \varphi_*(G) \to \varphi_*(H) \to 0 \quad ,$$

et comme U est affine et que $\Gamma(U, \varphi_*(F)) = \Gamma(U', F) = \Gamma(U', F')$, on a une suite exacte

$$0 \to F'(U') \to G'(U') \to H'(U') \to 0$$

C. Q. F. D.

b. <u>L'image réciproque d'un faisceau de modules</u>. – Si maintenant $(W, \mathcal{B}, G)$ est un espace topologique avec faisceaux de modules, et si

$$\varphi : (V, \mathcal{A}) \to (W, \mathcal{B})$$

est un morphisme d'espaces topologiques annelés, on appelle image réciproque de G, et on notera $\varphi^{*}(G)$ ou $\varphi^{-1}(G)$ le $\mathcal{A}$-module engendré par le préfaisceau :

$$U \to \Gamma(\varphi(U), G) \otimes_{\Gamma(\varphi(U), \mathcal{B})} \Gamma(U, \mathcal{A})$$

La lettre U désigne un ouvert de V et $\Gamma(\varphi(U), G)$ désigne les sections de G sur l'ensemble (non ouvert en général) $\varphi(U)$. Il est clair que toute section de $\mathcal{B}$ sur $\varphi(U)$ définit une section de $\mathcal{A}$ sur U et qu'on a un homomorphisme d'anneaux : $\Gamma(\varphi(U), \mathcal{B}) \to \Gamma(U, \mathcal{A})$. En outre, si U' est un ouvert de W et si $U'' = \varphi^{-1}(U')$, on a une application canonique $\varphi_{U'}$ de $G(U')$ dans $(\varphi^{*}(G))(U'')$, composée des applications canoniques :

$$G(U') \to G(U') \otimes_{\mathcal{B}(U')} \mathcal{A}(U'')$$

et

$$G(U') \otimes_{\mathcal{B}(U')} \mathcal{A}(U'') \to (\varphi^{*}(G))(U'') \quad .$$

On est donc en présence d'un morphisme d'espaces topologiques avec faisceaux de modules, que nous noterons encore φ :

$$\varphi : (V, \mathcal{A}, \varphi^{*}(G)) \to (W, \mathcal{B}, G) \quad ,$$

et ce morphisme satisfait à un problème universel (cf. plus bas).

En outre la correspondance $G \Rightarrow \varphi^{*}(G)$ est fonctorielle. Le foncteur φ^{*} est exact à droite, et on a la formule de composition $(\varphi \circ \psi)^{*} = \varphi^{*} \circ \psi^{*}$.

Si $\varphi : B \to A$ est un morphisme d'anneaux commutatifs, et si l'on désigne toujours par φ le morphisme correspondant des espaces topologiques annelés :

$$\varphi : V(A), \mathcal{A}) \to (V(B), \mathcal{B}) \quad ,$$

si enfin N est un B-module, alors $\varphi^{*}(\mathcal{N})$ est le faisceau associé au A-module $N \otimes_B A$. On en déduit trivialement, dans le cas de la géométrie algébrique, <u>que l'image réciproque d'un faisceau quasi-cohérent</u> (resp. <u>cohérent</u>) <u>est quasi-cohérente</u> (resp. <u>cohérente</u>).

On va compléter l'étude du foncteur image réciproque; soit

$$\varphi : (V , \mathcal{A}) \to (W , \mathcal{B})$$

un morphisme d'espaces topologiques annelés et soit G un $\mathcal{B}$-module. Le faisceau $\varphi^*(G)$, image réciproque de G par φ est engendré par le préfaisceau :

$$U \longrightarrow \Gamma(\varphi(U) , G) \otimes_{\Gamma(\varphi(U),\mathcal{B})} \Gamma(U , \mathcal{A})$$

En particulier le module ponctuel $(\varphi^*(G))_x$, où $x \in V$, est égal à la limite inductive :

$$(\varphi^*(G))_x = \varinjlim_{U \ni x} \Gamma(\varphi(U) , G) \otimes_{\varinjlim \Gamma(\varphi(U),\mathcal{B})} \varinjlim \Gamma(U , \mathcal{A}) ,$$

d'où

$$(\varphi^*(G))_x = G_{\varphi(x)} \otimes_{\mathcal{B}_{\varphi(x)}} \mathcal{A}_x .$$

En particulier si $(V , \mathcal{A})$ et $(W , \mathcal{B})$ sont deux spectres premiers $(V(A) , \tilde{A})$ et $(V(B) , \tilde{B})$, φ est induit par un homomorphisme d'anneaux $\varphi : B \to A$. Si G est associé au module N, $G = \tilde{N}$, alors $\varphi^*(G)$ est isomorphe au faisceau associé à $M = N \otimes_B A$: en effet si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A et $\mathfrak{q}$ son image réciproque par φ, on a bien

$$(N \otimes_B A)_{\mathfrak{p}} = (N_{\mathfrak{q}} \otimes_B A) \otimes_A A_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{q}} \otimes_{B_{\mathfrak{q}}} A_{\mathfrak{q}} .$$

Revenant au cas général, on a pour tout ouvert U' de W un morphisme canonique de $G(U')$ dans $G(U') \otimes_{\mathcal{B}(U')} \mathcal{A}(\varphi^{-1}(U'))$, et donc aussi dans $(\varphi^*(G))(\varphi^{-1}(U'))$ et on notera encore par φ^* le morphisme

$$(V , \mathcal{A}, \varphi^*(G)) \to (W , \mathcal{B}, G')$$

ainsi défini.

Si maintenant F est un $\mathcal{A}$-module arbitraire alors, tout morphisme $\psi : (V , \mathcal{A}, F) \to (W , \mathcal{B}, G)$ compatible avec φ se factorise d'une seule manière en φ^* et en un morphisme de $\mathcal{A}$-modules $h : \varphi^*(G) \to F$ (Propriété universelle de $\varphi^*(G)$).

On identifie de cette manière $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\varphi^*(G), F)$ au groupe abélien $H(G, F)$ des morphismes ψ compatibles avec φ.

Mais de la même manière $H(G, F)$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(G, \varphi_*(F))$ et on en tire :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\varphi^*(G), F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(G, \varphi_*(F))$$

Par exemple si $G = \mathcal{B}$, alors $\varphi^*(G) = \mathcal{A}$ et

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\varphi^*(G), F) \xrightarrow{\sim} \Gamma(V, F)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(G, \varphi_*(F)) \xrightarrow{\sim} \Gamma(W, \varphi_*(F))$$

3. Rappel sur les faisceaux injectifs.

On rappelle que si $\mathcal{C}$ est une catégorie abélienne, un objet I de $\mathcal{C}$ est dit injectif si et seulement si le foncteur $F \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F, I)$ est exact, quand F parcourt $\mathcal{C}$. Il revient au même de dire que si $0 \to F \to G$ est un monomorphisme, tout morphisme de F dans I se prolonge en un morphisme de G dans I.

Les objets injectifs ont les propriétés suivantes :

a. Si I est le produit d'une famille d'objets $(I_i)_{i \in I}$, alors I est injectif si et seulement si chaque I_i est injectif : En effet on a l'isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F, I) = \prod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(F, I_i) .$$

b. Si $0 \to F \to G \to H \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{C}$ et si F est injectif, alors la suite se scinde (i.e. définit G comme produit direct de F et de H). En particulier si F et G (resp. F et H) sont injectifs, alors H (resp. G) est injectif.

On suppose maintenant que $\mathcal{C}$ est la catégorie des faisceaux de modules sur un espace topologique annelé $(V, \mathcal{A})$:

c. Si U est un ouvert de V, et si I est un $\mathcal{A}$-module injectif, alors $I|U$ est un $\mathcal{A}|U$-module injectif :

On a en effet un isomorphisme évident de foncteurs :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}|U}(F, I|U) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(F^V, I) ,$$

où F^V désigne le faisceau de V nul sur $V - U$ et dont la restriction à U est F. Le second membre de l'égalité est un foncteur exact en F et il en va de même du premier.

d. Si E est un sous-espace de V, si φ désigne l'injection canonique de $(E, \mathcal{O}|E)$ dans $(V, \mathcal{O})$, si enfin I est un $\mathcal{O}|E$-module injectif, alors $\varphi_*(I)$, image directe de I par φ, est un $\mathcal{O}$-module injectif.

On a en effet un isomorphisme de foncteurs :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, \varphi_*(I)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}|E}(F|E, I)$$

e. Tout $\mathcal{O}$-module F admet un monomorphisme dans un faisceau injectif : en effet pour tout x de V, F_x est un $\mathcal{O}_x$-module, et par conséquent se plonge dans un $\mathcal{O}_x$-module injectif M_x. On considérera M_x comme faisceau sur l'espace topologique réduit au point x et l'on désignera par I_x l'image directe de ce faisceau dans V. D'après (d) I_x est injectif, et il est clair qu'on a une application $\varphi_x : F \to I_x$. Alors le faisceau produit $I = \prod_{x \in V} I_x$ est injectif d'après (a) et le produit des φ_x définit un monomorphisme de F dans I. Les $\mathcal{O}$-modules forment donc une catégorie abélienne ayant suffisamment d'injectifs (voir GROTHENDIECK, [6]).

On suppose maintenant que $(V, \mathcal{O})$ est un ensemble algébrique muni de l'anneau des germes de fonctions régulières. Alors :

f. Si I est un $\mathcal{O}$-module injectif, et si U est un ouvert affine de V, alors $\Gamma(U, I)$ est un $\Gamma(U, \mathcal{O})$-module injectif. On a en effet l'isomorphisme évident :

$$\mathrm{Hom}_A(M, \Gamma(U, I)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}|U}(\mathcal{M}, I|U) ,$$

où $A = \Gamma(U, \mathcal{O})$, M est un A-module et $\mathcal{M}$ est le faisceau associé à M sur U.

4. <u>Rappel sur les foncteurs dérivés</u>.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne ayant suffisamment d'objets injectifs et S un foncteur additif covariant de $\mathcal{C}$ dans une catégorie abélienne $\mathcal{D}$. On rappelle que si F est un objet de $\mathcal{C}$, une <u>résolution injective</u> de F est une suite exacte

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \xrightarrow{d^2} \cdots ,$$

où les I^n sont des objets injectifs. Alors la suite $(S(I^n)\ ,\ S(d^n))_{n\geq 0}$ définit un complexe de $\mathcal{G}$, dont les objets de cohomologie

$$R^n\, S(F) = \mathrm{Ker}\ S(d^n)/\mathrm{Im}\ S(d^{n-1})$$

dépendent seulement de F et non de la résolution choisie. Ce sont les foncteurs dérivés de S et on munit de façon naturelle la suite $(R^n\, S)$ d'une structure de foncteur cohomologique (voir GROTHENDIECK [6]).

Si maintenant

$$0 \longrightarrow F \xrightarrow{\varepsilon'} F^0 \xrightarrow{\delta^0} F^1 \xrightarrow{\delta^1} F^2 \xrightarrow{\delta^2} \cdots$$

est une autre suite exacte, les F^i étant des objets quelconques, alors il existe des morphismes $\varphi^n : F^n \to I^n$ tels que le diagramme suivant soit commutatif :

(1)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, "1_F"'] & F^0 \arrow[r, "\delta^0"] \arrow[d, "\varphi^0"] & F^1 \arrow[r, "\delta^1"] \arrow[d, "\varphi^1"] & F^2 \arrow[r, "\delta^2"] \arrow[d, "\varphi^2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "\varepsilon"] & I^0 \arrow[r, "d^0"] & I^1 \arrow[r, "d^1"] & I^2 \arrow[r, "d^2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Il en résulte un morphisme de complexes

$$\varphi_* : \ (S(F^n)\ ,\ S(\delta^n)) \to (S(I^n)\ ,\ S(d^n))$$

et des morphismes φ_*^n entre les objets de cohomologie de ces complexes :

$$\varphi_*^n : \ H^n(S(F^*)) \to H^n(S(I^*)) = R^n\, S(F)$$

Il est classique que ces morphismes φ_*^n ne dépendent que de la suite $0 \to F \to F^0 \to F^1 \cdots$ ("les φ_i^n sont définis à une homotopie près") et que ce sont des isomorphismes si les F^i , $i \geq 0$, sont des objets S-acycliques (i.e. si $R^p\, S(F^i) = 0$ pour $p \geq 1$). La proposition suivante est moins classique :

PROPOSITION 1. - <u>Considérons le diagramme commutatif</u>

(2)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, "f"] & F^0 \arrow[r, "\delta^0"] \arrow[d, "f^0"] & F^1 \arrow[r, "\delta^1"] \arrow[d, "f^1"] & F^2 \arrow[r] \arrow[d, "f^2"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\eta'"] & G^0 \arrow[r, "\tau^0"] & G^1 \arrow[r, "\tau^1"] & G^2 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où les suites sont exactes. Les suites exactes $0 \to F \to F^1 \to \dots$ et $0 \to G \to G^1 \to \dots$ *définissent des morphismes*

$$\varphi_*^n : H^n(S(F^*)) \to R^n S(F) , \quad \psi_*^n : H^n(S(G^*)) \to R^n S(G) .$$

De même f *et les* f^i *définissent des morphismes* :

$$R^n S(f) : R^n S(F) \to R^n S(G) , \quad f_*^n : H^n(S(F^*)) \to H^n(S(G^*)) .$$

Alors $R^n S(f) \circ \varphi_*^n = \psi_*^n \circ f_*^n$.

La proposition est un corollaire du lemme suivant :

LEMME 1. – *Supposons donnés le diagramme* (2) *et le diagramme commutatif* :

(3)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "1_G"'] & G^0 \arrow[r, "\tau^0"] \arrow[d, "\psi^0"] & G^1 \arrow[r, "\tau^1"] \arrow[d, "\psi^1"] & G^2 \arrow[r] \arrow[d, "\psi^2"] & \dots \\
0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\eta"] & J^0 \arrow[r, "t^0"] & J^1 \arrow[r, "t^1"] & J^2 \arrow[r] & ,
\end{tikzcd}$$

où les suites sont exactes et les J^i *injectifs.*

Alors il existe une résolution injective de F

$$0 \to F \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d^0} I^1 \xrightarrow{d^1} I^2 \to \dots ,$$

il existe des monomorphismes $\varphi^n : F^n \to I^n$, *et il existe des morphismes* $i^n : I^n \to J^n$ *tels que le diagramme prismatique* (4) *soit commutatif.*

(4)
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "\varepsilon'"] \arrow[d, "1_F"'] \arrow[ddr, "f"] & F^0 \arrow[r, "\delta^0"] \arrow[d, "\varphi^0"] \arrow[ddr, "f^0"] & F^1 \arrow[r, "\delta^1"] \arrow[d, "\varphi^1"] \arrow[ddr, "f^1"] & \dots & \\
0 \arrow[r] & F \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[ddr, "f"] & I^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[ddr, "i^0"] & I^1 \arrow[r, "d^1"] \arrow[ddr, "i^1"] & \dots & \\
& 0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "1_G"] & G^0 \arrow[r, "\tau^0"] \arrow[d, "\psi^0"] & G^1 \arrow[r, "\tau^1"] \arrow[d, "\psi^1"] & \dots \\
& 0 \arrow[r] & G \arrow[r, "\eta"] & J^0 \arrow[r, "t^0"] & J^1 \arrow[r, "t^1"] & \dots
\end{tikzcd}$$

Pour démontrer le lemme 1 nous aurons besoin du lemme 2 dont la preuve est laissée aux soins du lecteur :

LEMME 2. - Soient $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne, $u : P \to M$, $v : P \to N$ deux morphismes et $M_P N$ le conoyau du morphisme $(u , - v) : P \to M \oplus N$. Si dans ces conditions p et q désignent les morphismes canoniques de M et N dans $M_P N$, on a les propriétés suivantes :

a. $p \circ u = q \circ v$.

b. si p' et q' sont deux morphismes de M et N dans un objet Q , et si $p' \circ u = q' \circ v$, alors il existe un morphisme unique w de $M_P N$ dans Q tel que $p' = w \circ p$, $q' = w \circ q$.

c. $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Im}\, q = \mathrm{Im}\, p \circ u = \mathrm{Im}\, q \circ v$.

d. Si u (resp. v) est injectif, il en va de même de q (resp. p) .

Le lemme 2 étant admis, soit d'abord $\varphi^0 : F^0 \to I^0$ un monomorphisme quelconque de F^0 dans un injectif ; on posera $\varepsilon = \varphi^0 \circ \varepsilon'$ et on choisira pour i^0 un prolongement à I^0 du morphisme $\psi^0 \circ f^0$: le premier "parallélépipède" de notre prisme est construit.

On va construire le second ; pour cela soit $L^0 = \mathrm{Coker}\ \varepsilon$, $H^0 = \mathrm{Coker}\ \varepsilon'$; on a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & H^0 & \to & F^1 \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & L^0 & \to & L^0_{\;H^0} F^1 \end{array} \qquad \text{où} \qquad L^0 \cap F^1 \simeq H^0 \ .$$

Les applications évidentes de F^1 et L^0 dans J^1 coïncident sur H^0 et induisent donc une application unique i de $L^0_{\;H^0} F^1$ dans J^1 . On prendra pour I^1 un injectif contenant $L^0_{\;H^0} F^1$ et pour i^1 un prolongement de i à I^1 : le deuxième parallélépipède est construit.

On va construire le troisième : soit $L^1 = \mathrm{Coker}\ \delta^0$, $H^1 = \mathrm{Coker}\ d^0$. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & H^1 \arrow[r] \arrow[d] & F^2 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & L^1 \arrow[r] & L^1_{\ H^1} F^2 \end{tikzcd} \qquad \text{où} \qquad L^1 \cap F^2 \simeq H^1$$

... :

La proposition est démontrée.

On tire en particulier du lemme 1 le résultat suivant : soit un diagramme commutatif, à suites exactes,

(5)
$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & F \arrow[r] \arrow[d] & F^o \arrow[r] \arrow[d] & F^1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\ 0 \arrow[r] & G \arrow[r] \arrow[d] & G^o \arrow[r] \arrow[d] & G^1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\ 0 \arrow[r] & E \arrow[r] \arrow[d] & E^o \arrow[r] \arrow[d] & E^1 \arrow[r] \arrow[d] & \dots \\ & 0 & 0 & 0 \end{tikzcd}$$

supposons en outre que les suites

$$0 \longrightarrow S(F^n) \longrightarrow S(G^n) \longrightarrow S(E^n) \longrightarrow 0$$

sont exactes, $n \geqslant 0$.

Dans ces conditions, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & H^n(S(G^*)) \arrow[r] \arrow[d, "\psi^n"] & H^n(S(E^*)) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\chi^n"] & H^{n+1}(S(F^*)) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{n+1}"] & {} \\ {} \arrow[r] & R^n\, S(G) \arrow[r] & R^n\, S(E) \arrow[r, "\partial"] & R^{n+1}\, S(F) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Si $(V, \mathcal{a})$ est un espace topologique annelé et si U est un sous-espace de V on désignera par $H^n(U, F)$ la valeur sur F de $R^n\,\Gamma(U, F)$.

$\underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{O}}(F, G)$ désignera le n-ième foncteur dérivé du foncteur $G \Longrightarrow \underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(F, G)$

$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(F, G)$ sera la valeur sur (F, G) de $R^n \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G)$, $\mathrm{Hom}\ (F, G)$ étant considéré comme foncteur de G seulement.

Il est clair que $\underset{\sim}{\mathrm{Ext}}^n_{\mathcal{O}}(F, G)$ s'identifie au faisceau engendré par le préfaisceau :

$$U \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}|U}(F|U, G|U)$$

Ces derniers faisceaux sont en effet un foncteur cohomologique de G, nul si G est injectif et on retrouve $\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}}(F, G)$ pour $n = 0$.

5. La résolution de Čech d'un faisceau.

Nous considérerons encore dans ce paragraphe des espaces topologiques annelés arbitraires. Si $(V, \mathcal{O})$ est un tel espace, si F est un $\mathcal{O}$-module et si E est un sous-espace de V, nous noterons F_E l'image directe dans V du $\mathcal{O}|E$-module $F|E$ défini sur E. Le foncteur $F \Longrightarrow F_E$ est exact à gauche, et les applications de restriction $\rho_U : F(U) \longrightarrow F(E \cap U) = F_E(U)$ définissent un morphisme ρ_E du foncteur identité $F \Longrightarrow F$ dans le foncteur $F \Longrightarrow F_E$. Nous nous bornerons désormais au cas où E est un ouvert de V.

Soit $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de V et convenons de noter F_i au lieu de F_{U_i}, F_{ij} au lieu de $(F_i)_j \ldots$, ρ_i au lieu de ρ_{U_i}. Si $\mathcal{C}$ désigne la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}$-modules, nous sommes donc en présence de la situation suivante :

On s'est donné une catégorie abélienne $\mathcal{C}$ avec produits infinis, une famille de foncteurs $(F \Longrightarrow F_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$, pour tout $i \in I$ un morphisme ρ_i du foncteur identité dans le foncteur $(F \Longrightarrow F_i)$, pour tout couple (i, j) un isomorphisme ρ_{ij} du foncteur $(F \Longrightarrow F_{ij})$ dans le foncteur $(F \Longrightarrow F_{ji})$ tel que $\rho_{ij} \circ \rho_j \circ \rho_i = \rho_i \circ \rho_j$.

Une telle situation permet de définir un foncteur $\mathcal{C}^*$ défini sur $\mathcal{C}$ et à valeurs dans les complexes sur $\mathcal{C}$: pour cela munissons l'ensemble d'indexation I d'un ordre total, et posons $\mathcal{C}^n(F) = \prod_{i_0 < i_1 < \ldots < i_n} F_{i_0 i_1 \ldots i_n}$, où F est un objet de $\mathcal{C}$ et où le produit porte sur toutes les combinaisons de $n + 1$ indices. Si de même $p_{i_0 \ldots i_n}$ désigne la projection de $\mathcal{C}^n(F)$ sur $F_{i_0 i_1 \ldots i_n}$, alors $\rho_{i_k} \circ p_{i_0 \ldots \hat{i}_k \ldots i_{n+1}}$ est un morphisme de $\mathcal{C}^n(F)$ dans

$F_{i_0\, i_1 \ldots \hat{\imath}_k \ldots i_{n+1}\, i_k}$.

On notera $d^n_{i_0 \ldots i_{n+1}}$ le composé du morphisme $\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \rho_{i_k} \circ p_{i_0 \ldots \hat{\imath}_k \ldots i_{n+1}}$ et de l'isomorphisme canonique de $F_{i_0\, i_1 \ldots \hat{\imath}_k \ldots i_{n+1}\, i_k}$ sur $F_{i_0\, i_1 \ldots i_k \ldots i_{n+1}}$ (La suite $i_0 , \ldots , \hat{\imath}_k , i_{n+1}$ désigne la suite $i_0 , \ldots , i_{n+1}$ dont on a retiré l'indice i_k). On définit ainsi un morphisme <u>cobord</u> :

$$d^n = \prod_{i_0 < \cdots < i_{n+1}} d^n_{i_0 \ldots i_{n+1}} \; : \; \mathcal{C}^n(F) \longrightarrow \mathcal{C}^{n+1}(F) \quad .$$

On vérifie sans peine que $d^{n+1} \circ d^n = 0$ et la suite $(\mathcal{C}^n(F) , d_n)$ est un complexe sur $\mathcal{C}$ que, suivant les folklores, on appelle <u>complexe</u> (alterné) <u>de Čech de</u> F , complexe de l'algèbre extérieure, ou complexe de Koszul. Il est clair que si l'on avait muni l'ensemble I d'un ordre total différent on aurait obtenu un complexe isomorphe.

6. <u>Un exemple didactique</u>.

Nous allons donner à la théorie générale un exemple pour escorte : l'exemple des faisceaux cohérents sur la <u>droite projective</u> P^1 . On désignera par U le complémentaire du point à l'infini, par V le complémentaire de l'origine. Si K est le corps de base, algébriquement clos, l'anneau des coordonnées de U sera $A = K[X]$, celui de V sera $B = K[\frac{1}{X}]$, celui de $U \cap V$ sera $C = K[X , \frac{1}{X}]$.

Si F est un faisceau algébrique cohérent sur P^1 , la restriction de F à U (resp. V , resp. $U \cap V$) est associée à un A-module M (resp. un B-module N , resp. un C-module P). On a en outre des morphismes de restriction

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "\rho"] & & N \arrow[dl, "\sigma"'] \\ & P & \end{tikzcd}$$

compatibles avec les injections d'anneaux

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "i"'] & & B \arrow[dl, "j"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Enfin ρ (resp. σ) induit un isomorphisme de $M \otimes_A C$ sur P (resp. de $N \otimes_B C$ sur P). Réciproquement F est entièrement décrit par la donnée de M, P, N, ρ, σ.

On voit facilement que le support de F est réduit à un nombre fini de points si et seulement si les modules M, P et N sont des modules de torsion. Plus généralement, les modules M, N et P étant sommes directes de modules de torsion et de modules libres, le faisceau F sera somme directe de faisceaux ponctuels (i.e. dont le support est réduit à un point) et d'un faisceau localement libre (i.e. dont les restrictions à U et V sont associées à des modules libres). Nous allons supposer que F est localement libre.

Dans ce cas l'image par ρ d'une base de M est une base, soit α, de P. De même l'image par σ d'une base de N est une base, soit β, de P et le faisceau F est entièrement décrit par la donnée de P et des bases α et β. En fait $GL(n, A)$ opère sur les bases α (on suppose que α a n éléments), $GL(n, B)$ opère sur les bases β et deux couples de bases (α, β) et (α', β') définissent des faisceaux isomorphes si et seulement s'il existe $g \in GL(n, A)$, $h \in GL(n, B)$, $k \in GL(n, C)$ tels que $\alpha' = k.g\,\alpha$, $\beta' = k.h.\beta$.

Voyons en particulier le cas où $n = 1$. Alors $P = C = k[X, \frac{1}{X}]$. Les bases α et β se réduisent à des éléments inversibles, soit $\alpha = \varkappa X^a$, $\beta = \lambda X^b$; $\varkappa, \lambda \in K$; $a, b \in \mathbb{Z}$. En fait on peut toujours supposer que $\varkappa = \lambda = 1$, $a = 0$, $b = p \in \mathbb{Z}$. Si $\mathcal{O}$ désigne le faisceau des germes de fonctions régulières sur P^1, on désignera par $\mathcal{O}(p)$ le faisceau défini par les conditions

$$M = A\ ,\quad N = B\ ,\quad P = C\ ,\quad \rho(1_A) = 1_C\ ,\quad \rho(1_B) = X^p.1_C \quad .$$

Alors $\mathcal{O}$ est isomorphe à $\mathcal{O}(0)$ et, quand p parcourt $\mathbb{Z}$, $\mathcal{O}(p)$ parcourt les types de faisceaux localement isomorphes à $\mathcal{O}$.

GROTHENDIECK et SESHADRI ont montré que tout faisceau algébrique cohérent localement libre sur P^1 était somme directe de faisceaux isomorphes à l'un des $\mathcal{O}(p)$. Cela signifie que si α et β sont deux bases de $P = C^n$, alors ilexiste $g \in GL(n, A)$, $h \in GL(n, B)$ et n nombres entiers $p_1 \dots p_n$ satisfaisant à la condition suivante :

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est la base de C^n transformée de α par g, alors $(X^{p_1} e_1, \dots, X^{p_n} e_n)$ est la base de C^n transformée de β par h. Si l'on s'intéresse à l'automorphisme k de C^n qui applique α sur β, cela signifie que k est de la forme :

$$k = h^{-1}.d.g \quad ,$$

où $g \in GL(n, A)$, $h \in GL(n, B)$, $k \in GL(n, C)$ et où d est un élément diagonalisable de $GL(n, C)$. Il serait évidemment intéressant d'avoir une démonstration directe de tels phénomènes.(*)

Voyons finalement quelles sont les sections du complexe de Čech de $\mathfrak{A}(p)$ associé au recouvrement $P^1 = U \cup V$:

$$\Gamma(C^o(\mathfrak{A}(p))) = A \oplus B \;, \quad \Gamma(C^1(\mathfrak{A}(p))) = C \;,$$

$$\Gamma(d^o)(m, n) = m - X^p n \quad \text{et} \quad \Gamma(C^i(\mathfrak{A}(p))) = 0 \quad \text{si} \quad i > 1 \;.$$

On en déduit facilement les groupes de cohomologie du complexe $\Gamma(C^*(\mathfrak{A}(p)))$:

H^o est formé des couples $(P(X), -\frac{P(X)}{X^p})$, où $P(X)$ est un polynôme en X de degré inférieur ou égal à p. Ainsi H^o est un K-espace vectoriel de dimension nulle si $p < 0$, de dimension $p + 1$, si $p \geqslant 0$.

H^1 est nul si $p > 0$ et admet pour base les image de $\frac{1}{X}, \frac{1}{X^2}, \ldots, \frac{1}{X^{-p-1}}$, si $p < 0$. Alors H^1 est un K-espace vectoriel de dimension $-p-1$.

Dans tous les cas $[H^o : K] - [H^1 : K] = p + 1$.

7. Propriétés du complexe de Čech.

Soit toujours $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de V, l'ensemble d'indices I étant totalement ordonné, soient $\mathfrak{A}$ un faisceau d'anneaux sur V, F un $\mathfrak{A}$-module et U la réunion des ouverts U_i. On désignera dorénavant par $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F)$ les complexes de Čech de F associés à $\mathfrak{U}$.

Le produit des morphismes canoniques de F_U dans F_i définit alors un morphisme $\varepsilon : F_U \to \prod_i F_i$, et la suite suivante est évidemment exacte (Regarder les sections sur un ouvert) :

$$0 \longrightarrow F_U \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^o(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{d^o} \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, F)$$

On reconnait là une suite exacte qui nous est apparue tout au long des deux premiers exposés. En fait on a le résultat plus complet :

(*) Voir : "HASSE (Helmut). - Zahlentheorie. - Berlin, Akademie-Verlag, 1949" ; Wittscher Hilfssatz, p. 301.

PROPOSITION 2. - La suite

$$0 \to F_U \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{C}^{\circ}(\mathfrak{U}, F) \to \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, F) \to \dots \to \mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F) \xrightarrow{d^n} \mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{U}, F) \to \dots$$

est exacte.

Il suffit en effet de vérifier que pour tout point x de V la suite

$$0 \to (F_U)_x \xrightarrow{\varepsilon_x} (\mathcal{C}^{\circ}(\mathfrak{U}, F))_x \to \dots \to (\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F))_x \xrightarrow{d^n_x} (\mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{U}, F))_x \to \dots$$

est exacte. Pour cela nous allons exhiber un opérateur d'homotopie h_x, i.e. des applications $\mathcal{O}_x$-linéaires $h^n_x : (\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F))_x \to (\mathcal{C}^{n+1}(\mathfrak{U}, F))_x$, $n \geqslant 1$, telles que

$$d^{n-1}_x \, h^n_x + h^{n+1}_x \, d^n_x = \text{identité} \quad . \tag{6}$$

Si α_x est un élément de $(\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F))_x$, $h^n_x(\alpha_x)$ est défini de la manière suivante : on peut toujours supposer que $x \in U_i$ où i est le plus petit élément de I. Alors α_x définit une section de $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F)$ sur un ouvert $U' \subset U_i$, soit $\alpha = (\alpha_{i_o \dots i_n})$; on posera $\beta = (\beta_{i_o \dots i_{n-1}}) = (\alpha_{i\, i_o \dots i_{n-1}})$. Il est alors clair que

$$(d\beta)_{i_o \dots i_n} = \sum (-1)^k \beta_{i_o \dots \hat{i}_k \dots i_n}$$

$$= \sum (-1)^k \alpha_{i\, i_o \dots \hat{i}_k \dots i_n} \quad .$$

Par définition $h^n_x(\alpha_x)$ sera l'image de β dans $(\mathcal{C}^{n-1}(\mathfrak{U}, F))_x$. Alors $h^{n+1}_x \, d^n_x \, \alpha_x$ sera l'image dans $(\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F))_x$ de

$$h^{n+1} d^n \alpha = ((d\alpha)_{i\, i_o \dots i_n}) = (\alpha_{i_o \dots i_n} - \sum_k (-1)^k \alpha_{i i_o \dots \hat{i}_k \dots i_n})$$

On vérifie que $d^{n-1} h^n \alpha + h^{n+1} d^n \alpha = \alpha$, d'où l'égalité (6).

Nous nous servirons encore de quelques autres propriétés du complexe de Čech :

a. La correspondance $F \Rightarrow \mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, F)$ est évidemment fonctorielle et le foncteur est exact à gauche. On construit facilement les foncteurs dérivés à l'aide des dérivés du foncteur section. Nous verrons plus loin un cas où ces foncteurs dérivés sont nuls.

b. Si F est un faisceau injectif, chaque $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F)$ est un faisceau injectif : cela résulte de la définition et des propriétés des faisceaux injectifs.

On est ainsi dans la situation décrite dans le paragraphe 2. Si S est un foncteur covariant défini sur la catégorie $\mathcal{C}$ des $\mathcal{O}$-modules, à valeur dans une catégorie abélienne $\mathcal{D}$, alors $(S(\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F)), S(d^n))_{n\geqslant 0}$ est, pour tout $\mathcal{O}$-module un complexe de $\mathcal{D}$, dont on désignera les objets de cohomologie par $S^n(\mathfrak{U}, F)$. "Les $S^n(\mathfrak{U}, F)$ sont manisfestement fonctoriels en F ", et la construction du paragraphe 2 fournit des morphismes de foncteurs

$$\varphi^n : S^n(\mathfrak{U}, F) \rightarrow R^n S(F)$$

En outre si $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$ est exact, et si les suites

$$0 \rightarrow S(\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F)) \rightarrow S(\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, G)) \rightarrow S(\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, H)) \rightarrow 0$$

partagent le même bonheur d'être exactes, on a des diagrammes commutatifs

$$(7) \qquad \begin{array}{ccccc} S^n(\mathfrak{U}, G) & \rightarrow & S^n(\mathfrak{U}, H) & \xrightarrow{\partial} & S^{n+1}(\mathfrak{U}, F) \\ \downarrow \varphi^n_G & & \downarrow \varphi^n_H & & \downarrow \varphi^{n+1}_F \\ R^n S(G) & \longrightarrow & R^n S(H) & \xrightarrow{\partial} & R^{n+1} S(F) \end{array}$$

Ceci a lieu en particulier si F est $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U})$-acyclique pour tout n, et si $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F)$ est S-acyclique pour tout n ; dans ce cas φ^{n+1}_F est de plus un isomorphisme.

Dernière remarque : on notera $H^n(\mathfrak{U}, F)$ au lieu de $\Gamma^n(\mathfrak{U}, F)$. Par exemple si $(V, \mathcal{O})$ est le spectre premier $(V(A), \mathfrak{A})$ d'un anneau commutatif et si le faisceau F est quasi-cohérent, on pourra prendre pour $\mathfrak{U}$ un recouvrement fini par des ouverts spéciaux. Il résulte alors de la construction des faisceaux $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F)$ que ceux-ci sont quasi-cohérents, et comme la suite

$$0 \rightarrow F \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, F) \rightarrow \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, F) \rightarrow$$

est exacte, la suite des sections est exacte. Autrement dit, on a la proposition

PROPOSITION 3. - <u>Si</u> $\mathfrak{U}$ <u>est un recouvrement fini du spectre premier</u> $(V(A), \mathfrak{A})$ <u>par des ouverts spéciaux et si</u> M <u>est un</u> A-<u>module, alors</u> $H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{M}) = M$ <u>et</u> $H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{M}) = 0$, <u>si</u> $n > 0$.

Cette propriété est due à Serre, et de la nullité des groupes $H^n(\mathfrak{U}, \mathfrak{M})$ on va déduire la nullité des $h^n(V, \mathfrak{M})$.

8. Le cas des variétés algébriques.

La proposition 3 reste évidemment valable si $(V, \mathcal{O})$ est un ensemble algébrique affine et si $\mathfrak{U}$ est un recouvrement par un nombre fini d'ouverts affines. A partir de maintenant $(V, \mathcal{O})$ sera presque toujours un ensemble algébrique sur un corps algébriquement clos muni du faisceau des germes de fonctions régulières ; dans ce cas $\mathfrak{U}$ sera un recouvrement de V par un nombre fini d'ouverts affines U_i . Accessoirement $(V, \mathcal{O})$ sera un spectre premier d'anneau commutatif et $\mathfrak{U}$ un recouvrement fini par des ouverts spéciaux.

THÉORÈME 1. - *Si $\varphi : V \to W$ est un morphisme d'ensembles algébriques, si F est un faisceau algébrique quasi-cohérent, si enfin $\mathfrak{U}$ est un recouvrement de V par un nombre fini d'ouverts affines, alors les faisceaux $\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F)$ sont φ_*-acycliques (où φ_* désigne le foncteur image directe).*

Le théorème 1 signifie que les morphismes φ^n , explicités dans le paragraphe 5, qui vont des faisceaux de cohomologie du complexe $\varphi_*(\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F))$ dans les faisceaux dérivés $R^n \varphi_*(F)$, sont des isomorphismes. En outre les cobords ∂ se calculent à l'aide des complexes de Čech (voir le diagramme (7)) car les foncteurs $\varphi_*(\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F))$ sont exacts sur les faisceaux algébriques quasi-cohérents de V . Pour le voir nous aurons besoin du

LEMME 3. - *Si $\varphi : V \to W$ est un morphisme d'ensembles algébriques et si V est affine, alors l'image réciproque de tout ouvert affine est un ouvert affine.*

En effet le graphe $\Gamma \subset V \times W$ de φ est fermé dans $V \times W$, et si $U \subset W$, $\varphi^{-1}(U)$ est "isomorphe" à $\Gamma \cap (V \times U)$; or, si U est un ouvert affine, $V \times U$ est un ouvert affine de $V \times W$ et $\Gamma \cap (V \times U)$ est un sous-ensemble algébrique fermé d'un ensemble affine ; c'est donc un ensemble affine,

C. Q. F. D.

Donnons-nous donc une suite exacte $0 \to F \to G \to H \to 0$ de faisceaux quasi-cohérents de V et montrons que les suites

$$0 \to \varphi_*(F_{i_0 \dots i_n}) \to \varphi_*(G_{i_0 \dots i_n}) \to \varphi_*(H_{i_0 \dots i_n}) \to 0$$

sont exactes. Mais $\varphi_*(F_{i_0 \dots i_n})$ est l'image directe dans W du faisceau quasi-cohérent $F|U_{i_o\dots i_n}$ sur l'ouvert affine $U_{i_o\dots i_n}$. Le résultat est donc une conséquence du lemme 3 et de l'exposé 2.

Nous démontrerons le théorième 1 dans le paragraphe 8 comme conséquence du

THÉORÈME 1' (SERRE-CARTAN-GROTHENDIECK). - Si $(V(A), \mathcal{O})$ est le spectre premier de l'anneau commutatif A et si F est un faisceau algébrique quasi-cohérent de $(V(A), \mathcal{O})$, alors $H^n(V(A), F) = 0$ si $n > 0$.

On va renvoyer toutes ces démonstrations au paragraphe 8 et s'intéresser d'abord aux corollaires des théorèmes 1 et 1'.

Si l'on considère d'abord le cas où W est réduit à un point et où φ se réduit à l'application constante, le foncteur image directe s'identifie au foncteur section Γ. Donc :

COROLLAIRE 1. - Si V est un ensemble algébrique, $\mathcal{U}$ un recouvrement fini de V par un nombre fini d'ouverts affines et F un faisceau quasi-cohérent, alors la suite exacte

$$0 \to F \to \mathcal{C}^o(\mathcal{U}, F) \to \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, F) \to \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, F) \to \dots$$

est une résolution finie de F par des faisceaux quasi-cohérents Γ-acycliques.

Ce corollaire signifie que $H^n(\mathcal{U}, F)$ s'identifie à $H^n(V, F)$ quand F est un faisceau quasi-cohérent. En particulier $H^n(V, F)$ est nul pour tous les faisceaux quasi-cohérents dès que n est assez grand (plus grand que le nombre d'ouverts de $\mathcal{U}$). En fait, GROTHENDIECK a démontré (et la démonstration est simple) que $H^n(V, F) = 0$ dès que $n > \dim V$ et ceci quel que soit le faisceau de groupes abéliens F (voir [2], Chapitre II, 4.15).

De la même manière $R^n \varphi_*(F) = 0$ si $n > \dim V$, quel que soit le faisceau de groupes abéliens F et le morphisme $\varphi : V \to W$. En effet les foncteurs $R^n \varphi_*$ sont reliés de manière simple au foncteur section :

Soit $\varphi : (V, \mathcal{A}) \to (W, \mathcal{B})$ un morphisme d'espaces topologiques annelés et considérons, pour tout $\mathcal{A}$-module F le faisceau $R^n(F)$ de W engendré par le préfaisceau

$$U \to H^n(\varphi^{-1}(U), F),$$

les opérations de restriction étant évidentes. Alors la suite des R^n définit évidemment un foncteur cohomologique nul sur les faisceaux injectifs. En outre

R^o s'identifie à φ_*. Il en résulte que R^n s'identifie à $R^n \varphi_*$.

COROLLAIRE 2. - Si V est un ensemble algébrique, $\mathfrak{U}$ un recouvrement fini de V par des ouverts affines, alors les foncteurs dérivés du foncteur de Čech $F \Rightarrow \mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F)$ sont nuls sur les faisceaux algébriques quasi-cohérents.

En effet il est à peu près clair que le faisceau $R^p\, \mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F)$ est engendré par le préfaisceau :

$$U \longrightarrow \prod_{i_o < \dots < i_n} H^p(U \cap U_{i_o} \cap \dots \cap U_{i_n}, F)$$

En particulier si U est affine les "sections de ce préfaisceau sur U" sont nulles et le faisceau engendré est zéro (bien entendu $p > 0$).

COROLLAIRE 3. - Si $\varphi : V \to W$ est un morphisme d'ensembles algébriques, si l'image réciproque de tout ouvert affine est un ouvert affine, si enfin F est un faisceau algébrique quasi-cohérent, alors $R^n \varphi_*(F) = 0$ si $n > 0$.

En effet $R^n \varphi_*(F)$ est engendré par le préfaisceau :

$$U \longrightarrow H^n(\varphi^{-1}(U), F),$$

et $H^n(\varphi^{-1}(U), F)$ est nul si $n > 0$ et si U est affine.

COROLLAIRE 4. - Sous les hypothèses du corollaire 3, $H^n(V, F)$ s'identifie canoniquement à $H^n(W, \varphi_*(F))$.

En effet soit $\mathfrak{U}'$ un recouvrement de W par un nombre fini d'ouverts affines et $\mathfrak{U}$ le recouvrement de V image réciproque de $\mathfrak{U}'$.

Alors $\Gamma(\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}', \varphi_*(F))) = \Gamma(\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F))$, d'où le résultat.

COROLLAIRE 5. - Si $\varphi : V \to W$ est un morphisme d'ensembles algébriques et si F est un faisceau quasi-cohérent de V, alors les faisceaux $R^q \varphi_*(F)$ sont quasi-cohérents. En outre, si U' est un ouvert affine de W, alors $\Gamma(U', R^q \varphi_*(F)) \simeq H^q(\varphi^{-1}(U'), F)$.

En effet les $R^q \varphi_*(F)$ sont les faisceaux de cohomologie du complexe $\varphi_*(\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, F))$ qui est formé de faisceaux quasi-cohérents (L'image directe d'un faisceau quasi-cohérent est un faisceau quasi-cohérent). Pour la dernière égalité on remarque simplement que, U' étant affine, et le complexe $\varphi_*(\mathcal{C}^*(\mathfrak{U}, F))$ étant quasi-cohérent, les suites exactes se reflètent sur les sections : ainsi $\Gamma(U', R^q \varphi_*(F))$ est le q-ième groupe de cohomologie de $\Gamma(U, \varphi_*(\mathcal{C}^* \ldots))$.

COROLLAIRE 6. - <u>Si</u> V <u>est le spectre premier d'un anneau</u> A , <u>si</u> M <u>et</u> N <u>sont deux</u> A-<u>modules, alors</u> $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ <u>s'identifie canoniquement à</u> $\mathrm{Ext}^n_A(M , N)$.

En effet, soit $0 \to \mathcal{M} \to I^0 \to I^1 \to I^2 \to \ldots$ une résolution de $\mathcal{M}$ par des faisceaux injectifs. Comme $\mathcal{M}$ est Γ-acyclique, la suite des sections est exacte :

$$0 \to M \to \Gamma(V , I^0) \to \Gamma(V , I^1) \to \Gamma(V , I^2) \to \ldots$$

En outre les $\Gamma(V , I^p)$ sont des A-modules injectifs (voir le paragraphe 1) et

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{M}, I^n) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(M , \Gamma(I^n)) ,$$

d'où le résultat.

COROLLAIRE 7. - <u>Si</u> $(V , \mathcal{O})$ <u>est un ensemble algébrique</u> (resp. <u>le spectre premier d'un anneau noethérien</u> A), <u>si</u> F <u>est cohérent et</u> G <u>quasi-cohérent,</u> <u>si</u> U <u>est un ouvert affine de</u> V (resp. <u>un ouvert spécial</u>), <u>alors</u> $\Gamma(U , \underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{O}}(F , G))$ <u>s'identifie à</u> $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}|U}(F|U , G|U)$. <u>En particulier</u> $\underline{\mathrm{Ext}}_{\mathcal{O}}(F , G)$ <u>est quasi-cohérent, et il est cohérent si</u> G <u>l'est.</u>

Il suffit de faire la démonstration dans le cas où V est un spectre premier et où $U = U_f$. Il s'agit de montrer qu'alors le préfaisceau : $U \to \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}|U}(F|U , G|U)$ est un faisceau, c'est-à-dire qu'on a les égalités :

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}|U_f}(F|U_f , G|U_f) \simeq (\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(F , G))_f$$

Mais si F et G sont associés aux modules M et N , le premier groupe vaut $\mathrm{Ext}^n_{A_f}(M_f , N_f)$, en vertu du corollaire 6, et le deuxième groupe vaut $(\mathrm{Ext}_A(M , N))_f$. Il est classique que ces deux groupes coïncident (Prendre une résolution projective de M par des modules libres de type fini).

On va maintenant s'intéresser au calcul de $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(F , G)$ dans le cas général. On supposera pour cela que le faisceau F admet une résolution gauche par des faisceaux localement libres (Le faisceau quasi-cohérent L est dit localement libre si pour tout x de V , le module L_x est libre ; si V est affine cela signifie que L est associé à un module projectif) :

$$\to L_n \xrightarrow{d_n} L_{n-1} \to \dots \to L_o \to F \to 0$$

SERRE et GROTHENDIECK ont démontré qu'il existait toujours une telle résolution si F était cohérent et si V était soit quasi-projective (i.e. isomorphe à un sous-ensemble localement fermé d'un espace projectif).

Dans ces conditions on est en présence d'une résolution gauche de F et, pour tout recouvrement affine fini $\mathfrak{U}$ de V, d'une résolution droite de G, la résolution de Čech. Ceci permet de définir un bicomplexe $K^{p,q}$ (voir CARTAN-EILENBERG, Chapitre IV, 5) à l'aide des formules :

$$K^{p,q} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L_p\ ,\ \mathcal{C}^q(\mathfrak{U}, G))\ ,$$

les dérivations partielles étant

$$d_1^{p,q} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L_p\ ,\ d^q)\ :\ K^{p,q} \to K^{p,q+1}$$

$$d_2^{p,q} = (-1)^{p+q}\, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(d_p\ ,\ \mathcal{C}^q(\mathfrak{U}, G))\ :\ K^{p,q} \to K^{p+1,q}$$

Alors la dérivation totale $d_1 + d_2$ fait de la suite $(K^n)_{n \geq 0} = (\bigoplus_{p+q=n} K^{p,q})_{n \geq 0}$ un complexe, et on a le

COROLLAIRE 8. - Les groupes de cohomologie du complexe (K^n) sont canoniquement isomorphes aux groupes $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(F\ ,\ G)$.

En effet il est d'abord clair que le complexe K^* est fonctoriel en G ; nous noterons donc $K^*(G)$. En outre, comme le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F\ ,\ G)$ est exact à gauche, $H^o(K^*(G))$ s'identifie à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F\ ,\ G)$. Nous allons montrer maintenant que $H^n(K^*(I)) = 0$ si $n > 0$ et si I est un faisceau injectif :

Considérons en effet les deux suites spectrales du bicomplexe :

$$H^q_{II}\, H^p_I(K^*(I)) \Rightarrow H^n(K^*(I))$$

$$H^p_I\, H^q_{II}(K^*(I)) \Rightarrow H^n(K^*(I))$$

Comme I est injectif, les faisceaux $\mathcal{C}^q(\mathfrak{U}\ ,\ I)$ sont injectifs, et il en résulte que les suites

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F\ ,\ \mathcal{C}^q) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L^o\ ,\ \mathcal{C}^q) \to \dots \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L^p\ ,\ \mathcal{C}^q) \dots$$

sont exactes, autrement dit que $H^p_I(K^*(I)) = 0$ pour $p > 0$, donc que la première suite spectrale dégénère, que $H^n(K^*(I))$ s'identifie donc à $H^n_{II}\ H^o_I(K^*(I))$. Enfin, comme la suite exacte $0 \to I \to \mathcal{C}^o(\mathfrak{U}, I) \to \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, I) \to \dots$ ne comporte que des objets injectifs, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F , G)$ la conserve et finalement $H^n(K^*(I)) = 0$ si $n > 0$, $H^o(K^*(I)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F , I)$. (On ne s'est servi ni de la deuxième suite spectrale ni du fait que la résolution de F était localement libre).

En second lieu nous allons démontrer que les foncteurs $G \Longrightarrow K^n(G)$ sont acycliques sur les faisceaux quasi-cohérents. Il suffit d'ailleurs de démontrer qu'il en est ainsi pour les foncteurs $G \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L_p , G_{i_o \dots i_n})$, i.e. pour les foncteur $G \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}|U}(L_p|U , G|U)$, où U est un ouvert affine de V . Et ce dernier fait est à peu près évident si l'on sait que $\Gamma(U , L_p)$ est projectif et que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}|U}(L_p|U , G|U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(L_p , G_U) = \mathrm{Hom}_{\Gamma(U, \mathcal{O})}(\Gamma(U , L_p) , \Gamma(U , G)) .$$

On peut maintenant démontrer le corollaire 8 :

soit $0 \to G \to I^o \to I^1 \to I^2 \to \dots$ une résolution injective de G et considérons le bicomplexe $K^n(I^m)$ muni de ses deux suites spectrales :

$$H^n_{II}\ H^m_I \Longrightarrow H^n(K^*(I^*))$$

$$H^m_I\ H^n_{II} \Longrightarrow H^n(K^*(I^*))$$

D'après ce que l'on a vu $H^n_{II}(K^*(I^m))$ est nul pour $n > 0$, et la seconde suite spectrale dégénère, identifiant $H^n(K^*(I^*))$ à $H^m_I\ H^o_{II}$, c'est-à-dire aux groupes de cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F , I^m)$.

Ainsi $H^n \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(F , G)$.

D'autre part, comme les foncteurs K^n sont acycliques sur G , on a les suites exactes :

$$0 \to K^n(G) \to K^n(I^o) \to \dots \to K^n(I^m) \to \dots$$

La première suite spectrale dégénère aussi et identifie les H^n au groupes de cohomologie de $K^*(G)$. Le corollaire 8 est ainsi démontré.

Le corollaire 8 s'applique en particulier quand F est localement libre, et il existe dans ce cas une résolution localement libre bien connues de F! si F est le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}$ on trouve ainsi que $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, G)$ est le n-ième-groupe de cohomologie du complexe $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, C^n(\mathcal{U}, G)) \simeq \Gamma(C^n(\mathcal{U}, G))$. On découvre de cette manière, si on ne le savait pas déjà, que $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, G)$ s'identifie à $H^n(V, G)$ (Bien entendu cette dernière propriété est triviale et elle est valable pour tous les espaces topologiques annelés ; car $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, G)$ est manifestement un foncteur cohomologique universel en G et il se réduit à $\Gamma(V, G) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, G)$ en "dimension" 0).

Il resterait à regarder la situation suivante : $\varphi : V \to W$ est un morphisme d'ensembles algébriques, F est un faisceau de V, G est un faisceau de W, et l'on s'intéresse à la répercussion sur les " Ext " de la formule

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\varphi^*(G), F) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(G, \varphi_*(F))$$

Cette situation généralise évidemment celle du théorème 1 et des corollaires 3, 4 et 5. Cependant si l'on veut éviter les situations trop compliquées (i.e. celles qui font intervenir des suites spectrales), il convient de supposer que les foncteurs φ^* et φ_* sont "exacts".

De tels cas existent dans la nature, et en particulier dans le

COROLLAIRE 9. - Si U est un ouvert affine de V, si G est un faisceau algébrique quelconque de V et F un faisceau algébrique quasi-cohérent de U, alors on a des isomorphismes canoniques :

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}|U}(G|U, F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(G, F_U) \quad ,$$

où F_U désigne, comme toujours l'image directe de F dans V.

En effet si $0 \to F \to I^0 \to I^1 \to \dots$ est une résolution injective de F, alors $0 \to F_U \to I^0_U \to I^1_U \to \dots$ est une résolution injective de F_U.

9. L'exemple didactique.

Si $(V, \mathcal{O})$ est la droite projective P^1 munie du faisceau des germes de fonctions régulières, on sait que tout faisceau algébrique cohérent est somme directe de faisceau ponctuels et de faisceaux isomorphes aux $\mathcal{O}(p)$. On va calculer les Ext de tels faisceaux :

a. $\mathrm{Ext}(\mathcal{O}(q), \mathcal{O}(p))$: $\mathcal{O}(q)$ est localement libre et il suffit de prendre pour $\mathcal{O}(p)$ la résolution de Čech du paragraphe 4 :

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(q), \mathcal{C}^0(\mathfrak{U}, \mathcal{O}(p))) \simeq A \oplus B$$

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(q), \mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, \mathcal{O}(p))) \simeq C$$

$$d(m, n) = m - X^{p-q} n \quad .$$

Ainsi $\mathrm{Ext}^k(\mathcal{O}(q), \mathcal{O}(p)) = \mathrm{Ext}^k(\mathcal{O}(0)), \mathcal{O}(p-q))$

$$= H^k(P^1, \mathcal{O}(p-q)) ,$$

et on peut se reporter aux résultats du paragraphe 4.

b. Lorsque F ou G est un faisceau ponctuel le calcul des $\mathrm{Ext}(F, G)$ est simple modulo les théorèmes généraux.

Lorsque G est ponctuel, on est ramené au cas affine, et donc au cas des modules par le corollaire 9.

Lorsque F est ponctuel, par exemple lorsque F est concentré à l'origine, F s'idendtifie au faisceau ${}_U F$ (si L est un faisceau de $(V, \mathcal{O})$ et U un ouvert de V, on désigne par ${}_U L$ le faisceau nul sur $V - U$ et dont la restriction à U vaut $L|U$). Mais on a alors le lemme :

LEMME. - <u>Si</u> U <u>est un ouvert d'un espace topologique annelé</u> $(V, \mathcal{O})$ et <u>si</u> L <u>et</u> M <u>sont deux faisceaux de</u> $\mathcal{O}$<u>-modules, on a un isomorphisme canonique</u> $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}|U}(L|U, M|U) \simeq \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}({}_U L, {}_U M)$.

En effet les deux foncteurs cohomologiques universels coïncident pour $n = 0$.

On voit ainsi, dans le cas de la droite projective (qui est une variété non singulière) que $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(F, G) = 0$ si $n > 1$ et si F et G sont deux faisceaux cohérents. Il devrait bien être vrai, que pour une variété non singulière $(V, \mathcal{O})$ et deux faisceaux quasi-cohérents F et G, $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}}(F, G) = 0$, si $n > \dim V$. Malheureusement, le corollaire 8 ne nous donne aucun renseignement à ce sujet.

10. <u>La démonstration du théorème 1</u>.

a. <u>Démonstration du théorème 1'</u>. - Nous savons déjà que la cohomologie de Čech est nulle (pour $n > 0$) et nous voulons montrer que $H^n(V(A), F) = 0$, $n > 0$. La démonstration qui suit est due à CHEVALLEY :

LEMME 4. - Si G est un faisceau algébrique de $(V(A), \mathcal{O})$, et si $H^1(\mathfrak{U}, G)=0$ pour tout recouvrement fini de $V(A)$ par des ouverts spéciaux, alors $H^1(V(A), G) = 0$.

Il s'agit de montrer que pour toute suite exacte $0 \to G \xrightarrow{u} G' \xrightarrow{v} G'' \to 0$, la suite $0 \to \Gamma(V, G) \to \Gamma(V, G') \to \Gamma(V, G'') \to 0$ est exacte. Pour cela soit une section g'' de G'' sur V. Il existe alors un recouvrement fini $\mathfrak{U}$ de V par des ouverts spéciaux U_i, et il existe des sections g'_i de G' sur U_i dont les images par v coïncident avec g sur U_i.

Ainsi l'image par v de $g'_i - g'_j$ est nulle sur $U_i \cap U_j$. Autrement dit la cochaîne $(s_{ij}) = (g'_i - g'_j) \in \Gamma(\mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, G'))$ a une image nulle dans $\Gamma(\mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, G''))$ et appartient donc à $\Gamma(\mathcal{C}^1(\mathfrak{U}, G))$. D'autre part, sur $U_i \cap U_j \cap U_k$, on a l'égalité $s_{jk} - s_{ik} + s_{ij} = g'_j - g'_k - g'_i + g'_k + g'_i - g'_j = 0$. La cochaîne (s_{ij}) est un cocycle, et donc un cobord, d'après les hypothèses. On a donc $s_{ij} = t_i - t_j$, où (t_i) est une cochaîne de degré 0 de G. Mais alors $g'_i - t_i = g'_j - t_j$ sur $U_i \cap U_j$ et les $(g'_i - t_i)$ définissent une section g' de G' dont l'image par v est g'',

C. Q. F. D.

Démontrons maintenant le théorème 1' :

Il résulte du lemme 4 et de la construction du complexe de Čech, que si $0 \to F \to I^0 \to F^1 \to 0$ est une suite exacte et si F est quasi-cohérent, alors les suites

$$0 \to \Gamma((\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F)) \to \Gamma(\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, I^0) \to \Gamma(\mathcal{C}^n(\mathfrak{U}, F^1)) \to 0$$

sont exactes, où $\mathfrak{U}$ est un recouvrement fini de $V(A)$ par des ouverts spéciaux. On a donc des suites exactes de cohomologie de Čech (voir diagramme (7)). En particulier si I^0 est injectif, alors $H^n(\mathfrak{U}, I^0) = 0$ pour $n > 0$ et la suite exacte (7) identifie $H^{n+1}(\mathfrak{U}, F)$ et $H^n(\mathfrak{U}, F^1)$, $H^{n+1}(V, F)$ et $H^n(V, F^1)$. Ainsi $H^n(\mathfrak{U}, F^1) = 0$ pour $n > 0$, donc $H^1(V, F^1) = 0$ d'après le lemme 4 et ainsi $H^2(V, F) = 0$.

Si l'on veut montrer maintenant que $H^3(V, F) = 0$, on prend une suite exacte $0 \to F^1 \to I^1 \to F^2 \to 0$ où I^1 est injectif ; alors $H^2(V, F^1) = 0$ d'après le raisonnement précédent, mais $H^2(V, F^1) = H^3(V, F)$ ... et ainsi de suite.

b. Démonstration du théorème 1. - Il suffit de montrer que si U est un ouvert affine de V et si F est un faisceau quasi-cohérent, alors F_U est φ_*-acyclique. Mais on sait que le faisceau $R^q \varphi_*(F_U)$ est engendré par le préfaisceau

$$U' \to H^q(\varphi^{-1}(U'), F_U)$$

Le théorème 1 est donc démontré si $U = V$, car alors $\varphi^{-1}(U')$ est affine si U' l'est (lemme 3) ; $H^q(\varphi^{-1}(U'), F_U)$ est nul quand U' est affine.

Dans le cas général, soit i l'injection de U dans V et

$$0 \to F|U \to I^0 \to I^1 \to \dots$$

une résolution injective de $F|U$. Alors la suite

$$0 \to F_U \to i_*(I^0) \to i_*(I^1) \to \dots$$

est exacte (On sait déjà que $F|U$ est i_*-acyclique), et les $i_*(I^n)$ sont injectifs.

Donc $H^q(\varphi^{-1}(U'), F_U) = H^q(\Gamma(\varphi^{-1}(U'), i_*(I^*))$

$$= H^q(\Gamma(\varphi^{-1}(U') \cap U, I^*)) ,$$

et ce dernier groupe de cohomologie est nul quand U' est affine (en vertu du lemme 3 et du théorème 1').

11. Bibliographie.

Le point de départ de la théorie des faisceaux algébriques cohérents est l'étude de SERRE :

[1] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.

Malheureusement ce travail date d'une époque où l'on ne connaissait que la cohomologie de Čech ; il a été repris depuis par GROTHENDIECK, et exposé au cours d'un Séminaire peu peuplé en 1957/58. On pourra considérer que la présentation de ces exposés a été en très grosse partie "volée" à GROTHENDIECK. Elle s'adresse à des lecteurs qui connaissent la définition d'un ensemble algébrique, qui n'ont pas lu le chapitre II, 5, mais ont lu au moins les chapitres I, 1, 2, 4, 5 et II, 1, 2 de :

[2] GODEMENT (Roger). - Topologie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 13).

On a essayé d'éviter le plus possible les suites spectrales et, en particulier, une astuce de CHEVALLEY a permis d'éviter le critère de CARTAN sur l'équivalence des cohomologies (Voir [2] , II, 5, 9 et 2). Modulo les propriétés élémentaires des ensembles algébriques (Voir [3]).

[3] CHEVALLEY (Claude). - Fondements de la géométrie algébrique. - Paris, Secrétariat mathématique, 1958, multigraphié (Cours professé à la Faculté des Sciences de Paris en 1957/58).

Le chapitre I de [1] peut être considéré comme périmé, mais il n'en va pas encore de même du chapitre II (Cohomologie des variétés projectives). On peut aussi signaler un court aperçu de la théorie, et l'application à "Riemann-Roch" due à

[4] ZARISKI (Oscar). - Scientific report on the second summer institute, Part III: Algebraic sheaf theory, Bull. Amer. math. Soc., t. 62, 1956, p. 117-141.

Pour ce qui est des résultats qui vont plus loin que ce qui a été exposé ici, il faut signaler en Algèbre homologique :

[5] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[6] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sur quelques points d'algèbre homologique, Tohoku math. J., Série 2, t. 9, 1957, p. 119-221.

[7] SERRE (Jean-Pierre). - Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. 6, 1955-56, p. 1-42.

[8] SERRE (Jean-Pierre). - Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p , Symposium de Topologie algébrique [1956, Mexico], à paraître.

[9] SERRE (Jean-Pierre). - Quelques propriétés des variétés abéliennes en caractéristique p , Amer. J. Math., t. 80, 1958, p. 715-739.

[10] GROTHENDIECK (Alexandre). - Théorème de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents, Séminaire Bourbaki, t. 9, 1956/57, exposé n° 149.

[11] GROTHENDIECK (Alexandre). - Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents, Séminaire H. Cartan, t. 9, 1956/57, Quelques questions de topologie, exposé n° 2.