Séminaire Claude Chevalley

Pierre Gabriel

Faisceaux quasi-cohérents

Séminaire Claude Chevalley, tome 4 (1958-1959), exp. n° 1, p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=SCC_1958-1959__4__A1_0>

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

FAISCEAUX QUASI-COHÉRENTS

par Pierre GABRIEL

On supposera connues les définitions et les propriétés élémentaires des faisceaux de modules sur un espace topologique, c'est-à-dire [2], chapitre I, paragraphe 1, et chapitre II paragraphe 1 et 2. On appellera préfaisceau P sur une base d'ouverts $\mathfrak{B}$ d'un espace topologique X, à valeurs dans une catégorie C, la donnée :

a. pour tout ouvert U de $\mathfrak{B}$, d'un objet $P(U)$ de C, que l'on pourra encore noter $\Gamma(U, P)$

b. pour tout couple U, V d'ouverts de $\mathfrak{B}$, tels que $U \subset V$ d'un morphisme $\rho_{UV} : P(V) \to P(U)$. Le morphisme ρ_{UV} sera nommé la restriction de V à U. On suppose en outre que si $U \subset V \subset W$ sont trois ouverts de $\mathfrak{B}$ alors $\rho_{UV} \circ \rho_{VW} = \rho_{UW}$.

La construction du faisceau associé $\tilde{P}$ à un préfaisceau P se généralise aisément au cas des préfaisceaux sur une base d'ouverts. Si $\mathfrak{U} = (U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de l'ouvert $U \in \mathfrak{B}$, où $U_i \in \mathfrak{B}$, et $U_i \cap U_j \in \mathfrak{B}$ et si P est un préfaisceau d'anneaux ou de modules sur la base $\mathfrak{B}$, on conviendra de noter $H^0(\mathfrak{U}, P)$ le sous-anneau (resp. le sous-module) de $\prod_{i \in I} P(U_i)$ formé des $(X_i)_{i \in I}$ tels que $\rho_{U_i \cap U_j, U_i}(X_i) = \rho_{U_i \cap U_j, U_j}(X_j)$ pour tout couple $i, j \in I$. On a alors des applications canoniques :

$$P(U) \to H^0(\mathfrak{U}, P) \to \tilde{P}(U) \quad ;$$

si ces applications sont injectives pour tout recouvrement $\mathfrak{U}$ satisfaisant aux conditions précédentes, alors $\tilde{P}(U)$ est réunion des $H^0(\mathfrak{U}, P)$.

1. Préliminaire sur la localisation.

Soit A un anneau commutatif à élément unité. Un sous-monoïde S du monoïde multiplicatif de A (i.e. un sous-ensemble $\neq \emptyset$ de A qui avec s et t contient $s.t$) est dit <u>complet</u> s'il satisfait à la condition suivante : si $s.t \in S$, alors s et t appartiennent à S. A tout sous-monoïde multiplicatif

S, on associe un monoïde complet $\tilde{S}$ de la manière suivante : $s \in \tilde{S}$ si et seulement s'il existe un t dans A tel que $s.t \in S$. Les idéaux premiers qui rencontrent S rencontrent $\tilde{S}$ et réciproquement. En outre le complémentaire de $\tilde{S}$ dans A est réunion d'idéaux premiers (Montrer que les idéaux maximaux parmi ceux qui ne rencontrent pas $\tilde{S}$ sont premiers).

Si maintenant M désigne un A-module unitaire, S étant un sous-monoïde multiplicatif de A, on notera par M_S le groupe abélien suivant :

L'ensemble M_S est quotient de $M \times S$ par la relation d'équivalence

$$(m , s) = (n , t) \Longleftrightarrow \exists\ r \in S \text{ tel que } r(mt - ns) = 0 \ .$$

L'addition dans $M \times S$ est définie par $(m , s) + (n , t) = (mt + ns , st)$; notre relation d'équivalence est compatible avec l'addition, d'où une structure de groupe abélien sur M_S. On notera par m/s la classe de (m , s) dans M_S.

On a une application bilinéaire $A_S \otimes_{\tilde{S}} M_S \to M_S$ définie par passage aux quotients à partir de l'application $((a , s) , (m , t)) \Rightarrow (am , st)$. Faisant $M = A$, on voit que A_S est un anneau et, plus généralement, M_S est un A_S-module. L'application $\psi : m \to m/1$ de M dans M_S est compatible avec l'homomorphisme d'anneaux $\varphi : a \to a/1$ de A dans A_S (i.e. c'est un homomorphisme de groupe abélien tel que $\psi(a.m) = \varphi(a).\psi(m)$).

On vérifie en outre aisément les assertions suivantes : la correspondance $M \Rightarrow M_S$ est fonctorielle (de façon évidente). Le foncteur $M \Rightarrow M_S$ est exact (i.e. si $0 \to M \to M' \to M'' \to 0$ est une suite exacte de A-modules, alors $0 \to M_S \to M'_S \to M''_S \to 0$ est une suite exacte de A-modules) et commute avec les limites inductives (i.e. si $(M_i)_{i \in I}$ est un système inductif de A-modules, et L une limite inductive de ce système, les $(M_i)_S$ forment un système inductif de A_S-modules, et les homomorphismes $(M_i)_S \to L_S$ déduits des $M_i \to L$ définissent L_S comme limite inductive du système $((M_i)_S)$). L'application canonique $M \otimes_A A_S \to M_S$ est bijective.

Si S et T sont deux sous-monoïdes, les groupes abéliens $(M_S)_T$, $(M_T)_S$ et $M_{S.T}$ sont canoniquement isomorphes, $S.T$ désignant le monoïde composé des produits $s.t$, $s \in S$, $t \in T$. Identifiant les anneaux $(A_S)_T$, $(A_T)_S$ et $A_{S.T}$, qui sont eux-mêmes canoniquement isomorphes entre eux, les isomorphismes entre $(M_S)_T$, $(M_T)_S$ et M_{ST} sont des isomorphismes de modules.

Si S est contenu dans un sous-monoïde S' du monoïde multiplicatif de A, il y a une application canonique de M_S dans $M_{S'}$ qui fait correspondre à l'élément m_s de M_S (avec $m \in M$, $s \in S$) l'élément de $M_{S'}$ désigné par le même symbole. L'application $A_S \to A_{S'}$ est un homomorphisme d'anneaux ; l'application $M_S \to M_{S'}$ est celle qui correspond à l'application $M \otimes_A A_S \to M \otimes_A A_{S'}$ déduite de $A_S \to A_{S'}$. Si $S' = \tilde{S}$ est le plus petit monoïde complet contenant S, l'application $M_S \to M_{\tilde{S}}$ est bijective. Enfin, si S est réunion d'une famille ordonnée filtrante croissante de monoïdes S_i, M_S d'identifie à $\varinjlim M_{S_i}$.

2. Le spectre premier d'un anneau commutatif.

Soient A un anneau commutatif avec élément unité, et $V(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de A, on note $W(\mathfrak{a})$ l'ensemble des idéaux premiers qui contiennent $\mathfrak{a}$, et $U(\mathfrak{a}) = V(A) - W(\mathfrak{a})$.

Ainsi $W(\mathfrak{a}) \subset V(A)$, $U(\mathfrak{a}) \subset V(A)$, $W(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcap_i W(\mathfrak{a}_i)$,

$W(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = W(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = W(\mathfrak{a}) \cup W(\mathfrak{b})$, $U(\sum \mathfrak{a}_i) = \bigcup_i U(\mathfrak{a}_i)$,

$U(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = U(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = U(\mathfrak{a}) \cap U(\mathfrak{b})$.

L'ensemble $U(\mathfrak{a})$ croît avec $\mathfrak{a}$ et $W(\mathfrak{a})$ décroît quand $\mathfrak{a}$ croît. Enfin $W(\mathfrak{a}) = W(\mathfrak{b})$ si et seulement si tout élément de $\mathfrak{a}$ a une puissance dans $\mathfrak{b}$ et réciproquement : En effet dire que $W(\mathfrak{a}) \subset W(\mathfrak{b})$ c'est dire que tout idéal premier qui contient $\mathfrak{a}$ contient $\mathfrak{b}$, autrement dit que $\mathfrak{b}$ est contenu dans l'intersection des idéaux premiers contenant $\mathfrak{a}$ et il est classique que cette dernière intersection est formée des élements dont une puissance est dans $\mathfrak{a}$.

Les ensembles $U(\mathfrak{a})$ sont les ouverts d'une topologie de $V(A)$ et, muni de cette topologie, $V(A)$ aura le nom de <u>spectre premier de</u> A.

Si l'idéal $\mathfrak{a}$ est engendré par les (f_i), alors $U(\mathfrak{a})$ est réunion des $U((f_i)) = U_{f_i}$; comme $U_f \cap U_g = U_{fg}$, les U_f forment donc une base d'ouverts quand f parcourt les éléments de A. Tout ouvert du type U_f sera dit <u>spécial</u>. Tout ouvert spécial est <u>quasi-compact</u> : En effet si U_f est réunion des $U(\mathfrak{a}_i)$, on a $U_f = \bigcup_i U(\mathfrak{a}_i) = U(\sum \mathfrak{a}_i)$ et une puissance f^n de f appartient à $\sum_i \mathfrak{a}_i$ et donc à la somme d'un nombre fini des $\mathfrak{a}_i$.

En particulier $V = U_1$ est quasi-compact. Enfin si l'anneau A est <u>noethérien</u> toute suite croissante d'idéaux est stationnaire et il en va de même de toute

suite croissante d'ouverts. Le spectre premier est alors un espace topologique de Zariski.

3. Faisceaux quasi-cohérents sur $V(A)$.

Soit maintenant M un module unitaire sur l'anneau A . On va définir un préfaisceau $\mathfrak{M}^*$ sur la base des ouverts spéciaux de $V(A)$. Associons pour cela à tout $f \in A$ le système multiplicativement stable S_f formé du complémentaire dans A de la réunion des idéaux premiers de U_f . Le système S_f est le système multiplicativement stable complet engendré par f . On a alors l'équivalence :

$$S_f \subset S_g \Rightarrow U_f \supset U_g$$

Ceci étant, nous définirons le préfaisceau $\mathfrak{M}^*$, à l'aide des formules $\mathfrak{M}^*(U_f) = M_{S_f}$, que nous noterons encore $\mathfrak{M}_f$; si $U_f \supset U_g$, l'application de restriction $\rho : \mathfrak{M}^*(U_f) \to \mathfrak{M}^*(U_g)$ est l'application canonique de $\mathfrak{M}_{S_f}$ dans $\mathfrak{M}_{S_g}$. Ces définitions ne dépendent évidemment pas des éléments f et g qui définissent U_f et U_g ; en outre les axiomes des préfaisceaux sont satisfaits en vertu des propriétés de la localisation.

Nous noterons par $\mathfrak{M}$ le faisceau associé au préfaisceau $\mathfrak{M}^*$. Comme les A_f sont des anneaux et les M_f des A_f-modules, $\mathfrak{A}^*$ est un préfaisceau d'anneaux, $\mathfrak{M}^*$ un préfaisceau de $\mathfrak{A}^*$-modules, $\mathfrak{A}$ un faisceau d'anneaux et $\mathfrak{M}$ un faisceau de $\mathfrak{A}$-modules. En outre les foncteurs qui à M associent $\mathfrak{M}^*$ et $\mathfrak{M}$ sont exacts car il en est ainsi des foncteurs qui à M associent les M_f . On appelle faisceau algébrique sur $V(A)$ tout faisceau de modules sur le faisceau d'anneaux $\mathfrak{A}$. On appelle faisceau quasi-cohérent sur $V(A)$ tout faisceau isomorphe à un faisceau $\mathfrak{A}(M)$. Nous allons d'abord nous intéresser aux sections d'un tel faisceau sur un ouvert spécial U_f .

Pour cela on remarque d'abord que les idéaux premiers de A_f sont les images par l'application $A \to A_f$ des idéaux premiers de A qui ne continnent pas f . De plus l'application canonique ainsi définie du spectre $V(A_f)$ de A_f dans $V(A)$ est un homéomorphisme de $V(A_f)$ sur U_f . Enfin le faisceau sur $V(A_f)$ associé au module M_f s'identifie à la restriction de $\mathfrak{M}$ à U_f .

Plus généralement, si S est un système multiplicativement stable (qu'on peut supposer complet) de A , soit E_S le sous-espace topologique de $V(A)$ formé des idéaux premiers qui ne rencontrent pas S . L'application canonique $A \to A_S$ induit un homéomorphisme de $V(A_S)$ sur E_S ; si S est engendré par les f_i ,

E_S est intersection des U_{f_i} et réciproquement toute intersection d'ouverts spéciaux de $V(A)$ est du type E_S. Nous allons voir que la restriction de $\mathfrak{M}$ au sous-espace E_S s'identifie au faisceau $\mathfrak{M}_S$ associé au A_S-module M_S.

Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, on désigne par $A_{\mathfrak{p}}$ et $M_{\mathfrak{p}}$ l'anneau et le module obtenus par localisation à partir du système multiplicatif $S = A - \mathfrak{p}$.

THEOREME 1.

a. <u>Si $\mathfrak{p}$ est un point de $V(A)$, l'anneau ponctuel $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ (fibre du faisceau $\mathfrak{A}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$) est canoniquement isomorphe à $A_{\mathfrak{p}}$; identifiant $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ à $A_{\mathfrak{p}}$, le module ponctuel $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ du faisceau $\mathfrak{M}$ en $\mathfrak{p}$ est canoniquement isomorphe à $M_{\mathfrak{p}}$, donc à $M \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$.</u>

b. <u>L'application canonique de $M_f = \mathfrak{M}^*(U_f)$ dans $\mathfrak{M}(U_f)$ est un isomorphisme.</u>

La première assertion de (a) résulte de ce que

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} = \varinjlim_{U_f \ni \mathfrak{p}} \mathfrak{A}^*(U_f) = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} A_f = A_{\mathfrak{p}} \quad ;$$

la seconde assertion de (a) se démontre de la même manière.

Montrons mainteantn que l'application $M_f \to \mathfrak{M}(U_f)$ est <u>injective</u> : Comme $U_f = V(A_f)$, on peut toujours supposer que $f = 1$, $U_f = V(A)$. Le noyau de l'application $M \to \mathfrak{M}(V)$ est alors formé des m tels que $m \otimes_A 1_{A_{\mathfrak{p}}} = 0$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire des m dont l'annulateur n'est contenu dans aucun idéal premier : le noyau est donc nul.

De même l'application $M_f \to \mathfrak{M}(U_f)$ est surjective : il suffit en effet de le démontrer quand $f = 1$, $U_f = V$. D'après ce qui précède $\mathfrak{M}(V) = \Gamma(\mathfrak{M})$ est réunion des $H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{M}^*)$ quand $\mathfrak{U}$ parcourt les recouvrements finis de V par des ouverts spéciaux ; il suffit donc de montrer que l'application $M \to H^0(\mathfrak{U}, \mathfrak{M})$ est surjective pour tout recouvrement fini par des ouverts spéciaux.

Pour cela, soient (f_i), p éléments de A tels que $V = \bigcup U_{f_i}$, et soient X_i des éléments de M_{f_i} tels que X_i et X_j aient même image dans $M_{f_i \cdot f_j}$; quitte à remplacer f_i par une de ses puissances, on peut toujours supposer que X_i est de la forme m_i/f_i, où $m_i \in M$. Comme X_i et X_j ont même image dans $M_{f_i \cdot f_j}$,

$$\frac{m_i f_j - m_j f_i}{f_i f_j}$$

est nul dans $M_{f_i \circ f_j}$. Autrement dit

$$(f_i \circ f_j)^r (n_i f_j - n_j f_i) = 0 \quad \text{dans } M \text{ pour } r \text{ assez grand.}$$

D'autre part les $U_{f_i} = U_{f_i^{r+1}}$ recouvrent V, c'est-à-dire que les f_i^{r+1} engendrent A, ou que l'on a une relation de la forme $1 = \sum_{i=1}^{p} a_i f_i^{r+1}$ où $a_i \in A$. Il en résulte que si $m = \sum_i m_i a_i f_i^{r+1}$, alors

$$f_j^{r+1} m = \sum_i a_i m_i f_i^r f_j^{r+1} = \sum_i a_i n_j f_j^r f_i^{r+1} = n_j f_j^r$$

et dans M_{f_j}, on a l'égalité $X_j = m_j/f_j = m/1$ pour tout j,

C. Q. F. D.

COROLLAIRE 1. - <u>Si S est une partie multiplicativement stable de A la restriction à E_S du faisceau $\mathfrak{M}$ s'identifie au faisceau $\mathfrak{M}_S$ de $V(A_S)$ associé à M_S</u>.

Soit en effet f un élément de A. L'ouvert $E_S \cap U_f$ de E_S s'identifie alors à $E_{S \circ S_f}$, et l'on a par conséquent

$$\mathfrak{M}_S(E_S \cap U_f) = M_{S \circ S_f} = (M_S)_f = \varinjlim_{U_g \supset E_S} M_{f \circ g}$$

Les applications naturelles $M_{f \circ g} = \mathfrak{M}(U_{fg}) \longrightarrow \mathfrak{M}(E_S \cap U_f)$ se prolongent donc en une application

$$\mathfrak{M}_S(E_S \cap U_f) \longrightarrow \mathfrak{M}(E_S \cap U_f)$$

et induisant un morphisme de faisceaux :

$$\mathfrak{M}_S \longrightarrow \mathfrak{M}|E_S$$

Mais si $\mathfrak{p} \in E_S$, la fibre de $\mathfrak{M}_S$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ n'est autre que $(M_S)_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}}$ et l'application précédente induit un isomorphisme au-dessus de chaque $\mathfrak{p}$: l'application est donc un isomorphisme de faisceaux.

COROLLAIRE 2. - M_S est le module des sections de $\mathfrak{M}$ au-dessus de E_S .

COROLLAIRE 3. - Si M et N sont deux A-modules, l'application φ : $\mathrm{Hom}(M , N) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{M} , \mathfrak{N})$ définie par le foncteur $M \Rightarrow \mathfrak{M}$ est bijective.

Nous allons en effet exhiber une application inverse ψ . Pour cela soit Γ le foncteur qui à tout faisceau de $\mathfrak{A}$-modules associe son module des sections sur $V(A)$. Le foncteur Γ définit une application de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{M} , \mathfrak{N})$ dans $\mathrm{Hom}(\Gamma(\mathfrak{M}) , \Gamma(\mathfrak{N}))$, et donc, puisque ce dernier groupe est isomorphe à $\mathrm{Hom}(M , N)$ pour un isomorphisme explicité ci-dessus, une application ψ de $\mathrm{Hom}(\mathfrak{M} , \mathfrak{N})$ dans $\mathrm{Hom}(M , N)$. En fait φ et ψ sont des applications réciproques.

Il résulte de ce corollaire, et de l'exactitude du foncteur $M \Rightarrow \mathfrak{M}$ que si $u : F \to G$ est un morphisme de faisceaux quasi-cohérents, alors Ker u et Coker u sont des faisceaux quasi-cohérents.

THÉORÈME 2. - Si F est un faisceau algébrique sur $V(A)$, les propositions suivantes sont équivalentes :

a. F est quasi-cohérent.

b. Pour tout ouvert spécial U_f , l'application naturelle

$$\Gamma(V , F) \otimes_A A_f \to \Gamma(U_f , F)$$

est bijective.

c. Pour tout point $\mathfrak{p}$ de V , l'application naturelle

$$\Gamma(V , F) \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \to F_{\mathfrak{p}}$$

est bijective.

d. F est localement isomorphe à un faisceau quasi-cohérent, i.e. tout point $\mathfrak{p}$ de V possède un voisinage spécial U_f tel que $F|U_f$ soit un faisceau quasi-cohérent.

On a déjà vu que (a) $\Rightarrow$ (b) , (a) $\Rightarrow$ (c) , (a) $\Rightarrow$ (d) .

Montrons que (b) $\Rightarrow$ (a) : soit en effet $M = \Gamma(V , F)$. Alors pour tout ouvert affine U_f on a des restrictions : $M \to \Gamma(U_f , F)$ et comme $\Gamma(U_f , F)$ est un A_f-module il en résulte une application :

$$M_f = M \otimes_A A_f \to \Gamma(U_f , F) .$$

Ces applications induisent un morphisme de faisceaux : $\mathfrak{M} \to F$.

Ce morphisme sera bijectif si les applications induites $\mathfrak{M}(U_f) \to F(U_f)$ sont bijectives (ainsi (b) $\Rightarrow$ (a)) ou encore si les applications induites $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} \to F_{\mathfrak{p}}$ sont bijectives (ainsi (c) $\Rightarrow$ (a)).

Reste à montrer que (d) $\Rightarrow$ (a) . La démonstration qui suit est due à GROTHENDIECK:

On remarque d'abord que l'application $A \to A_f$ munit tout A_f-module d'une structure de A-module et associe donc à tout faisceau quasi-cohérent F sur U_f un faisceau quasi-cohérent $\overline{F}$ sur V (on reviendra plus tard sur cette opération). En outre si U_g est un ouvert affine de V , on a :

$$\Gamma(U_g , \overline{F}) = \Gamma(V , \overline{F})_g = \Gamma(U_f , F)_g = \Gamma(U_f \cap U_g , F) .$$

Donnons-nous donc un faisceau algébrique G sur V tel qu'il existe un recouvrement de V par des ouverts spéciaux U_{f_i} avec les conditions : $G|U_{f_i}$ est quasi-cohérent. Montrons alors que G est quasi-cohérent.

Puisque G est un faisceau, on a pour tout U_g une suite exacte du type :

$$0 \to \Gamma(U_g , G) \to \prod_i \Gamma(U_g \cap U_i , G) \to \prod_{i<j} \Gamma(U_g \cap U_i \cap U_j , G)$$

ou encore

$$0 \to \Gamma(U_g , G) \to \prod_i \Gamma(U_g , \overline{G|U_i}) \to \prod_{i\leq j} \Gamma(U_g , \overline{G|U_i \cap U_j})$$

Les deux derniers termes de la suite exacte sont les sections sur U_g des faisceaux associés aux modules

$$M = \prod_i \Gamma(U_i , G|U_i) \quad \text{et} \quad N = \prod_{i<j} \Gamma(U_i \cap U_j , G) .$$

Faisant varier g on obtient par passage à la limite "une suite exacte de faisceaux" : $0 \to G \to \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$. Le faisceau G est donc le noyau d'un morphisme de faisceaux quasi-cohérents : G est quasi-cohérent.

4. Faisceaux cohérents sur $V(A)$.

On va supposer à partir de maintenant que A est un anneau noethérien. Il est bien connu qu'alors la catégoire des A-modules noethériens coïncide avec celle des A-modules de type fini. On appellera faisceau cohérent sur $V(A)$ tout faisceau F isomorphe à un faisceau du type $\mathfrak{M}$, où M est un A-module de type fini. Le faisceau F est donc quasi-cohérent et c'est un faisceau de type fini (un faisceau F de $\mathfrak{A}$-modules sur un espace topologique X est dit de type fini si tout point X admet un voisinage U et une surjection $\mathfrak{A}^p|U \to F|U \to 0$, où $\mathfrak{A}^p$ est le faisceau somme directe de p faisceaux isomorphes à $\mathfrak{A}$. Une telle surjection induit une application

$$\Gamma(U , \mathfrak{A}^p) = \Gamma(U , \mathfrak{A})^p \to \Gamma(U , F)$$

et définit p sections de F sur U , à savoir les images des vecteurs de base de $\Gamma(U , \mathfrak{A})^p$. Réciproquement la donnée de p sections de F sur U définit une application $A^p|U \xrightarrow{\varphi} F|U)$.

THÉORÈME 3. - Les propositions suivantes sont équivalentes (si A est noethérien et si F est un faisceau algébrique sur $V(A)$) :

a. F est un faisceau algébrique cohérent sur $V(A)$

b. F est quasi-cohérent et de type fini

c. F est de type fini, et pour tout ouvert U et tout morphisme $\varphi : G \to F|U$, où G est un faisceau de type fini sur U , le noyau $\operatorname{Ker} \varphi$ est de type fini sur U .

On sait déjà que (a) $\Rightarrow$ (b) . Réciproquement si F est quasi-cohérent et est de type fini, il existe un recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de $V(A)$ par des ouverts spéciaux tels que $\Gamma(U_{f_i} , F)$ soit un A_{f_i}-module de type fini. Comme $V(A)$ est quasi-compact, on peut toujours supposer que ce recouvrement est fini et que F est du type $\mathfrak{M}$: il s'agit de montrer que M est un A-module de type fini. Mais pour tout i il existe un nombre fini de $m_{i_k} \in M$ qui engendrent M_{f_i} , et si N désigne le sous-module engendré par tous les m_{i_k} , N est un A-module de type fini, et on a manifestement $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$, d'où $N = M$,

C. Q. F. D.

Montrons que (c) $\Rightarrow$ (b) : En effet si F est de type fini, tout X admet un voisinage spécial U dans lequel on a une surjection :

$$\mathcal{O}_X^p|U \to F|U \to 0$$

Comme le noyau de cette surjection est aussi de type fini, on a en fait une suite exacte (pourvu que l'ouvert spécial U soit assez petit) :

$$\mathcal{O}_X^q|U \to \mathcal{O}_X^p|U \to F|U \to 0$$

Le faisceau F est donc, sur tout ouvert spécial assez petit, le conoyau d'un morphisme de faisceaux quasi-cohérents : ainsi F est localement quasi-cohérent et est donc quasi-cohérent.

Enfin (a) $\Rightarrow$ (c) : car si F est cohérent, F est de type fini. En outre si $\varphi : G \to F|U$ est un porphisme, on peut toujours supposer que U est un ouvert spécial assez petit pour que l'on ait une surjection $\psi : \mathcal{O}_X^p|U \to G \to 0$.

On a alors le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_X^p|U \arrow[d, "\psi"] \arrow[dr, "\chi"] & \\
\operatorname{Ker}\varphi \arrow[r] & G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & F|U \\
 & 0 &
\end{tikzcd}
\qquad \chi = \varphi \circ \psi$$

Les faisceaux $\mathcal{O}_X^p|U$ et $F|U$ sont cohérents sur U et χ est donc induit par un morphisme $\chi' : \mathcal{O}_X^p(U) \to F(U)$. Cette "résolution" de $\Gamma(U , F) = F(U)$ se prolonge en une résolution

$$\Gamma(U , A)^q \to \Gamma(U , A)^p \to \Gamma(U , F)$$

Cette dernière suite exacte permet de compléter le diagramme et montre que, sur U , $\operatorname{Ker}\varphi$ est quotient d'un faisceau de type fini :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X^q|U \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X^p|U \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\psi"] & F|U \arrow[d, leftrightarrow] \\
\operatorname{Ker}\varphi \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & F|U \\
0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

REMARQUE. - L'assertion (c) donne une caractérisation des faisceaux cohérents, qui ne fait pas intervenir la base des ouverts spéciaux de $V(A)$. En fait si V est un espace topologique quelconque et $\mathfrak{A}$ un faisceau d'anneaux sur V, les faisceaux de $\mathfrak{A}$-modules qui satisfont à l'assertion (c) sont les objets d'une sous-catégorie abélienne de la catégorie des faisceaux de $\mathfrak{A}$-modules (voir SERRE [4]). Dans le cas considéré ici les faisceaux quasi-cohérents sont les limites inductives de faisceaux cohérents.

5. Le spectre maximal d'un anneau de Jacobson.

Nous allons appliquer ce qui précède à la géométrie algébrique. Pour cela nous noterons $\Omega(A)$ et appellerons spectre maximal de A le sous-espace topologique de $V(A)$ formé des idéaux maximaux de A. Nous supposerons en outre que A est un anneau de Jacobson, c'est-à-dire que tout idéal premier est intersection d'idéaux maximaux (voir [1] et [3]). La proposition suivante est dès lors vérifiée :

PROPOSITION. - Les assertions suivantes sont équivalentes

a. A est un anneau de Jacobson.

b. La correspondance $U \to U \cap \Omega(A)$ entre ouverts de $V(A)$ et de $\Omega(A)$ est bijective.

c. La correspondance $W \to W \cap \Omega(A)$ entre fermés de $V(A)$ et de $\Omega(A)$ est bijective.

L'équivalence de (b) et (c) est triviale. D'autre part les fermés de V correspondent aux idéaux de A qui sont intersection d'idéaux premiers. Les fermés de Ω correspondent aux idéaux de A qui sont intersection d'idéaux maximaux. Les deux familles d'idéaux coïncident si et seulement si A est un anneau de Jacobson.

Sous cette dernière hypothèse les espaces $V(A)$ et $\Omega(A)$ ont donc même treillis des ouverts. Il en résulte évidemment que les faisceaux sur V et sur Ω "se correspondent biunivoquement". En particulier on appellera ouvert spécial de Ω la restriction d'un ouvert spécial de V, faisceau algébrique quasi-cohérent (resp. cohérent) sur Ω, la restriction d'un faisceau algébrique quasi-cohérent (resp. cohérent) de V. Les propriétés de ces faisceaux sur V s'étendent à leur restriction sur Ω moyennant des modifications évidentes.

En particulier toute algèbre de type fini sur un corps est un anneau de Jacobson Si k est un corps algébriquement clos, V un ensemble algébrique affine sur k, A son anneau des coordonnées, alors V est homéomorphe au spectre maximal

$\Omega(A)$ de A. Le faisceau d'anneaux $\mathfrak{A}|\Omega(A)$ porte le nom de faisceaux des germes de fonctions régulières sur V.

De même un faisceau de modules sur ce faisceau d'anneaux sera dit algébrique (resp. algébrique quasi-cohérent, resp. algébrique cohérent) s'il est restriction d'un faisceau de $V(A)$ du même nom.

6. Faisceaux quasi-cohérents sur une variété algébrique.

Plus généralement, si X est un ensemble algébrique quelconque sur k, on appellera faisceau algébrique quasi-cohérent (resp. cohérent) sur X tout faisceau F tel qu'il existe un recouvrement de X par des ouverts affines U_i satisfaisant à la condition : $F|U_i$ est quasi-cohérent (resp. cohérent). D'après la remarque qui suit le théorème 3, ceci équivaut à dire que, pour tout ouvert affine U, le faisceau $F|U$ est quasi-cohérent (resp. cohérent).

En particulier le faisceau d'anneaux $\mathfrak{A}$ qui est tel pour tout ouvert affine U, $\mathfrak{A}(U)$ soit l'anneau des fonctions régulières sur U (avec les restrictions évidentes), est un faisceau cohérent. On le nommera faisceau des germes de fonctions régulières. Tout faisceau de modules sur $\mathfrak{A}$ sera dit algébrique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Variétés algébriques affines, Séminaire Cartan-Chevalley, t. 8, 1955/56, n° 3.

[2] GODEMENT (Roger). - Théorie algébrique et théorie des faisceaux. - Paris, Hermann, 1958 (Act. scient. et ind., 1252).

[3] KRULL (Wolfgang). - Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie, Math. Z., t. 54, 1951, p. 354-387.

[4] SERRE (Jean-Pierre). - Faisceaux algébriques cohérents, Annals of Math., Series 2, t. 61, 1955, p. 197-278.