

SÉMINAIRE CLAUDE CHEVALLEY

C. CHEVALLEY

Les groupes de type G_2

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. n° 21, p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A8_0

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-

LES GROUPES DE TYPE G_2

Exposé de C. CHEVALLEY, le 6/1/1958

1. Deux lemmes.

Soient G un groupe algébrique semi-simple, T un tore maximal de G , α une racine de G par rapport à T , et Z le sous-groupe de dimension 3 de G correspondant à la racine α (i.e. le centralisateur de la composante connexe de l'élément neutre dans l'ensemble des $t \in T$ tels que $\alpha(t) = 1$). Soient τ_+ et τ_- des isomorphismes de K sur des sous-groupes de Z tels que l'on ait, pour $\xi \in K$, $t \in T$,

$$t \tau_+(\xi) t^{-1} = \tau_+(\alpha(t) \xi)$$

$$t \tau_-(\xi) t^{-1} = \tau_-((\alpha(t))^{-1} \xi).$$

Soit enfin ρ une représentation linéaire de G opérant dans un espace vectoriel V ; si ω est un poids de ρ , on dit qu'un vecteur $x \in V$ appartient au poids ω si $x \neq 0$ et si on a, pour $t \in T$, $t.x = \omega(t)x$.

Nous poserons

$$\zeta_+(\xi) = \rho(\tau_+(\xi)), \quad \zeta_-(\xi) = \rho(\tau_-(\xi))$$

LEMME 1. - Soit x un vecteur de V appartenant à un poids ω . Alors, pour tout $\xi \in K$, $\tau_+(\xi).x$ est combinaison linéaire de vecteurs de V appartenant à des poids de la forme $\omega + k\alpha$, k entier ≥ 0 .

En effet, τ_+ est une application polynome de K dans $GL(V)$; on peut donc écrire $\tau_+(\xi).x = x + \sum_{k=1}^m \xi^k x_k$, les x_k étant des vecteurs de V . On a $t \tau_+(\xi).x = t.x + \sum_{k=1}^m \xi^k t.x_k$; mais ceci est encore égal à

$$\tau_+(\alpha(t) \xi).(t.x),$$

donc à

$$\omega(t) \tau_+(\alpha(t) \xi).x = \omega(t)x + \sum_{k=1}^m \omega(t)(\alpha(t))^k \xi^k x_k;$$

on a donc $t.x_k = \omega(t)(\alpha(t))^k x_k$, ce qui démontre le lemme.

COROLLAIRE. - Le sous-espace de V engendré par les vecteurs qui appartiennent à des poids de la forme $\omega + r\alpha$, où r est un entier, est transformé en lui-même par les opérations de $\rho(Z)$.

Cet espace est évidemment transformé en lui-même par les opérations de $\rho(T)$; il résulte du lemme 1 qu'il est transformé en lui-même par les opérations

$$\tau_+(\xi), \tau_-(\xi) \quad (\xi \in K).$$

Le corollaire résulte alors du fait que Z est engendré par la réunion des ensembles $Z \cap T$, $\tau_+(K)$ et $\tau_-(K)$.

LEMME 2. - Soit $\tilde{\rho}$ une représentation projective de noyau fini d'un groupe algébrique semi-simple G , et soit T un tore maximal de G . Supposons que les poids de $\tilde{\rho}$ par rapport à T appartiennent au groupe $X(T)$ des caractères rationnels de T . Il existe alors une représentation linéaire ρ de G telle que $\tilde{\rho}$ soit la représentation projective déduite de ρ .

Posons $\bar{G} = \tilde{\rho}(G)$, $\bar{T} = \tilde{\rho}(T)$. L'application $\tilde{\rho}$ est une isogénie de G sur $\bar{G}$; il lui correspond un isomorphisme spécial $\tilde{\varphi}$ de $\mathbb{Q} \otimes X(\bar{T})$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$. La représentation $\tilde{\rho}$ opère dans l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ associé à un espace vectoriel V ; soit G' le groupe linéaire associé à $\tilde{\rho}$; c'est un sous-groupe de $SL(V)$. Soient g' l'application canonique de G' sur $\bar{G}$ et T' le tore maximal de G' tel que $g'(T') = \bar{T}$. Il correspond à l'isogénie g' un isomorphisme spécial χ' de $\mathbb{Q} \otimes X(\bar{T})$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T')$. Soit φ l'isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ tel que $\tilde{\varphi} = \varphi \circ \chi'$. Nous allons montrer que φ est un isomorphisme spécial. Soit α' une racine de G' par rapport à T' ; on sait que les exposants radiciels de χ' sont égaux à 1 (exposé 18, proposition 3) ; il y a donc une racine $\bar{\alpha}$ de $\bar{G}$ telle que $\chi'(\bar{\alpha}) = \alpha'$. Il y a une racine α de G et une puissance q de l'exposant caractéristique de K telles que $\tilde{\varphi}(\bar{\alpha}) = q\alpha$, d'où $\varphi(\alpha') = q\alpha$. Par ailleurs, l'application identique de G' dans $GL(V)$ est une représentation τ de G' , et les poids de ρ sont par définition les images par φ de ceux de τ ; comme $X(T')$ est engendré par les poids de τ , il résulte du fait que les poids de ρ appartiennent à $X(T)$ que $\varphi(X(T')) \subset X(T)$; φ est donc bien spécial. On en conclut (exposé 18, proposition 6) qu'il existe une isogénie ρ de G sur G' telle que $\tilde{\rho} = g' \circ \rho$, ce qui démontre le lemme.

2. Etude d'un groupe de type G_2 .

Soit G un groupe algébrique semi-simple de type G_2 . Soit T un tore

maximal de G , et soit $X(T)$ le groupe des caractères rationnels de T . Soit (α_1, α_2) un système fondamental de racines de G par rapport à T tel que le diagramme de Dynkin correspondant soit

$$\begin{array}{c} 1 \text{ --- } 3 \\ \cdot \quad \quad \cdot \end{array}$$

le sommet S_i correspondant à α_i ($i = 1, 2$). L'espace $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ est donc engendré par les éléments $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ de somme nulle tels que $\alpha_1 = \omega_0$, $\alpha_2 = \omega_1 - \omega_0$; les poids dominants fondamentaux sont $\varpi_1 = -\omega_2 = \alpha_2 + 2\alpha_1$, $\varpi_2 = \omega_1 - \omega_2 = 2\alpha_2 + 3\alpha_1$ (cf. exposé 19); comme ils sont combinaisons linéaires à coefficients entiers des racines, G est simplement connexe. Il y a donc une représentation linéaire simple ρ de G de poids dominant ϖ_1 (lemme 2). Posons $G' = \rho(G)$, $T' = \rho(T)$, et soit φ l'isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ associé à ρ . Il y a un système fondamental de racines (α'_1, α'_2) de G' par rapport à T' tel que $\varphi(\alpha'_i) = q_i \alpha_i$ ($i = 1, 2$), et on a $q_1 = 1$ en vertu du corollaire au lemme 2, exposé 19. Soient w_1 et w'_1 les symétries par rapport aux racines α_1 de G et α'_1 de G' ; on a $w_1(\alpha_2) = \alpha_2 + 3\alpha_1$ et $\varphi \circ w'_1 = w_1 \circ \varphi$ (exposé 18, proposition 4); on en conclut que $w'_1(\alpha'_2) = \alpha'_2 + 3q_2\alpha'_1$. Comme les entiers de Cartan d'un groupe semi-simple sont < 4 en valeur absolue, on a $q_2 = 1$. Il en résulte que G' est de type G_2 et que le diagramme de Dynkin associé au système fondamental (α'_1, α'_2) est le même que celui associé au système (α_1, α_2) , S_i correspondant à α'_i . La représentation ρ opère dans un espace vectoriel V ; l'application identique de G' dans $GL(V)$ est une représentation simple τ de G' dont le poids dominant ϖ' est l'élément de $X(T')$ dont l'image par φ est ϖ_1 , c'est-à-dire $\alpha'_2 + 2\alpha'_1$. Comme ρ induit un isomorphisme de $X(T')$ sur $X(T)$, ρ est un isomorphisme de G sur G' (exposé 18, proposition 5). Remplaçant G par G' , nous supposons désormais que G est un groupe d'automorphismes d'un espace vectoriel V et que ρ est l'application identique de G dans $GL(V)$. Les poids $\neq 0$ de ρ sont les transformés $\pm \omega_1$ du poids dominant par les opérations du groupe de Weyl (exposé 20, proposition 1); ils sont de multiplicité 1.

Nous désignerons par x_i (resp. y_i) un vecteur de V de poids ω_i (resp. $-\omega_i$). Nous désignerons par Z_i le sous-groupe de dimension 3 de G correspondant à la racine α_i . Nous allons d'abord montrer que, si 0 est un poids de ρ , ce poids est de multiplicité 1. Soit z un vecteur de V appartenant au

poids 0. Comme il n'y a aucun multiple entier $\neq 0$ de α_2 qui soit poids de ρ , l'espace Kz est transformé en lui-même par les opérations de Z_2 (corollaire au lemme 1), d'où il résulte que z est invariant par les opérations de Z_2 puisque Z_2 est son propre groupe dérivé. Par ailleurs, G est engendré par Z_1 et Z_2 (exposé 13, proposition 5); il est donc impossible que z soit stable par les opérations de Z_1 . Soit $\mathcal{C}_1$ un isomorphisme de K sur un sous-groupe de Z_1 associé à la racine α_1 ; montrons que z ne peut être invariant par les opérations de $\mathcal{C}_1(K)$. Supposons en effet le contraire; il y a un groupe de Borel B_1 de Z_1 qui est engendré par $\mathcal{C}_1(K)$ et par un tore maximal T_1 de Z_1 contenu dans T ; z serait alors invariant par B_1 , et son orbite $Z_1 z$ relativement à Z_1 serait l'image de la variété complète Z_1/B_1 par un morphisme de cette variété dans V ; cette image, étant une sous-variété complète de l'espace vectoriel V , se réduirait à point, et z serait invariant par les opérations de Z_1 , ce qui n'est pas. Il n'y a qu'un seul poids de ρ qui soit de la forme $k \alpha_1$ avec $k > 0$: ce poids est ω_0 . Il résulte alors du lemme 1 que l'on a $\mathcal{C}_1(\xi).z = z + c \xi x_0$ avec $c \in K$, $c \neq 0$. Ceci dit, soit z' un vecteur quelconque appartenant au poids 0; on a $\mathcal{C}_1(\xi).z' = z' + c' \xi x_0$, $c' \neq 0$. Il en résulte que $c'z - cz'$ est invariant par les opérations de $\mathcal{C}_1(K)$; si ce vecteur était $\neq 0$, il appartiendrait au poids 0, ce que nous avons vu être impossible. On a donc $z' = c^{-1} c'z$, ce qui montre que, si 0 est un poids de ρ , ce poids est de multiplicité 1.

Supposons d'abord que 0 ne soit pas poids de ρ . L'espace M_0 engendré par x_0 et y_0 est alors stable par les opérations de Z_1 . Soit T_1 le tore maximal de Z_1 contenu dans T ; les racines de Z_1 par rapport à T_1 sont les restrictions $\overline{\alpha_1}$ et $-\overline{\alpha_1}$ de α_1 et $-\alpha_1$ à T_1 ; les poids par rapport à T_1 de la représentation de Z_1 sur l'espace M_0 sont donc $\overline{\alpha_1}$ et $-\overline{\alpha_1}$. Il en résulte aussitôt que la représentation de Z_1 sur l'espace M_0 est simple et de poids dominant $\overline{\alpha_1}$. Mais, si K est de caractéristique $\neq 2$, la représentation de Z_1 de poids dominant $\overline{\alpha_1}$ est de dimension 3; donc, si 0 n'est pas poids de ρ , K est de caractéristique 2.

Nous allons montrer réciproquement que, si K est de caractéristique 2, 0 n'est pas poids de ρ . Il y a en effet dans tous les cas une forme bilinéaire β non dégénérée sur $V \times V$, symétrique ou alternée, invariante par les opérations de G (exposé 20, corollaire à la proposition 2). Si 0 est un poids de ρ , V est de dimension 7 et β n'est pas alternée; les opérations de G laissent donc invariante la forme quadratique $x \rightarrow \beta(x, x)$ qui est $\neq 0$. La forme bilinéaire associée à cette forme quadratique est 2β ; si donc K était de caractéristique 2,

la forme quadratique $x \rightarrow \beta(x, x)$ serait le carré d'une forme linéaire sur V qui serait invariante par les opérations de G , ce qui est impossible, G étant simple.

Ceci étant, supposons que K ne soit pas de caractéristique 2. On désignera par z_0 un vecteur appartenant au poids 0. L'espace V est donc de dimension 7. Faisons usage de la forme bilinéaire β déjà mentionnée ci-dessus. Expriment qu'elle est invariante par les opérations de T , on trouve tout de suite que l'on a

$$\beta(x_i, x_j) = \beta(y_i, y_j) = 0 \text{ quels que soient } i \text{ et } j,$$

$$\beta(z_0, x_i) = \beta(z_0, y_i) = 0 \text{ et } \beta(x_i, y_j) = 0 \text{ si } i \neq j.$$

On peut donc supposer x_1, x_2, y_1, y_2 normalisés de telle manière que $\beta(x_1, y_1) = \beta(x_2, y_2) = 1$. Faisant usage du corollaire au lemme 1, on voit tout de suite que les espaces $M_1 = Kx_1 + Ky_2$, $M_2 = Kx_2 + Ky_1$ sont invariants par les opérations de Z_1 . Les poids de la représentation de Z_1 sur l'espace M_2 sont les restrictions de α_2 et $-\alpha_1$ à T_1 . Déterminons ces restrictions. Soit $\bar{w}_1$ la symétrie par rapport à la racine α_1 de Z_1 ; il est clair que, si w_1 est la symétrie par rapport à α_1 , et si ω est un élément quelconque de $X(T)$, $\bar{w}_1$ change la restriction $\bar{\omega}$ de ω à T_1 en la restriction de $w_1(\omega)$, ce qui montre que $\bar{\omega} = 0$ si $w_1(\omega) = \omega$ (car $\bar{w}_1$ change tout élément de $X(T_1)$ en son opposé). Or on a $w_1(\omega_1) = \omega_1 + \omega_0$, $w_1(\omega_2) = \omega_2 + \omega_0$; la restriction de ω_1, ω_2 à T_1 est donc nulle; comme il est de même de celle de $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2$ et comme la restriction de ω_0 est $\bar{\alpha}_1$, on voit que les restrictions de ω_1 et ω_2 sont égales à $-(1/2)\bar{\alpha}_1$. Comme $-(1/2)\bar{\alpha}_1$ appartient à $X(T_1)$, Z_1 est isomorphe à $SL(K^2)$. Introduisons un espace vectoriel W de dimension 2 sur K et une base (w_1, w_2) de W . Soit f_1 l'isomorphisme de W sur M_1 qui applique w_1 sur x_1 et w_2 sur y_2 ; cet isomorphisme définit un isomorphisme F_1 de $SL(W)$ sur $SL(M_1)$ qui est l'ensemble des restrictions à M_1 des opérations de Z_1 . Soit W^* le dual de W , et soit (w_1^*, w_2^*) la base de W^* duale de la base (w_1, w_2) ; soit f_1^* l'isomorphisme de W^* sur M_2 qui applique w_1^* sur y_1 et w_2^* sur x_2 ; cet isomorphisme définit un isomorphisme F_1^* de $SL(W^*)$ sur $SL(M_2)$. Il résulte du fait que β est invariante par les opérations de G que, si $s \in Z_1$ et si u est l'élément de $SL(W)$ tel que s coïncide avec $F_1(u)$ sur M_1 , alors s coïncide avec $F_1^*({}^t u^{-1})$ sur M_2 . Par ailleurs, comme l'application qui fait correspondre à tout $s \in Z_1$ sa restriction à M_1 est une représentation simple de poids dominant $(1/2)\bar{\alpha}_1$ de Z_1 , c'est un isomorphisme de Z_1 sur $SL(M_1)$, d'où il résulte

qu'il y a un isomorphisme F de $SL(W)$ sur Z_1 tel que, pour tout $u \in SL(W)$, $F_1(u)$ soit la restriction de $F(u)$ à M_1 . Soit W_2 l'espace des éléments homogènes de degré 2 de l'algèbre symétrique sur W ; c'est l'espace d'une représentation σ_2 de $SL(W)$. Si $s \in Z_1$, soit $\zeta_0(s)$ la restriction de s à l'espace engendré par x_0 , y_0 et par le vecteur z_0 de poids 0 : c'est une représentation simple de poids dominant $\overline{\alpha_1}$ de Z_1 . Par ailleurs, $\sigma_2 \circ \overline{F}^1$ est aussi une représentation simple de poids dominant $\overline{\alpha_1}$ de Z_1 . Les représentations σ_0 et $\sigma_2 \circ \overline{F}^1$ sont donc équivalentes, et il y a un isomorphisme f_2 de W_2 sur M_0 tel que l'on ait $f_2 \circ (\sigma_2 \circ \overline{F}^1)(s) = \zeta_0(s) \circ f_2$ pour tout $s \in Z_1$. L'espace W_2 admet une base composée des éléments w_1^2 , w_2^2 , $w_1 w_2$. Soit τ_1 un isomorphisme de K sur un sous-groupe de Z_1 associé à la racine α_1 ; comme $\omega_0 - \omega_2$ n'est pas un poids de ρ , les opérations de $\tau_1(K)$ laissent y_2 fixe; les opérations de $(\overline{F}^1 \circ \tau_1)(K)$ laissent donc w_2 fixe, et leurs images par σ_2 laissent w_2^2 fixe. Par ailleurs, les points de M_0 qui sont invariants par les opérations de $\tau_1(K)$ sont les points de l'espace Kx_0 ; on en conclut que f_2 applique w_2^2 sur un multiple scalaire de x_0 . On verrait de même que f_2 applique w_1^2 sur un multiple scalaire de y_0 . Nous poserons $x'_0 = f_2(w_2^2)$, $y'_0 = f_2(w_1^2)$. Comme β n'est pas dégénérée et comme $\beta(z_0, x_i) = \beta(z_0, y_i) = 0$ ($i = 0, 1, 2$), on a $\beta(x'_0, y'_0) \neq 0$. Or on peut remplacer f_2 par un isomorphisme de la forme cf_2 , où c est un élément $\neq 0$ quelconque de K , sans que l'on cesse d'avoir $f_2 \circ (\sigma_2 \circ \overline{F}^1)(s) = \zeta_0(s) \circ f_2$ pour tout $s \in Z_1$. On peut choisir c de telle manière que $\beta(x'_0, y'_0) = 1$. Comme x_0 et y_0 n'ont encore été déterminés qu'à des facteurs constants près, on peut supposer que $x_0 = x'_0$ et $y_0 = y'_0$. Enfin, on peut supposer que $f_2(w_1 w_2) = z_0$. On voit donc que l'espace V admet une base composée d'éléments z_0, x_i, y_i ($i = 0, 1, 2$) qui possèdent les propriétés suivantes : il existe des isomorphismes f_1, f_1^*, f_2 de W, W^* et W_2 sur les espaces $M_1 = Kx_1 + Ky_2$, $M_2 = Kx_2 + Ky_1$ et $M_0 = Kx_0 + Ky_0 + Kz_0$ respectivement tels que $f_1(w_1) = x_1$, $f_1(w_2) = y_2$, $f_1^*(w_1^*) = y_1$, $f_1^*(w_2^*) = x_2$, $f_2(w_1^2) = y_0$, $f_2(w_2^2) = x_0$, $f_2(w_1 w_2) = z_0$; si F_1, F_1^*, F_2 sont les isomorphismes de $SL(W)$ sur $SL(M_1)$, $SL(W^*)$ sur $SL(M_2)$ et $SL(W_2)$ sur $SL(M_0)$ définis par f_1, f_1^* et f_2 respectivement, les opérations de Z_1 sont les automorphismes s de W pour lesquels il existe un $u \in SL(W)$ tel que les restrictions de s à M_1, M_2 et M_0 soient $F_1(u), F_1^*(u^{-1})$ et $F_2(\sigma_2(u))$ respectivement ($\sigma_2(u)$ étant la puissance symétrique seconde de u); les opérations de G laissent invariante une forme bilinéaire non dégénérée β telle que

$$\beta(x_i, y_i) = 1 \quad (i = 0, 1, 2),$$

$$\beta(z_0, x_i) = \beta(z_0, y_i) = \beta(x_i, x_j) = \beta(y_i, y_j) = 0 \quad (i, j = 0, 1, 2)$$

$$\beta(x_i, y_j) = 0 \quad \text{si } i \neq j;$$

enfin z_0 appartient au poids 0, x_i au poids ω_i et y_i au poids $-\omega_i$.

Considérons maintenant les opérations de Z_2 . Il résulte du corollaire, au lemme 1 que les espaces $Kx_0 + Kx_1$, $Ky_0 + Ky_1$, Kz_0 , Kx_2 , Ky_2 sont stables par les opérations de Z_2 . Comme Z_2 est son propre groupe dérivé, les points z_0 , x_2 , y_2 sont invariants par les opérations de Z_2 . Par ailleurs, les restrictions des opérations de Z_2 à $Kx_0 + Kx_1$ sont évidemment tous les automorphismes de déterminant 1 de cet espace. Les espaces $Kx_0 + Kx_1$ et $Ky_0 + Ky_1$ sont mis en dualité par la restriction de β au produit de ces deux espaces; si $s \in Z_2$, les restrictions de s à $Kx_0 + Kx_1$ et $Ky_0 + Ky_1$ sont contragédientes l'une à l'autre par rapport à cette restriction; ces restrictions se déterminent donc mutuellement.

Ceci étant, construisons un groupe $\bar{G}$ comme suit. Ce sera un groupe d'automorphismes de l'espace vectoriel $W \times W^* \times W_2$; nous identifierons W , W^* , W_2 à leurs images dans $W \times W^* \times W_2$, qui sera donc identifié à la somme directe des espaces W , W^* , W_2 . Le groupe $\bar{G}$ sera engendré par deux groupes $\bar{Z}_1$ et $\bar{Z}_2$ décrits comme suit. Le groupe $\bar{Z}_1$ se compose des automorphismes dont les restrictions à W , W^* , W_2 sont de la forme u , ${}^t u^{-1}$, $\sigma_2(u)$ pour $u \in \text{SL}(W)$. Les opérations de $\bar{Z}_2$ laissent fixes les points $w_1 w_2$, w_2 , w_2^* et les espaces $N = Kw_2^2 + Kw_1$, $N^* = Kw_1^2 + Kw_1^*$; leurs restrictions à N sont tous les automorphismes de déterminant 1 de cet espace; enfin les restrictions d'une opération de $\bar{Z}_2$ à N et N^* sont contragédientes l'une à l'autre par rapport à la forme bilinéaire γ sur $N \times N^*$ définie par $\gamma(w_2^2, w_1^2) = \gamma(w_1, w_1^*) = 1$, $\gamma(w_2^2, w_1^*) = \gamma(w_1, w_1^2) = 0$. Ceci étant, il résulte de ce que nous avons dit que le groupe G est isomorphe à $\bar{G}$.

On a des résultats entièrement analogues dans le cas où K est de caractéristique 2; il faut seulement remplacer l'espace W_2 par le sous-espace W_2' engendré par w_1^2 et w_2^2 et remplacer la représentation σ_2 de $\text{SL}(W)$ par la représentation σ_2' telle que $\sigma_2'(u)$ soit la restriction de $\sigma_2(u)$ à W_2' ($u \in \text{SL}(W)$). Nous avons donc établi le

THÉOREME 1. - Tous les groupes algébriques semi-simples de type G_2 (relatifs à un même corps de base K) sont isomorphes entre eux.

3. Sur l'algèbre de Lie d'un groupe semi-simple.

Soient G un groupe algébrique semi-simple et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Désignons par T un tore maximal de G , et par $\mathfrak{t}$ son algèbre de Lie, qui est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$. Pour toute racine α de G par rapport à T , soit τ_α un isomorphisme du groupe K sur un sous-groupe de G associé à α ; alors la formule $X_\alpha = [d\tau_\alpha(\xi)/d\xi]_{\xi=0}$ définit un élément X_α de $\mathfrak{g}$ ($\mathfrak{g}$ étant identifié à l'espace tangent à G en son élément neutre). Il résulte de ce qui a été dit dans l'exposé 15 (p. 2 et 3) que $\mathfrak{g}$ est la somme directe de $\mathfrak{t}$ et des espaces KX_α pour toutes les racines α . Soit γ un groupe multiplicatif à un paramètre contenu dans T ; alors la formule $\gamma^K = (d\gamma(\theta)/d\theta)_{\theta=1}$ définit un élément γ^K de $\mathfrak{t}$. On sait que la dérivée en (e, e) (où e est l'élément neutre de G) de l'application $(s, t) \rightarrow st$ applique (L, M) sur $L + M$ (L et M étant des vecteurs tangents à G en e ; l'espace tangent à $G \times G$ en (e, e) est identifié au produit par lui-même de l'espace tangent à G en e); il en résulte que, si γ, γ' sont des éléments du groupe $\Gamma(T)$ des groupes à un paramètre de T (écrit en notation additive), on a

$$(\gamma + \gamma')^K = \gamma^K + \gamma'^K;$$

on en déduit une application linéaire $K \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma(T) \rightarrow \mathfrak{t}$. Cette application est un isomorphisme d'espaces vectoriels, comme il résulte tout de suite du fait que $\Gamma(T)$ a une base $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ telle que l'application

$$(\theta_1, \dots, \theta_n) \rightarrow \prod_{i=1}^n \gamma_i(\theta_i)$$

soit un isomorphisme de K^{*n} sur T . Le dual du groupe $\Gamma(T)$ s'identifie au groupe $X(T)$ des caractères rationnels de T ; on en déduit un isomorphisme de l'espace vectoriel $K \otimes_{\mathbb{Z}} X(T)$ sur le dual $\mathfrak{t}^*$ de $\mathfrak{t}$; nous désignerons par ω^K l'image dans cet isomorphisme d'un élément ω de $X(T)$. Si α est une racine, nous dirons que α^K est la racine infinitésimale associée à α . On sait que, pour toute racine α , il existe un élément H_α et un seul de $\Gamma(T)$ qui est changé en son opposé par la symétrie par rapport à α et qui est tel que $\alpha(H_\alpha) = 2$; le groupe à un paramètre H_α est contenu dans le groupe Z_α de dimension 3 associé à la racine α . Nous poserons

$$U_\alpha = H_\alpha^K.$$

d'où

$$\alpha^K(U_\alpha) = 2.$$

L'espace $\mathfrak{g}$ est l'espace de la représentation adjointe $s \rightarrow \text{Ad } s$ de G : $\text{Ad } s$ est la dérivée en s de l'application $t \rightarrow sts^{-1}$ de G sur lui-même. Si $t \in T$, la formule $t \tau_\alpha(\xi) t^{-1} = \tau_\alpha(\alpha(t)\xi)$ donne

$$\text{Ad } t \cdot X_\alpha = \alpha(t) X_\alpha ;$$

par ailleurs, T étant commutatif, on a $\text{Ad } t \cdot T = T$ pour tout $T \in \mathfrak{t}$. Les poids de la représentation adjointe de G sont d'une part les racines (qui sont des poids de multiplicité 1) et d'autre part 0, de multiplicité égale à $\dim \mathfrak{t}$, donc au rang de G .

Tout homomorphisme f de G dans un groupe algébrique G' définit un homomorphisme de $\mathfrak{g}$ dans l'algèbre de Lie de G' (à savoir la dérivée de f en l'élément neutre). En particulier, supposons que f soit une représentation linéaire ρ , donc que $G' = \text{GL}(V)$, V étant un espace vectoriel ; l'algèbre de Lie de $\text{GL}(V)$ s'identifie canoniquement à l'espace $\mathfrak{E}$ des endomorphismes de V ; l'homomorphisme $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{E}$ défini par ρ s'appelle la représentation infinitésimale associée à ρ ; nous la désignerons par ρ_i . La représentation adjointe de $\text{GL}(V)$ fait correspondre à tout $s \in \text{GL}(V)$ l'automorphisme $X \rightarrow sXs^{-1}$ de $\mathfrak{E}$; les opérations de $\text{Ad}(\text{GL}(V))$ laissent donc invariante la forme bilinéaire $(X, Y) \rightarrow \text{Tr } XY$ sur $\mathfrak{E} \times \mathfrak{E}$. Il en résulte que, si $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G , et ρ une représentation linéaire de $\mathfrak{g}$, la forme bilinéaire $(X, Y) \rightarrow \text{Tr } \rho_i(X) \rho_i(Y)$ est invariante par les opérations de $\text{Ad } G$. Soit B_ρ cette forme, que nous appellerons la forme de Killing de la représentation ρ . Expriment l'invariance de cette forme par les opérations $\text{Ad } t$, $t \in T$, il vient

$$(1) \quad \begin{aligned} B_\rho(X_\alpha, X_\beta) &= 0 \text{ si } \alpha, \beta \text{ sont des racines, } \alpha \neq -\beta \\ B_\rho(U, X_\alpha) &= 0 \text{ si } \alpha \text{ est une racine, } U \in \mathfrak{t} . \end{aligned}$$

Supposons maintenant que G soit de rang 1. Dans ce cas, G est isomorphe soit à $\text{SL}(K^2)$ soit à $\text{PL}(K^2)$. Supposons d'abord que G soit $\text{SL}(K^2)$, c'est-à-dire le groupe des matrices de degré 2 et de déterminant 1. On a alors, en prenant comme tore maximal T le groupe des matrices diagonales contenues dans G , et en choisissant convenablement la racine α ,

$$\tau_\alpha(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c_2 \xi & 1 \end{pmatrix} \quad \tau_\alpha(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & c_1 \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H_\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta^{-1} \end{pmatrix}$$

où c_1, c_2 sont des éléments $\neq 0$ de K . Il en résulte que l'on a alors $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = c U_\alpha$, avec $c = c_1 c_2 \neq 0$. On vérifie facilement qu'il en est encore ainsi dans le cas où G est isomorphe à $PL(K^2)$ (mais il convient d'observer que dans ce cas, si K est de caractéristique 2, on a $T_\alpha = 0$). Soit ρ une représentation linéaire de G ; exprimant l'invariance de B_ρ , on trouve facilement la relation $B_\rho([X_\alpha, U_\alpha], X_{-\alpha}) + B_\rho(U_\alpha, [X_\alpha, X_{-\alpha}]) = 0$, et par suite

$$c B_\rho(U_\alpha, U_\alpha) = 2 B_\rho(X_\alpha, X_{-\alpha}).$$

Revenons maintenant au cas d'un groupe G quelconque. A toute racine α correspond un sous-groupe Z_α de dimension 3 de G qui admet un tore maximal T_α contenu dans T ; X_α et $X_{-\alpha}$ sont des éléments de l'algèbre de Lie de Z_α ; le groupe à un paramètre H_α est un groupe à paramètre de T_α ; la restriction $\overline{\alpha}$ de α à T_α est une racine de Z_α et on a $\overline{\alpha}(H_\alpha) = 2$. On en déduit que, pour toute représentation linéaire ρ de G , on a

$$(2) \quad c_\alpha B_\rho(U_\alpha, U_\alpha) = 2 B_\rho(X_\alpha, X_{-\alpha}).$$

Nous allons appliquer ceci au cas où G est le groupe de type G_2 considéré en 2; nous utiliserons les notations du n° 2; en particulier, ρ sera l'application identique de G dans $GL(V)$. Nous supposerons de plus que K est de caractéristique 3. Considérons un élément T de $\mathfrak{t}$; on a $\rho_1(T).x_1 = \omega_1^K(T).x_1$, $\rho_1(T).y_1 = -\omega_1^K(T).y_1$; $\rho_1(T).z_0 = 0$, d'où

$$B_\rho(T, T) = -2 \sum_{i=0}^2 (\omega_i^K(T))^2.$$

Soit H_1 (resp. U_1) l'élément H_α (resp. U_α) relatif à $\alpha = \alpha_1$. En exprimant que H_1 est changé en son opposé par la symétrie w_1 par rapport à α_1 et en tenant compte de ce que $\alpha_1(H_1) = 2$, $w_1(\alpha_2) = \alpha_2 + 3\alpha_1$, $w_2(\alpha_1) = \alpha_2 + \alpha_1$, il vient $\alpha_1(H_2) = -1$, $\alpha_2(H_1) = -3$. Il en résulte que $\omega_0(H_1) = 2$, $\omega_1(H_1) = -1$, $\omega_2(H_1) = -1$, $\omega_0(H_2) = -1$, $\omega_1(H_2) = 1$, $\omega_2(H_2) = 0$. Les éléments $\omega_i^K(U_j)$ se déduisent des formules que l'on vient d'écrire; on voit tout de suite que U_1 et U_2 sont linéairement indépendantes, donc forment une base de $\mathfrak{t}$, et que

$$B_\rho(a_1 U_1 + a_2 U_2) = 6 a_1^2 - 6 a_1 a_2 - 2 a_2^2 = a_2^2.$$

Tenant compte des formules (1), (2), on en conclut que T_1 et X_{α_1} appartiennent au sous-espace $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{g}$ composé des X tels que $B_\rho(X, Y) = 0$ pour tout $T \in \mathfrak{g}$, mais que T_2 ni X_{α_2} n'appartient à cet espace. Il résulte de

l'invariance de B_ρ par la représentation adjointe que $\mathfrak{g}_0$ est stable pour la représentation adjointe. Or, soit s un élément du normalisateur de T ; il définit une opération w du groupe de Weyl. Posons, si $t \in T$ et si α est une racine, $sts^{-1} = t'$, $s \tau_\alpha(\xi)s^{-1} = \tau'(\xi)$; il vient alors

$$t' \tau'(\xi)t'^{-1} = \tau'(\alpha(t)\xi).$$

Or, si $w(\alpha)$ est la transformée de la racine α par w , on a

$$(w(\alpha))(t) = \alpha(s^{-1}ts) ;$$

la formule précédente montre alors que τ' est un isomorphisme associé à la racine $w(\alpha)$, d'où l'on déduit que $Ad s$ transforme X_α en un multiple scalaire $\neq 0$ de $X_{w(\alpha)}$. La relation $X_{\alpha_1} \in \mathfrak{g}_0$ entraîne donc $X_\alpha \in \mathfrak{g}_0$ pour toute racine α transformée de α_1 par une opération du groupe de Weyl W ; ces racines sont $\pm \alpha_1$, $\pm (\alpha_2 + \alpha_1)$, $\pm (\alpha_2 + 2\alpha_1)$. On en conclut que $\mathfrak{g}_0$ est de dimension ≥ 7 .

L'espace $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ est l'espace d'une représentation linéaire σ de G . Désignant par X^* la classe modulo $\mathfrak{g}_0$ d'un élément $X \in \mathfrak{g}$, on a $X_{\alpha_2}^* \neq 0$ et $\sigma(t).X_{\alpha_2}^* = \alpha_2(t)X_{\alpha_2}^*$ si $t \in T$. On en conclut que α_2 est un poids de σ . Il en est de même des transformées de α_2 par les opérations de W , i.e. des racines $\pm \alpha_2$, $\pm (\alpha_2 + 3\alpha_1)$, $\pm (2\alpha_2 + 3\alpha_1)$. De plus, on a $U_2^* \neq 0$, et U_2^* est invariant par les opérations de $\sigma(T)$, ce qui montre que 0 est un poids de σ ; σ est donc de degré ≥ 7 . Comme $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ est de dimension ≤ 7 , on en conclut que cet espace est de dimension 7. Nous allons maintenant montrer que cette représentation est simple. Observons d'abord que, si $X, Y \in \mathfrak{g}$, $B_\rho(X, Y)$ ne dépend que de X^* et Y^* ; B_ρ définit donc, par passage aux quotients, une forme bilinéaire B^* sur $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0) \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0)$ qui est un invariant de la représentation ρ . Ceci dit, soit M un sous-espace $\neq \{0\}$ de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ stable pour $\sigma(G)$. Comme les poids de σ sont tous de multiplicité 1, M est engendré par des vecteurs de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$ qui appartiennent à des poids. Soit σ_M la représentation sur l'espace M ; comme les transformées d'un poids de σ_M par les opérations de W sont encore des poids de σ_M , on voit qu'il y a que 3 possibilités :

- on a $M = \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$;
- M est engendré par les X_α^* pour toutes les racines $\alpha = \pm \alpha_2$, $\pm (\alpha_2 + 3\alpha_1)$, $\pm (2\alpha_2 + 3\alpha_1)$;
- M est engendré par U_2^* .

De plus, le complémentaire orthogonal de M relativement à la forme bilinéaire B^* , soit M^* , est encore stable par $\sigma(M)$; si donc on était dans le cas b., l'espace KU_2^* serait également stable par $\sigma(G)$. Tout revient donc à établir

que KU_2^* n'est pas stable par $\sigma(G)$. Or, supposons pour un moment qu'il en soit ainsi ; comme G est son propre groupe des commutateurs, U_2^* est alors invariant par les opérations de $\sigma(G)$, ce qui signifie que $(\text{Ad } s)(U_2) - U_2 \in \mathfrak{Q}_0$ pour tout $s \in G$. Or on sait que la représentation $(\text{Ad } s)_1$ de $\mathfrak{g}$ déduite de la représentation adjointe de G n'est autre que la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$; on en déduit alors que $[X, U_2] \in \mathfrak{Q}_0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$. Or il est impossible qu'il en soit ainsi, car $[U_2, X_{\alpha_2}] = \alpha_2^K(U_2)X_{\alpha_2} = 2X_{\alpha_2}$ n'est pas dans $\mathfrak{Q}_0$. Nous avons donc bien établi que la représentation σ est simple. Son poids dominant est manifestement la racine $2\alpha_2 + 3\alpha_1$ qui est le poids dominant ω_2 relatif à la racine α_2 .

La représentation σ est une isogénie de G sur le groupe $G' = \sigma(G)$; posons $T' = \sigma(T)$, et désignons par φ l'isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$ définie par σ . Son exposant radiciel relatif à la racine α_2 est 1 (exposé 20, corollaire au lemme 2) ; son exposant radiciel q relatif à la racine α_1 est une puissance de 3. Soient α'_1, α'_2 les racines de $\sigma(G)$ telles que $\varphi(\alpha'_1) = q\alpha_1$, $\varphi(\alpha'_2) = \alpha_2$. Tenant compte de la proposition 4, exposé 18, on voit facilement qu'il n'y a que deux possibilités : ou bien $q = 1$, et les entiers de Cartan relatifs au système fondamental (α'_1, α'_2) sont les mêmes que ceux relatifs au système fondamental (α_1, α_2) , ou bien $q = 3$ et les entiers de Cartan relatifs à (α'_1, α'_2) sont les mêmes que ceux relatifs à (α_2, α_1) . Nous allons voir que c'est la seconde possibilité qui se réalise. Considérons pour cela la représentation $\overline{\sigma}$ de Z_1 induite par σ . Les sous-espaces $KX_{\alpha_2}^* + KX_{-\alpha_2+3\alpha_1}^* = N_1$, $KX_{-\alpha_2}^* + KX_{-(\alpha_2+3\alpha_1)}^* = N_2$, $KX_{2\alpha_2+3\alpha_1}^* = N_3$, $KX_{-(2\alpha_2+3\alpha_1)}^* = N_4$, $KU_2^* = N_5$ sont stables par $\overline{\sigma}(Z_1)$. Les représentations sur N_3, N_4, N_5 sont triviales. Si on désigne par $\overline{\alpha_1}$ la restriction de α_1 à T_1 , celle de $\overline{\alpha_2}$ est $-(2/2)\overline{\alpha_1}$ (comme il résulte de la formule $\alpha_2(H_1) = -3$). Les poids de la représentation sur l'un ou l'autre des espaces N_1, N_2 sont donc $\pm (3/2)\overline{\alpha_1}$; chacune de ces représentations est donc équivalente à la représentation simple de poids dominant $(3/2)\overline{\alpha_1}$. Comme α_1 est caractéristique 3, il en résulte que, si $\overline{\sigma_1}$ et $\overline{\sigma_2}$ sont les représentations sur N_1 et N_2 , les coefficients de la matrice qui représente $\overline{\sigma_i}(\mathcal{U}_1(\xi))$ ($s \in Z_1$) relativement à une base de N_i sont des polynômes en ξ^3 . Tenant compte de la définition des exposants radiciels, on en conclut que l'exposant radiciel de φ relatif à α_1 est 3. Nous avons donc démontré que, si K est de caractéristique 3, et si G est un groupe de type G_2 , T un tore maximal de G et (α_1, α_2) un système fondamental de racines de G par rapport à T tel que la symétrie par rapport à α_1 transforme

α_2 en $\alpha_2 + 3 \alpha_1$, il y a une isogénie de G dont les exposants radiciels par rapport à α_1 et α_2 sont 3 et 1 respectivement.

4. Isogénies d'un groupe de type G_2 .

THÉOREME 2. - Soit G un groupe algébrique semi-simple de type G_2 , et soit T un tore maximal de G . Soient G' un groupe algébrique semi-simple, T' un tore maximal de G' et φ un isomorphisme spécial de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$. Alors G' est de type G_2 et φ est l'isomorphisme attaché à une isogénie de G sur G' qui applique T sur T' .

Soit (α_1, α_2) un système fondamental de racines de G par rapport à T tel que l'entier de Cartan $c(1, 2)$ relatif à ce système de racines soit 3. Soit (α'_1, α'_2) le système fondamental de racines de G' tel que $\varphi(\alpha'_1) = q_1 \alpha_1$, q_1 étant une puissance de l'exposant caractéristique de K . Soit $c'(1, 2)$ l'entier de Cartan relatif à ce système fondamental. On a $3 q_2 = c'(1, 2) q_1$; comme $c'(1, 2)$ ne peut prendre que les valeurs 0, 1, 2 ou 3, on voit que l'on a ou bien $q_1 = q_2$, $c'(1, 2) = 3$ ou bien $q_1 = 3 q_2$, $c'(1, 2) = 1$; ce dernier cas n'est possible que si K est de caractéristique 3; de plus, si $q_1 = 3 q_2$, on a $c'(2, 1) = 3$; G' est donc bien en tous cas de type G_2 . Posons dans tous les cas $q = q_2$; l'isogénie des puissances q -ièmes applique G sur un groupe $\bar{G}$ de type G_2 . Soit $\bar{T}$ l'image de T , et soit γ l'isomorphisme correspondant de $\mathbb{Q} \otimes X(\bar{T})$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(T)$. Il y a alors un système fondamental de racines $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$ de $\bar{G}$ par rapport à $\bar{T}$ tel que $\gamma(\bar{\alpha}_i) = q \alpha_i$ ($i = 1, 2$). L'isomorphisme φ se met sous la forme $\gamma \circ \bar{\varphi}$, où $\bar{\varphi}$ est un isomorphisme de $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(\bar{T})$ qui applique α'_2 sur $\bar{\alpha}_2$ et α'_1 sur $\bar{\alpha}_1$ ou $3 \bar{\alpha}_1$ suivant que $q_1 = q_2 = q$ ou que $q_1 = 3 q$. Supposons d'abord que $q_1 = q$. Il résulte alors de ce qui a été démontré plus haut qu'il y a des représentations simples $\bar{\rho}$, ρ' de $\bar{G}$, G' qui possèdent les propriétés suivantes: $\bar{\rho}$ (resp. ρ') est de poids dominant $\bar{\alpha}_2 + 2 \bar{\alpha}_1$ (resp. $\alpha'_2 + 2 \alpha'_1$); on a $\bar{\rho}(\bar{G}) = \rho'(G')$, $\bar{\rho}(\bar{T}) = \rho'(T')$; si $T^* = \bar{\rho}(\bar{T})$, les exposants radiciels des isomorphismes spéciaux ζ et ζ' de $\mathbb{Q} \otimes X(T^*)$ sur $\mathbb{Q} \otimes X(\bar{T})$ et $\mathbb{Q} \otimes X(T')$ associés $\bar{\rho}$ et ρ' sont égaux à 1. Il en résulte que $\bar{\varphi} \circ \zeta' = \zeta$. Par ailleurs, les groupes $X(\bar{T})$ et $X(T')$ sont engendrés par les racines; il en résulte que $\bar{\varphi}$ est spécial. Faisant usage de la proposition 6, exposé 18, on en conclut que $\bar{\varphi}$ est associé à un isomorphisme de $\bar{G}$ sur G' , ce qui démontre que le théorème dans ce cas. Supposons maintenant que $q_1 = 3 q_2$; la caractéristique de K est alors 3, et nous avons vu au n° 3 qu'il y a une isogénie γ_1 de $\bar{G}$

sur un groupe $\bar{G}$ qui applique $\bar{T}$ sur un tore maximal $\bar{\bar{T}}$ de $\bar{G}$ telle que les exposants radiciels relatifs à $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_2$ de l'isomorphisme spécial attaché à cette isogénie soient 3 et 1 respectivement. On peut alors écrire $\bar{\varphi} = \gamma_1 \circ \bar{\bar{\varphi}}$, où $\bar{\bar{\varphi}}$ est un isomorphisme spécial de $\underline{Q} \otimes X(T')$ sur $\underline{Q} \otimes X(\bar{\bar{T}})$ dont les exposants radiciels sont égaux à 1. On conclut comme plus haut que $\bar{\varphi}$ est attaché à un isomorphisme de G sur G' qui applique $\bar{T}$ sur T' , ce qui achève la démonstration du théorème.
