

SÉMINAIRE CLAUDE CHEVALLEY

C. CHEVALLEY

Les sous-groupes radiciels

Séminaire Claude Chevalley, tome 2 (1956-1958), exp. n° 17, p. 1-13

http://www.numdam.org/item?id=SCC_1956-1958__2__A4_0

© Séminaire Claude Chevalley
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Claude Chevalley » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-:-

LES SOUS-GROUPES RADICIELS

(Exposé de C. CHEVALLEY, le 6.5.1957)

Notations. Nous désignerons par G un groupe linéaire algébrique semi-simple irréductible, par T un tore maximal de G , par R l'ensemble des racines de G par rapport à T ; pour tout $\alpha \in R$, nous désignerons par τ_α un isomorphisme de K sur un sous-groupe de G tel que l'on ait

$$t \cdot \tau_\alpha(\lambda) t^{-1} = \tau_\alpha(\alpha(t) \lambda) \quad (t \in T, \lambda \in K);$$

nous poserons $P_\alpha = \tau_\alpha(K)$. Nous désignerons par Q_α la composante de l'élément neutre dans le noyau de α , par Z_α le centralisateur de Q_α , par Z'_α le groupe dérivé de Z_α , par T_α un tore maximal de Z'_α contenu dans T ; nous désignerons par w_α la symétrie par rapport à la racine α , et par σ_α un élément du normalisateur de T_α dans Z'_α n'appartenant pas à T_α ; σ_α appartient donc au normalisateur de T et sa classe suivant T est w_α . Pour tout tore T' , nous désignerons par $\Gamma(T')$ le groupe des groupes à un paramètre de T' et par $X(T')$ le groupe des caractères rationnels de T' ; nous poserons $\Gamma^Q(T') = Q \otimes \Gamma(T')$, $X^Q(T') = Q \otimes X(T')$; on rappelle que les tores contenus dans T' sont en correspondance biunivoque avec les sous-espaces de l'espace vectoriel $X^Q(T')$, le tore qui correspond à un sous-espace Y de $X^Q(T')$ étant l'ensemble des éléments t tels que $\chi(t) = 1$ pour tout $\chi \notin Y \cap X(T')$. Les espaces vectoriels $\Gamma^Q(T')$ et $X^Q(T')$ sont en dualité l'un avec l'autre; il y a une correspondance bi-univoque entre les sous-espaces Z de $\Gamma^Q(T')$ et les sous-tores de T' ; si T'' est le tore associé à Z , $\Gamma(T'') = Z \cap \Gamma(T')$. Le groupe $\Gamma(T_\alpha)$ contient un élément γ_α tel que $\alpha(\gamma_\alpha) = 2$, $w_\alpha(\gamma_\alpha) = -\gamma_\alpha$.

Nous dirons qu'un ensemble S de racines est fermé si toute combinaison linéaire à coefficients entiers de racines de S qui est une racine appartient à S .

Nous désignerons par S un ensemble fermé de racines et par H le groupe engendré par les Z'_α pour tous les $\alpha \in S$. Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉOREME 1.- Le groupe H est semi-simple ; le groupe $T_H = T \cap H$ est un tore maximal de H ; les racines de H par rapport à T_H sont les restrictions à T_H des éléments de S ; il y a un groupe de Borel B de G contenant T tel que $B_H = B \cap H$ soit un groupe de Borel de H ; B_H est engendré par les P_α pour celles des racines $\alpha \in S$ qui sont négatives sur la chambre de Weyl associée à B .

Nous aurons besoin au cours de la démonstration d'un résultat relatif aux formules de multiplication dans la partie unipotente B^u d'un groupe de Borel B de G contenant T . Désignons par R_- l'ensemble des racines α qui sont négatives sur la chambre associée à B ; nous supposons l'ensemble R_- ordonné d'une manière quelconque. On sait que l'algèbre $K[B^u]$ des fonctions numériques partout définies sur B^u est engendrée par des fonctions v_α ($\alpha \in R_-$) telles que l'on ait

$$s = \prod_{\alpha \in R_-} \tau_\alpha(v_\alpha(s)) \quad (s \in B^u).$$

Il en résulte que l'on a

$$v_\alpha(ss'^{-1}) = P_\alpha(\dots, v_\beta(s), \dots, v_{\beta'}(s'), \dots),$$

les $P_\alpha(\dots, X_\beta, \dots, Y_{\beta'}, \dots)$ étant des polynômes à coefficients dans K en $2n$ arguments $X_\beta, Y_{\beta'}$, (si n est le nombre d'éléments de R_-).

LEMME 1.- Le polynôme $P_\alpha(\dots, X_\beta, \dots, Y_{\beta'}, \dots)$ est combinaison linéaire des monômes $\prod_{\beta, \beta' \in R_-} X_\beta^{i(\beta)} Y_{\beta'}^{j(\beta')}$ pour lesquels on a $\sum_{\beta, \beta' \in R_-} (i(\beta)\beta + j(\beta')\beta') = \alpha$.

On a évidemment, pour tout élément $t \in T$, $v_\alpha(tst^{-1}) = \alpha(t)v_\alpha(s)$; tenant compte de ce que $t(ss'^{-1})t^{-1} = tst^{-1}(ts't^{-1})^{-1}$, il vient

$$P_\alpha(\dots, \beta(t)X_\beta, \dots, \beta'(t)Y_{\beta'}, \dots) = \alpha(t)P_\alpha(\dots, X_\beta, \dots, Y_{\beta'}, \dots).$$

Si donc on désigne par c le coefficient du monôme

$$\prod_{\beta, \beta' \in R_-} X_\beta^{i(\beta)} Y_{\beta'}^{j(\beta')} \quad \text{dans } P_\alpha, \text{ il vient}$$

$$c \prod_{\beta, \beta' \in R_-} (\beta(t))^{i(\beta)} (\beta'(t))^{j(\beta')} = c \alpha(t) ;$$

il en résulte bien que l'on a $c = 0$ si α n'est pas égal à

$\sum_{\beta, \beta' \in R_-} (i(\beta)\beta + j(\beta')\beta')$ (en notation additive), se qui démontre le lemme 1.

COROLLAIRE.— Soit A une partie de R_- qui possède la propriété suivante : si α, β sont des éléments de A et si $i\alpha + j\beta$ est une racine (i et j étant des entiers > 0), alors $i\alpha + j\beta$ est dans A . L'ensemble B' des éléments de la forme $\prod_{\alpha \in A} s_\alpha$, où $s_\alpha \in P_\alpha$ pour tout $\alpha \in A$, et où A est muni de la structure d'ordre induite par celle de R_- , est un sous-groupe de B^u .

Les éléments s de B' sont caractérisés par la condition que l'on ait $v_\alpha(s) = 0$ pour tout $\alpha \notin A$. Ceci étant, si α est une racine de R_- n'appartenant pas à A et si on met α sous la forme $\sum_{\beta, \beta' \in R_-} (i(\beta)\beta + j(\beta')\beta')$, il y a ou bien une racine $\beta \notin A$ telle que $i(\beta) > 0$ ou bien une racine $\beta' \notin A$ telle que $j(\beta') > 0$; dans les deux cas on a

$$\prod_{\beta, \beta' \in R_-} (v_\beta(s))^{i(\beta)} (v_{\beta'}(s'))^{j(\beta')} = 0 \quad \text{si } s, s' \text{ sont dans } B',$$

ce qui montre le corollaire.

LEMME 2.— Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des racines linéairement indépendantes; la composante connexe T' de l'élément neutre dans $Q_{\alpha_1} \cap \dots \cap Q_{\alpha_r}$ est un tore de codimension r dans T ; le groupe T'' engendré par $T_{\alpha_1}, \dots, T_{\alpha_r}$ est un tore de dimension r ; $T' \cap T''$ est fini, et on a $T = T' T''$.

Le groupe T' est la composante de l'élément neutre dans l'intersection des noyaux de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$; il en résulte que $\Gamma(T')$ est l'ensemble des $\gamma \in \Gamma(T)$ tels que $\langle \gamma, \alpha_i \rangle = 0$ ($1 \leq i \leq r$); comme les α_i sont linéairement indépendantes, ces éléments engendrent un sous-espace de codimension r de $\Gamma^Q(T)$, ce qui démontre la première assertion. Munissons $\Gamma^Q(T)$ d'une forme quadratique définie positive invariante par les opérations du groupe de Weyl; $\Gamma^Q(T_\alpha)$ est alors, pour toute racine α , la droite orthogonale à l'hyperplan de $\Gamma^Q(T)$ d'équation $\alpha = 0$. L'espace engendré par les $\Gamma^Q(T_{\alpha_i})$ est donc le complémentaire orthogonal de l'intersection des hyperplans $\alpha_i = 0$ et est par suite de dimension r puisque $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont linéairement indépendantes. Cet espace est contenu dans $\Gamma^Q(T'')$; par ailleurs il est de la forme $\Gamma^Q(T''_0)$, où T''_0 est un tore qui, contenant chacun des T_{α_i} , contient T'' ; on en conclut que $T'' = T''_0$, donc que T'' est de dimension r . Les éléments de $\Gamma(T')$ sont dans tous les hyperplans $\alpha_i = 0$, donc orthogonaux aux éléments de $\Gamma(T'')$; on en conclut que $\Gamma(T') \cap \Gamma(T'') = \{0\}$, donc qu

$T' \cap T''$ est fini ; l'homomorphisme canonique de $T'T''$ sur $T'T''/T'$ induit un homomorphisme de noyau fini de T'' , d'où $\dim T'T''/T' \geq \dim T'' = r$ et par suite $\dim T'T'' \geq r + \dim T' = \dim T$, d'où $T'T'' = T$.

Ceci dit, nous allons aborder la démonstration du théorème 1.

Si α est une racine de S , w_α transforme une racine β en $\beta - \beta(\gamma_\alpha)\alpha$, et $\beta(\gamma_\alpha)$ est entier ; il en résulte que w_α transforme en lui-même le sous-groupe de $X(T)$ engendré par S , donc aussi l'ensemble S et le sous-espace Y de $X^Q(T)$ engendré par S . Appliquant les résultats de la proposition 1, exposé 14 aux éléments de S et à l'espace vectoriel déduit de Y par extension du corps de base au corps des réels, on voit que, si $r = \dim Y$, il y a r éléments linéairement indépendants $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ de S tels que tout élément de S puisse se mettre sous forme de combinaison linéaire à coefficients tous ≥ 0 ou tous ≤ 0 de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$; ces coefficients sont rationnels, car $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ forment une base de Y . Nous poserons $w_i = w_{\alpha_i}$, $P_i = P_{\alpha_i}$, $Q_i = Q_{\alpha_i}$, $Z'_i = Z'_{\alpha_i}$, $T_i = T_{\alpha_i}$, $\sigma_i = \sigma_{\alpha_i}$. Tout élément α de S est le transformé de l'un des α_i par une opération w du groupe engendré par $w_1, \dots, w_r$ (corollaire à la proposition 3, exposé 14) ; comme $w_\alpha = ww_i^{-1}$ si $\alpha = w \cdot \alpha_i$, on voit que le groupe W_H engendré par les w_α ($\alpha \in S$) est déjà engendré par les w_i . De plus, les opérations de W_H transforment en lui-même le groupe engendré par $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ (car $w_i \cdot \alpha_j$ appartient à ce groupe si $1 \leq i, j \leq r$) et par suite tout élément de S est combinaison linéaire à coefficients entiers des α_i .

Soient T' la composante de l'élément neutre dans $\bigcap_{i=1}^r Q_i$ et $T_H = T_1 \dots T_r$. Il résulte du lemme 2 que $T_H T' = T$ et que $T_H \cap T'$ est fini. Les éléments de T' commutent avec ceux de H ; en effet, si $\alpha \in S$, α est combinaison linéaire à coefficients entiers des α_i , d'où $\alpha(T') = \{1\}$; ceci montre que t' commute avec les éléments de P_α et de $P_{-\alpha}$; il commute évidemment avec ceux de T_α ; comme l'ensemble $P_\alpha T_\alpha P_{-\alpha}$ est ouvert dans Z'_α , c' en est un ensemble de générateurs, ce qui montre que t' commute avec les éléments de Z'_α ; ceci étant vrai pour tout α , t' commute avec les éléments de H . Comme chaque Z'_α est son propre groupe dérivé, H est son propre groupe dérivé ; il résulte alors du lemme 2, exposé 16 que $H \cap T'$ est fini. Le tore T_H est contenu dans H ; il est donc contenu dans un tore maximal $\bar{T}_H$ de H ;

comme les éléments de T' commutent avec ceux de $\bar{T}_H$, $\bar{T}_H T'$ est un tore qui, contenant $T_H T' = T$, lui est identique. Comme $\bar{T}_H \cap T'$ est fini, il en résulte que $\bar{T}_H / T_H$ est fini, d'où $\bar{T}_H = T_H$; T_H est donc un tore maximal de H . Le groupe $H \cap T$ est un sous-groupe commutatif de H qui contient T_H et dont les éléments sont semi-simples; il en résulte que $H \cap T = T_H$ (car le centralisateur de T_H dans H est le produit semi-direct de T_H par un groupe d'éléments unipotents); on a en particulier $T_\alpha \subset T_H$ pour toute racine $\alpha \in S$. De plus, si $\alpha \in S$, l'élément σ_α , qui est dans H et dans le normalisateur de T , est dans le normalisateur de T_H . Nous désignerons par N_H le groupe engendré par T_H et par les σ_i ($1 \leq i \leq r$); N_H / T_H est donc isomorphe au groupe W_H ; pour tout élément w de W_H , nous choisirons un élément σ_w de N_H qui produise l'opération w du groupe de Weyl de G .

Il y a au moins un élément γ de $\Gamma^Q(T)$ tel que l'on ait $\alpha_i(\gamma) < 0$ ($1 \leq i \leq r$), puisque $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont linéairement indépendants. Choisissons d'autre part un élément γ_1 appartenant à une chambre de l'espace $\Gamma^Q(T)$; on peut alors trouver un nombre rationnel a tel que l'on ait

$\rho(\gamma + a \gamma_1) \neq 0$ pour toute racine ρ de G et de plus

$\alpha_i(\gamma + a \gamma_1) < 0$ ($1 \leq i \leq r$); l'élément $\gamma' = \gamma + a \gamma_1$ appartient alors à une chambre sur laquelle $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont négatives; soit B le groupe de Borel qui correspond à cette chambre. Nous désignerons par R_- l'ensemble des racines de G qui sont négatives sur la chambre associée à B , ensemble que nous supposons ordonné d'une manière quelconque, et par S_- l'ensemble $S \cap R_-$; S_- se compose des éléments de S qui sont des combinaisons linéaires à coefficients ≤ 0 de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Si une combinaison linéaire à coefficients entiers > 0 d'éléments de S_- est une racine, cette racine est dans S_- . Nous désignerons par B_H^u le sous-groupe de B engendré par les P_α pour $\alpha \in S_-$; ce sous-groupe se compose des éléments de la forme $\prod_{\alpha \in S_-} s_\alpha$, avec $s_\alpha \in P_\alpha$ pour tout $\alpha \in S_-$ (lemme 1); nous poserons $B_H = B_H^u T_H$; nous proposons de montrer que H est la réunion des ensembles $B_H \sigma_w B_H$ pour tous les $w \in W_H$.

Observons d'abord que H est identique au groupe H' engendré par les Z_i' ($1 \leq i \leq r$). En effet, le groupe H' contient T_H et les éléments σ_i ($1 \leq i \leq r$), donc N_H . Si α est un élément quelconque de S , il y a une opération $w \in W_H$ et un indice i ($1 \leq i \leq r$) tels que $w \cdot \alpha_i = \alpha$, d'où

$\sigma_w Z'_i \sigma_w^{-1} = Z'_\alpha$; comme $\sigma_w \in H'$, on a $Z'_\alpha \subset H'$, ce qui démontre notre assertion. Désignant par E la réunion des $B_H \sigma_w B_H$, il suffira donc de montrer que $Z'_i E \subset E$ ($1 \leq i \leq r$). Soit $S_-^{(i)}$ l'ensemble des éléments $\neq \alpha_i$ de S_- . Soit C_i le groupe engendré par les P_α pour $\alpha \in S_-^{(i)}$; on a $B_H^u = C_i P_i$. Comme C_i est un sous-groupe fermé de codimension ≤ 1 dans B_H^u , c'est un sous-groupe distingué de B_H^u . Par ailleurs, si $\alpha \in S_-^{(i)}$, $w_i \cdot \alpha$ est de la forme $\alpha + k \alpha_i$; comme α n'est pas multiple de α_i , il y a au moins un indice $j \neq i$ tel que le coefficient de α_j dans l'expression de α comme combinaison linéaire de $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ soit > 0 ; il en résulte que le coefficient de α_j dans l'expression de $w_i \cdot \alpha$ est > 0 , donc que $w_i \cdot \alpha \in S^{(i)}$; comme on a $\sigma_i P_\alpha \sigma_i^{-1} = P_{w_i \cdot \alpha}$, on en conclut que σ_i appartient au normalisateur de C_i . Ce normalisateur contient donc $P_i T_i \sigma_i P_i$, qui est dense dans Z'_i ; il en résulte que Z'_i est contenu dans le normalisateur de C_i . On a donc $Z'_i B_H \sigma_w B_H = C_i Z'_i P_i T_i \sigma_w B_H = C_i Z'_i \sigma_w T_i B_H$ puisque $P_i \subset Z'_i$ et que σ_w appartient au normalisateur de H . Supposons d'abord que $w^{-1} \cdot \alpha_i \in S$; dans ce cas, observons que Z'_i est la réunion de $P_i T_i$ et de $P_i \sigma_i P_i$, et que $P_i \sigma_w = \sigma_w P_{w^{-1} \cdot \alpha_i}$ est contenu dans $\sigma_w B_H$. Comme $C_i P_i T_i \subset B_H$, on a dans ce cas $Z'_i B_H \sigma_w B_H \subset E$. Dans le cas où $w^{-1} \cdot \alpha_i$ n'appartient pas à S , posons $w' = w_i w$, d'où $w'^{-1} \cdot \alpha_i = -w^{-1} \cdot \alpha_i \in S$; comme $Z'_i = Z'_i \sigma_i$, on a $Z'_i \sigma_w = Z'_i \sigma_i \sigma_w$ qui est contenu dans $Z'_i \sigma_w T_i$ puisque $\sigma_i \sigma_w \equiv \sigma_w \pmod{T_H}$. On est alors ramené au cas précédent, et on voit que, dans tous les cas, $Z'_i B_H \sigma_w B_H \subset E$, ce qui montre bien que $E = H$.

Montrons maintenant que B_H est un groupe de Borel de H . Comme c'est un sous-groupe résoluble connexe de H , il est en tous cas contenu dans un groupe de Borel $\bar{B}_H$ de B_H . La formule $H = \bigcup_{w \in W_H} B_H \sigma_w B_H$ montre alors que, pour établir que $\bar{B}_H = B_H$, il suffit de montrer que $\sigma_w \notin \bar{B}_H$ si w est une opération distincte de l'identité de W_H . Or on sait qu'il existe au moins une racine $\alpha \in S_-$ telle que $w \cdot \alpha \notin S_-$ (Proposition 6, exposé 14) ; on a alors $w \cdot \alpha = -\beta$ où β est une racine de S_- . Le groupe engendré par B_H et σ_w contient donc P_β , T_β et $P_{-\beta}$, ce qui montre qu'il contient le groupe non résoluble Z'_β , et établit notre assertion. Comme $B \cap H$ est un sous-groupe résoluble de H contenant B_H , on a $B \cap H = B_H$. Si M est le radical de H , M est contenu dans B_H et $M \cap B_H^u$ est engendré par ceux des P_α qu'il contient

(car ce sous-groupe est transformé en lui-même par les opérations de T ; cf. proposition 1, exposé 13). Or, pour toute racine $\alpha \in S_-$, $M \cap Z'_\alpha$ est un sous-groupe résoluble distingué de Z'_α , donc fini, ce qui montre que $P_\alpha \not\subset M$ et que $M \cap B_H^u = \{e\}$. Le groupe algébrique connexe M ne contient donc aucun élément unipotent $\neq e$, ce qui montre que ses éléments sont semi-simples et que c'est un tore ; étant distingué dans H , il appartient au centre de H ; mais, comme H est son propre groupe dérivé, son centre ne contient aucun tore de dimension > 0 (lemme 2, exposé 15) ; M est donc fini, d'où $M = \{e\}$, ce qui montre que H est semi-simple. On a $\alpha(K) = P_\alpha \subset H$ pour tout $\alpha \in S$, ce qui montre que les restrictions à T_H des racines de S sont des racines de H ; comme la dimension du groupe de Borel B_H de H est égale au nombre d'éléments de S_- , donc à la moitié du nombre d'éléments de S , il en résulte que les restrictions à T_H des racines de S sont toutes les racines de H . Le théorème est établi.

REMARQUE.— Pour toute racine $\alpha \in S$, désignons par $\bar{\alpha}$ la restriction de α à T_H ; il est clair que la symétrie $w_{\bar{\alpha}}$ par rapport à $\bar{\alpha}$, considérée comme opérant dans $\Gamma(T_H)$, n'est autre que la restriction à $\Gamma(T_H)$ de l'opération w_α sur $\Gamma(T)$. Par ailleurs, l'inclusion $T_H \longrightarrow T$ définit un homomorphisme $j : X(T) \longrightarrow X(T_H)$ et il est clair que, si on considère w_α (resp. $w_{\bar{\alpha}}$) comme opérant dans $X(T)$ (resp. $X(T_H)$), le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X(T) & \xrightarrow{j} & X(T_H) \\ w_\alpha \downarrow & & \downarrow w_{\bar{\alpha}} \\ X(T) & \xrightarrow{j} & X(T_H) \end{array}$$

est commutatif ; il en résulte que, si β est une autre racine de S et si $w_\alpha \cdot \beta = \beta + k\alpha$, on a $w_{\bar{\alpha}} \cdot \bar{\beta} = \bar{\beta} + k\bar{\alpha}$.

Les groupes définis à partir d'un ensemble fermé S de racines par le procédé indiqué ci-dessus s'appellent les sous-groupes radiciels de G .

Nous nous proposons maintenant d'étudier les sous-groupes distingués connexes fermés de G , et notamment de montrer qu'ils sont radiciels. Établissons d'abord la

PROPOSITION 1.— Soient A le groupe des automorphismes de G et J le groupe des automorphismes intérieurs ; le groupe A/J est alors fini ; si B est un groupe de Borel contenant T , A/J est isomorphe à un groupe de permutation de l'ensemble des racines fondamentales par rapport à B .

Un automorphisme u de G transforme B en un groupe de Borel, qui est conjugué à B dans G ; il y a donc un automorphisme $u_1 \in J_u$ tel que $u_1(B) = B$; u_1 transforme T en un tore maximal contenu dans B , qui est conjugué à T dans B ; il y a donc un automorphisme $u_2 \in u_1 J = uJ$ tel que $u_2(B) = B$, $u_2(T) = T$. Si α est une racine, il en est évidemment de même de la fonction $\alpha' : t \longrightarrow \alpha(u_2^{-1}(t))$; de plus, on a $u_2(P_\alpha) = P_{\alpha'}$. Si α est négative sur la chambre associée à B , on a $P_\alpha \subset B$, d'où $P_{\alpha'} \subset B$, et α' négative sur la chambre associée à B ; l'application $\alpha \longrightarrow \alpha'$ permute donc entre elles les racines fondamentales relatives à B . Soit A_1 le groupe des automorphismes qui conservent B et T et qui conservent toutes les racines relatives à T ; le groupe $A_1 J$ est donc d'indice fini dans A ; si A_0 est le groupe de tous les automorphismes qui conservent T et B , on a $A = A_0 J$ et $A_0 \cap J = A_1$ (car on sait qu'aucune opération distincte de l'identité du groupe de Weyl ne laisse fixes toutes les racines fondamentales). Le groupe A_1 est un sous-groupe distingué de A_0 et A_0/A_1 est isomorphe à un groupe de permutations des racines fondamentales ; $A_1 J$ est donc distingué dans A , et $A/A_1 J$ est isomorphe à A_0/A_1 . Nous allons maintenant montrer que $A_1 \subset J$. Soit à partir de maintenant u un élément de A_1 ; on a donc $u(P_\alpha) = P_\alpha$ pour toute racine α . Comme les seuls automorphismes de K sont les homothéties, il y a un élément $c_\alpha \neq 0$ de K tel que l'on ait $u(\tau_\alpha(\lambda)) = \tau_\alpha(c_\alpha \lambda)$ ($\lambda \in K$). Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ les racines fondamentales par rapport à B ; comme elles sont linéairement indépendantes, il y a un élément t de T tel que $c_{\alpha_i} = \alpha_i(t)$ ($1 \leq i \leq \ell$) ; multipliant u par l'automorphisme intérieur produit par t^{-1} , on se ramène au cas où les c_{α_i} ($1 \leq i \leq \ell$) sont égaux à 1 ; supposons désormais qu'il en soit ainsi ; u laisse donc fixes les éléments des groupes P_{α_i} . Par ailleurs, u laisse fixes les éléments de T ; en effet, les éléments de la forme $u(t)t^{-1}$ ($t \in T$) forment un sous-groupe connexe T_0 de T sur lequel chaque racine est constante de valeur 1 ; comme les racines engendrent $X^Q(T)$, il en résulte que T_0 se réduit à l'élément neutre, ce qui montre que u laisse fixes les éléments de T . Par ailleurs, on a $u(P_{-\alpha_i}) = P_{-\alpha_i}$; comme $P_{\alpha_i} T_{\alpha_i} P_{-\alpha_i}$ est un système de générateurs de Z'_{α_i} , u transforme le groupe Z'_{α_i} en lui-même ; comme le normalisateur de T_{α_i} dans Z'_{α_i} est $T_{\alpha_i} \cup T_{\alpha_i} \sigma_{\alpha_i}$, on a $u(\sigma_{\alpha_i}) = t_0 \sigma_{\alpha_i}$, t_0 étant un élément de T_{α_i} . Or, soit s' un

élément distinct de l'élément neutre de $P_{-\alpha_i}$; rappelons que Z'_{α_i} est la réunion des ensembles disjoints $P_{\alpha_i} T_{\alpha_i} \sigma_{\alpha_i} P_{\alpha_i}$ et $P_{\alpha_i} T_{\alpha_i}$; s' peut donc se mettre sous la forme $s_1 t_1 \sigma_{\alpha_i} s_2$, où $s_1, s_2 \in P_{\alpha_i}$, $t_1 \in T_{\alpha_i}$; s_1, s_2 et t_1 sont laissés fixes par u , et on a

$$s'^{-1} u(s') = s_2 \sigma_{\alpha_i}^{-1} t_1 \sigma_{\alpha_i} s_2 ;$$

cet élément est d'une part dans $P_{-\alpha_i}$ et d'autre part, comme le montre le second membre, dans $P_{\alpha_i} T_{\alpha_i}$; c'est donc l'élément neutre, ce qui montre que u laisse invariants les éléments de $P_{-\alpha_i}$ ainsi que σ_{α_i} ; on en déduit que u laisse invariants tous les éléments du groupe Z'_{α_i} , et par suite aussi du groupe $Z_{\alpha_i} = TZ'_{\alpha_i}$. Or on sait que les groupes Z_{α_i} ($1 \leq i \leq \ell$) engendrent le groupe G (théorème 2, exposé 12) ; u est donc l'automorphisme identique, ce qui achève la démonstration de la proposition 1.

COROLLAIRE.- Soit H un sous-groupe distingué fermé connexe de G ; H est alors semi-simple ; si H' est la composante connexe de l'élément neutre dans le centralisateur de H , on a $G = HH'$ et $H \cap H'$ est fini ; le groupe G/H est semi-simple.

Le radical de H est évidemment transformé en lui-même par tout automorphisme de H ; c'est donc un sous-groupe résoluble distingué connexe de G , ce qui montre qu'il se réduit à son élément neutre. Si on fait correspondre à tout $s \in G$ l'automorphisme $h \mapsto shs^{-1}$ de H , on obtient un homomorphisme de G sur un groupe A d'automorphismes de H , qui contient le groupe J des automorphismes intérieurs ; A/J est donc fini. Or, si H'_0 est le centralisateur de H , l'image réciproque de J par l'homomorphisme en question est le sous-groupe fermé HH'_0 ; comme ce sous-groupe est d'indice fini dans G , il est égal à G d'où $HH'_0 = G$ puisque H' est d'indice fini dans H'_0 . Le groupe $H \cap H'$ est dans le centre de H , et est donc fini. L'homomorphisme canonique de G sur G/H induit un épimorphisme rationnel de H' sur G/H ; H' est semi-simple comme sous-groupe distingué fermé connexe de G ; G/H est donc semi-simple en vertu du

LEMME 3.- Si ρ est un épimorphisme rationnel de noyau fini de G sur un groupe algébrique G' , G' est semi-simple.

Le noyau N de ρ , étant un sous-groupe distingué fini de G , est dans le centre de G ; si M' est le radical de G' , $\rho^{-1}(M')/N$ est isomorphe à M' , donc résoluble; $\rho^{-1}(M')$ est donc un sous-groupe distingué résoluble de G , et est par suite fini, ce qui démontre le lemme.

THÉOREME 2.- Tout sous-groupe distingué fermé connexe H de G est radiciel; pour qu'une partie S de l'ensemble R des racines R de G détermine un sous-groupe radiciel distingué H de G , il faut et il suffit que chacun des ensembles S et $R-S$ soit fermé; s'il en est ainsi, le groupe radiciel déterminé par $R-S$ est la composante connexe de l'élément neutre dans le centralisateur de H .

Soit H un sous-groupe distingué fermé connexe de G , et soit H' la composante de l'élément neutre dans son centralisateur. Soient T_H (resp. $T_{H'}$) un tore maximal de H (resp. H') et B_H (resp. $B_{H'}$) un groupe de Borel de H (resp. H'). Alors $B_H B_{H'}$ est résoluble et connexe, donc contenu dans un groupe de Borel de G , et $T_H T_{H'}$ est un tore, donc contenu dans un tore maximal de G . Comme tous les tores maximaux de G sont conjugués, on peut supposer que $T_H T_{H'} \subset T$. Comme $G = HH'$, un élément de T peut se mettre sous la forme ss' , avec $s \in H$, $s' \in H'$; comme s' et ss' commutent avec les éléments de T_H , il en est de même de s , d'où $s \in T_H$ puisque T_H est son propre centralisateur dans H ; on voit de même que $s' \in T_{H'}$, d'où $T = T_H T_{H'}$. Soit B un groupe de Borel de G contenant $B_H B_{H'}$, donc T ; le groupe $B \cap H$ (resp. $B \cap H'$) est un sous-groupe résoluble de H (resp. H') contenant B_H (resp. $B_{H'}$); on a donc $B_H = B \cap H$, $B_{H'} = B \cap H'$, ce qui montre que B_H , $B_{H'}$ sont des sous-groupes distingués de B . Un élément de B se met sous la forme $s_1 s'_1$ où $s_1 \in H$, $s'_1 \in H'$; comme $s_1 s'_1$ et s'_1 appartiennent au normalisateur de B_H , il en est de même de s_1 , d'où $s_1 \in B_H$, puisque B_H est son propre normalisateur dans H ; on voit de même que $s'_1 \in B_{H'}$, ce qui montre que $B = B_H B_{H'}$. Soit B_H^u l'ensemble des éléments unipotents de B_H ; comme c'est un sous-groupe distingué de B contenu dans B^u , il est engendré par ceux des P_α qu'il contient. Soient R_- l'ensemble des racines de G qui sont négatives sur la chambre associée à B et S_- l'ensemble des $\alpha \in R_-$ tels que $P_\alpha \in B_H$; il est clair que la condition $\alpha \in R_- - S_-$ entraîne $P_\alpha \in B_{H'}$. Soit $\alpha \in S_-$; le groupe $P_{-\alpha}$, qui est conjugué à P_α dans G , est dans H ; or Z'_α est engendré par P_α et $P_{-\alpha}$; en effet, le normalisateur dans Z'_α du groupe engendré par P_α et $P_{-\alpha}$ contient

T_α , et est donc identique à Z'_α , puisque $P_\alpha T_\alpha P_{-\alpha}$ est un ensemble de générateurs de Z'_α ; le groupe engendré par P_α et $P_{-\alpha}$ est donc un sous-groupe distingué de Z'_α , et par suite semi-simple; comme tout groupe semi-simple de dimension > 0 est de dimension ≥ 3 , le groupe engendré par P_α et $P_{-\alpha}$ est Z'_α tout entier. On a donc $Z'_\alpha \subset H$ pour tout $\alpha \in S_-$; de plus, il est clair que le groupe $\tilde{B}_H$ engendré par les $P_{-\alpha}$ pour $\alpha \in S_-$ est le groupe de Borel de H opposé à B_H (relativement à T_H); le groupe engendré par les Z'_α pour $\alpha \in S_-$ contient $B_H \tilde{B}_H$, qui est une partie ouverte de H ; ce groupe est donc identique à H . Soit S l'ensemble composé de S_- et des opposées des racines de S_- ; comme les éléments de $T_{H'}$ commutent avec ceux de H , il est clair que les racines appartenant à S prennent la valeur 1 sur $T_{H'}$. On voit de même que H' est engendré par les Z'_α pour $\alpha \in R_- - S_-$; $R - S$ est l'ensemble des $\pm \alpha$ pour $\alpha \in R_- - S_-$, et les racines de $R - S$ prennent la valeur 1 sur T_H . Comme $T_H T_{H'} = T$, aucune racine ne peut être égale à 1 à la fois sur T_H et sur $T_{H'}$; S (resp. $R - S$) est donc l'ensemble de toutes les racines de G qui sont égales à 1 sur $T_{H'}$ (resp. T_H), ce qui montre que S et $R - S$ sont fermés.

Soit réciproquement S un ensemble fermé de racines tel que $R - S$ soit fermé. Nous allons montrer que, si $\alpha \in S$, $\beta \in R - S$, tout élément de P_α commute avec tout élément de P_β . Observons d'abord que, puisque S et $R - S$ sont fermés, aucun élément de la forme $i\alpha + j\beta$, où i, j sont des entiers > 0 ne peut appartenir à S ou à $R - S$; on en conclut que $i\alpha + j\beta$ n'est pas une racine si $i \neq 0$, $j \neq 0$. Par ailleurs, il y a au moins un groupe de Borel B contenant T tel que α et β soient négatives sur la chambre associée à B ; en effet, α et β étant linéairement indépendantes, l'ensemble des $\gamma \in \Gamma^Q(T)$ tels que $\alpha(\gamma)$ et $\beta(\gamma)$ soient < 0 est une partie ouverte non vide de $\Gamma^Q(T)$, et rencontre par suite au moins une chambre. Ceci étant, il résulte du lemme 1 que $P_\alpha P_\beta$ est un sous-groupe de B . Comme les éléments de ce groupe sont unipotents et comme P_α et P_β en sont des sous-groupes fermés de codimension 1, P_α et P_β sont des sous-groupes distingués de $P_\alpha P_\beta$. Si $s \in P_\alpha$, on a $s \tau_\beta(\lambda) s^{-1} = \tau_\beta(c(s)\lambda)$, $c(s) \in K^*$ (le groupe multiplicatif des éléments $\neq 0$ de K). L'application $s \rightarrow c(s)$ est un homomorphisme rationnel (puisque $\tau_\alpha(c(s)) = s \tau_\alpha(1) s^{-1}$) de P_α dans K^* ; il en résulte que $c(s) = 1$ pour tout $s \in P_\alpha$, donc que tout élément de P_α commute avec tout élément de P_β . Nous avons vu plus haut que Z'_α (resp.

Z'_β) est engendré par P_α et $P_{-\alpha}$ (resp. P_β et $P_{-\beta}$) ; comme $-\alpha \in S$, $-\beta \in R-S$, on voit que tout élément de Z'_α commute avec tout élément de Z'_β . Soient H et H' les groupes radiciels définis par les ensembles S et $R-S$; il résulte de ce qu'on vient d'établir que tout élément de H' commute avec tout élément de H . Par ailleurs, le groupe HH' contient Z'_α pour toute racine α ; comme il contient tous les T_α , il contient T , donc aussi les $Z_\alpha = Z'_\alpha T$, ce qui montre que c'est G tout entier. La formule $HH' = G$ montre alors que H et H' sont des sous-groupes distingués de G . Le théorème 2 est donc établi.

Soit S un ensemble fermé de racines tel que $R-S$ soit fermé ; si $\alpha \in S$, $\beta \in R-S$, $w_\alpha \cdot \beta$ est de la forme $\beta + k\alpha$, k étant un entier ; cet entier est nul puisque $i\alpha + j\beta$ n'est pas racine si $i \neq 0$, $j \neq 0$. Soit Σ un système fondamental de racines ; alors Σ est la réunion de $\Sigma \cap S = \Sigma_1$ et de $\Sigma \cap (R-S) = \Sigma_2$, et, si $\alpha \in \Sigma_1$, $\beta \in \Sigma_2$, l'entier de Cartan relatif à α et β est nul. Supposons réciproquement donnée une décomposition $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ de Σ en deux ensembles tels que l'entier de Cartan relatif à une racine de Σ_1 et une racine de Σ_j soit nul si $i \neq j$. Soit S (resp. S') l'ensemble des racines qui sont combinaisons linéaires de racines de Σ_1 (resp. Σ_2). Alors toute racine appartient soit à S soit à S' . En effet, si α appartient par exemple à Σ_1 , w_α permute entre elles les racines de S et laisse invariantes les racines appartenant à Σ_2 , donc aussi toutes celles de S' ; de même, si $\alpha \in \Sigma_2$, w_α laisse invariantes les racines de S et permute entre elles celles de S' . Comme le groupe de Weyl est engendré par les w_α pour $\alpha \in \Sigma$, ses opérations transforment chacun des ensembles S , S' en lui-même. Comme toute racine est transformée d'une racine de Σ par une opération du groupe de Weyl, il en résulte bien que $S \cup S'$ est l'ensemble de toutes les racines. Par ailleurs, il est clair que S et S' sont fermés.

Munissons $X^Q(T)$ d'un produit scalaire défini par une forme quadratique définie positive et invariante par le groupe de Weyl ; on voit alors tout de suite que, α et β étant des racines, une condition nécessaire et suffisante pour que w_α laisse β fixe est que α et β soient orthogonales.

Nous dirons qu'un système de racines est simple s'il est impossible de le décomposer en deux parties fermées non vides disjointes. Il résulte alors du théorème 2 que l'on a la

PROPOSITION 1.- Pour que G n'admette pas d'autres sous-groupes distingués fermés connexes que $\{e\}$ et lui-même, il faut et il suffit que l'ensemble de ses racines soit simple.

Par ailleurs, dans le cas général, soient $S_1, \dots, S_h$ les éléments minimaux de l'ensemble des parties $S \neq \emptyset$ de l'ensemble R des racines telles que S et $R-S$ soient fermés ; il est clair que R est la réunion des ensembles disjoints S_i . On a donc le résultat suivant :

PROPOSITION 2.- Le groupe G contient un certain nombre de sous-groupes fermés distingués connexes G_i qui possèdent les propriétés suivantes : pour tout i , l'ensemble des racines de G_i est simple ; on a $G = G_1, \dots, G_h$; si $i \neq j$, tout élément de G_i commute avec tout élément de G_j ; le groupe $G_i \cap \bigcap_{j \neq i} G_j$ est fini.

De plus, on voit facilement que l'ensemble des groupes G_i est bien déterminé par la connaissance de G .

Nous appellerons presque simple un groupe semi-simple dont l'ensemble des racines est simple ; les notations étant celles de la proposition 2, nous dirons que les G_i sont les composantes presque simples de G .