

**SUR LES REPRÉSENTATIONS DE DIMENSION FINIE  
DE LA SUPER ALGÈBRE DE LIE  $\mathfrak{gl}(m, n)$**   
[d'après Serganova]

par **Caroline GRUSON**

**INTRODUCTION**

Les représentations de dimension finie d'une algèbre de Lie semi-simple complexe de dimension finie sont sommes directes de leurs composantes irréductibles. Si on fixe une sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  dans une algèbre de Lie simple et une représentation de dimension finie  $V$  de cette algèbre de Lie, les éléments de  $\mathfrak{h}$  agissent de manière simultanément diagonalisable dans  $V$  et les valeurs propres s'organisent en des formes linéaires sur  $\mathfrak{h}$ . Connaître ces formes linéaires, c'est-à-dire les *poids* de la représentation  $V$ , et leurs multiplicités revient à connaître  $V$  si  $V$  est irréductible sur l'algèbre de Lie initiale : c'est ce qu'on appelle le caractère de  $V$  et Hermann Weyl en a donné une formule générale, qui est une somme alternée indexée par le groupe de Weyl de la situation.

Les algèbres de Lie  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduées (ou super algèbres de Lie) simples ont été classifiées par Victor Kac en 1977, [9]. Dans [8], Kac étudie la théorie des représentations de ces algèbres et, dans le cas de  $\mathfrak{gl}(m, n)$ , il introduit les modules de Kac, qui sont de dimension finie et possèdent une formule des caractères analogue à la formule de Weyl. Malheureusement (?), la catégorie  $\mathcal{F}$  des représentations de  $\mathfrak{gl}(m, n)$  de dimension finie sur lesquelles une sous-algèbre de Cartan de la partie paire  $\mathfrak{gl}(m) \times \mathfrak{gl}(n)$  agit de manière diagonalisable n'est pas semi-simple : certaines représentations irréductibles, dites atypiques, ne sont pas scindées dans les représentations où elles apparaissent comme sous-quotients. Les autres représentations irréductibles, dites typiques, sont en fait des modules de Kac et on dispose donc d'une formule des caractères pour eux.

Le problème de trouver le caractère des représentations atypiques de  $\mathfrak{gl}(m, n)$ , resté ouvert depuis 1977, étudié par Bernstein et Leites dans [2], a été résolu par Vera Serganova en 1996 ([12]). Chaque représentation irréductible atypique  $L$  est quotient propre d'un module de Kac  $V$ , et si on regarde une suite de Jordan-Hölder de ce module de Kac, on voit apparaître des représentations irréductibles atypiques, qui sont

dans la même composante connexe (ou dans le même bloc) de  $\mathcal{F}$  que  $L$  et  $V$ . Le premier théorème (théorème 2.2) explicite ces représentations irréductibles, qui sont en nombre fini. Le second théorème (théorème 2.3) exprime le caractère d'une représentation irréductible atypique comme une somme infinie, il est donc d'un maniement plus compliqué. Ce sont ces résultats qui sont exposés ici.

La difficulté principale du cas  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué provient du fait que le centre de l'algèbre enveloppante  $\mathcal{Z}(\mathfrak{gl}(m, n))$  a une structure beaucoup plus compliquée que dans le cas classique. Sergeev, dans [15], donne une description de ce centre dans le cas de  $\mathfrak{gl}(m, n)$ . Il s'agit des polynômes super symétriques. D'autre part,  $\mathcal{Z}(\mathfrak{gl}(m, n))$  intervient dans des questions de géométrie algébrique étudiées par Fulton et Pragacz dans [6]. On remarquera que les difficultés soulevées ressemblent beaucoup aux ennuis que l'on a quand on étudie les représentations des algèbres de Lie simples en caractéristique  $p$  (voir [7]). Plusieurs constructions établies par Serganova se font de manière analogue en caractéristique  $p$ , même si les conclusions sont assez différentes.

Notons que Jonathan Brundan fait un lien dans [4] entre certaines catégories de représentations du groupe quantique  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_\infty)$  et certaines catégories de  $\mathfrak{gl}(m, n)$ -modules. Ses résultats répondent aux mêmes questions que ceux de Serganova, avec une approche très différente, mais ne simplifient pas, hélas, les difficultés calculatoires qu'on rencontre.

Le plan de ce texte est le suivant : dans les deux premières parties, je donne les définitions, les notations et les résultats nécessaires pour énoncer les deux principaux théorèmes de [12], et je traite des exemples. Les parties 3 et 4 contiennent des éléments de la démonstration de Vera Serganova, l'induction géométrique pour le paragraphe 3 et un principe de récurrence pour 4 ; elles sont basées sur les articles [14] et [12]. Pour terminer, au paragraphe 5, j'essaie de dépeindre l'état actuel du sujet, en particulier les résultats de [13] et [4].

À partir du paragraphe 3, je suppose que le lecteur a une certaine familiarité avec la théorie des représentations.

J'ai choisi de ne citer en bibliographie que les textes qui m'ont servi directement. L'article de Brundan ([4]) contient une bibliographie très bien faite sur le sujet.

Je suis très reconnaissante envers tous ceux avec lesquels j'ai discuté de ce texte, tout particulièrement Corinne Blondel, Michel Duflo, Laurent Gruson, Séverine Leidwanger, Jean-François Robinet et Jerzy Weyman.

Je remercie très chaleureusement Vera Serganova pour ses réponses claires et rapides à mes questions, pour sa relecture attentive de la présente rédaction et pour sa disponibilité et sa gentillesse pendant la préparation de cet exposé.

## 1. LE CONTEXTE : DÉFINITIONS ET NOTATIONS

Soient  $m$  et  $n$  deux entiers supérieurs ou égaux à 1. On définit la super algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m, n)$ ; elle est constituée des matrices  $(m+n) \times (m+n)$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , munies de la  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduation suivante :

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_0 &= \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}), D \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) \right\}, \\ \mathfrak{g}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}, B \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m), C \in \text{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n) \right\},\end{aligned}$$

et du crochet de Lie défini sur les éléments homogènes  $u$  dans  $\mathfrak{g}_{p(u)}$  et  $v$  dans  $\mathfrak{g}_{p(v)}$  par :

$$[u, v] := uv - (-1)^{p(u)p(v)}vu$$

et prolongé par bilinéarité.

Ce crochet vérifie les axiomes des crochets de super algèbres de Lie (super antisymétrie et identité de Jacobi graduée : pour tous  $u, v, w$  homogènes dans  $\mathfrak{g}$ , on a  $[u, [v, w]] + (-1)^{p(u)(p(v)+p(w))}[v, [w, u]] + (-1)^{p(w)(p(u)+p(v))}[w, [u, v]] = 0$ ).

Le contexte étant  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué, on utilise une indéterminée  $\varepsilon$ , de carré 1, pour différencier les parties paires et impaires.

**DÉFINITION 1.1.** — Soit  $V = V_0 \oplus V_1$  un espace vectoriel  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué, de (super) dimension  $k + \varepsilon l$  (i.e. la dimension de la partie paire est  $k$  et la dimension de la partie impaire est  $l$ ); on notera  $\mathfrak{gl}(V)$  la super algèbre de Lie des endomorphismes gradués de  $V$  (qui est isomorphe à  $\mathfrak{gl}(k, l)$  par le choix d'une base homogène de  $V$ ).

On dira que  $V$  est un  **$\mathfrak{g}$ -module**, ou une **représentation** de  $\mathfrak{g}$ , si on s'est donné un morphisme de super algèbres de Lie  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ .

On dira que la représentation  $V$  est **irréductible** ou **simple** si elle ne contient aucune sous-représentation non triviale.

Soit  $\mathfrak{h}$  la sous-algèbre de Cartan de  $\mathfrak{g}_0$  constituée des matrices diagonales (remarquons que  $\mathfrak{h}$  contient le centre de dimension 1 de  $\mathfrak{g}$ ).

### Racines de $\mathfrak{g}$

L'ensemble des racines de  $\mathfrak{g}$  est par définition constitué de l'ensemble  $\Delta_0$  des racines (au sens de [3]) de  $\mathfrak{g}_0$  et de l'ensemble  $\Delta_1$  des poids de  $\mathfrak{g}_1$ , vu comme  $\mathfrak{g}_0$ -module.

Remarquons que l'on peut munir  $\mathfrak{g}$  d'une graduation sur  $\mathbb{Z}$ , compatible avec la structure de super algèbre de Lie, en posant :

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^0 &= \mathfrak{g}_0, \\ \mathfrak{g}^{+1} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) \right\}, \\ \mathfrak{g}^{-1} &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}, C \in \text{Hom}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n) \right\}.\end{aligned}$$

Notons  $\mathfrak{b}_0$  la sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}_0$  formée des matrices triangulaires supérieures par blocs; alors  $\mathfrak{b} := \mathfrak{b}_0 \oplus \mathfrak{g}^{+1}$  est une *sous-algèbre de Borel* de  $\mathfrak{g}$  ce qui

permet, comme dans le cas classique, de séparer les racines de  $\mathfrak{g}$  en racines positives et négatives.

On note  $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m+n}$  la base usuelle de  $\mathfrak{g}$  et  $(E_{i,j}^*)_{1 \leq i,j \leq m+n}$  la base duale. On appelle *super trace* la forme linéaire  $Str = E_{1,1}^* + \dots + E_{m,m}^* - E_{m+1,m+1}^* - \dots - E_{m+n,m+n}^*$ . Elle est  $\mathfrak{g}$ -invariante, et permet de définir une forme bilinéaire  $\mathfrak{g}$ -invariante non dégénérée sur  $\mathfrak{g}$  par  $B(u,v) := Str(v.u)$  pour  $u$  et  $v$  dans  $\mathfrak{g}$ . Sa restriction à  $\mathfrak{h}$  est encore non dégénérée et on note  $\langle ; \rangle$  le produit scalaire sur  $\mathfrak{h}^*$  qui s'en déduit.

Si on note  $\varepsilon_i$  (resp.  $\delta_j$ ) l'élément  $E_{i,i}^*$  (resp.  $E_{m+j,m+j}^*$ ) de  $\mathfrak{g}^*$ , alors les  $\varepsilon_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , et les  $\delta_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , forment une base de  $\mathfrak{h}^*$  et on a  $\langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \delta_{ij}$ ,  $\langle \delta_i, \delta_j \rangle = -\delta_{ij}$  et  $\langle \varepsilon_i, \delta_j \rangle = 0$ . On pose :

$$\Delta_0^+ = \{(\varepsilon_i - \varepsilon_j), 1 \leq i < j \leq m\} \cup \{(\delta_i - \delta_j), 1 \leq i < j \leq n\},$$

$$\Delta_1^+ = \{(\varepsilon_i - \delta_j), 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\},$$

avec  $\Delta_0 = \Delta_0^+ \cup -\Delta_0^+$  et  $\Delta_1 = \Delta_1^+ \cup -\Delta_1^+$ . Remarquons que toutes les racines de  $\Delta_1$ , qu'on appelle racines *impaires*, sont isotropes. Les racines de  $\Delta_0$  sont dites *paires*.

Enfin, on notera  $W$  le groupe de Weyl de  $\mathfrak{g}_0$ , identifié au produit de groupes symétriques  $\mathfrak{S}_m \times \mathfrak{S}_n$ .

### Modules et poids

On étudie ici les  $\mathfrak{g}$ -modules dans lesquels la sous-algèbre de Cartan  $\mathfrak{h}$  agit de manière diagonalisable. Tout  $\mathfrak{g}$ -module est un  $\mathfrak{g}_0$ -module, par restriction. Les  $\mathfrak{g}$ -modules de dimension finie ont des *poids*, qui correspondent aux valeurs propres de  $\mathfrak{h}$  agissant sur ceux-ci. Ce sont des éléments de  $\mathfrak{h}^*$ .

Soit  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ; on dit que  $\lambda$  est un *poids entier* si les coordonnées de  $\lambda$  dans la base ci-dessus sont entières (ce qui implique que  $\langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$ ,  $\forall \alpha \in \Delta_0$ ), et on note  $P$  l'ensemble des poids entiers.

On pose  $\rho = \frac{1}{2}(\sum_{\alpha \in \Delta_0^+} \alpha - \sum_{\alpha \in \Delta_1^+} \alpha)$ . On a

$$\rho = \frac{1}{2}((m-n-1)\varepsilon_1 + (m-n-3)\varepsilon_2 + \dots + (-m-n+1)\varepsilon_m +$$

$$+ (m+n-1)\delta_1 + (m+n-3)\delta_2 + \dots + (m-n+1)\delta_n)$$

et, pour toute racine paire  $\alpha$ , on pose  $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ . On dira que  $\lambda$  est un *poids dominant* si  $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{N}$ ,  $\forall \alpha \in \Delta_0^+$ . On note  $P^+$  l'ensemble des poids dominants.

Si  $\lambda = a_1\varepsilon_1 + \dots + a_m\varepsilon_m + b_1\delta_1 + \dots + b_n\delta_n$ , on a :

$$\lambda \in P^+ \Leftrightarrow \lambda \in P \text{ et } a_1 \geq \dots \geq a_m, b_1 \geq \dots \geq b_n.$$

De plus, si  $\lambda \in P^+$ , on a alors  $\lambda + \rho = x_1\varepsilon_1 + \dots + x_m\varepsilon_m + y_1\delta_1 + \dots + y_n\delta_n$  avec  $x_1 > \dots > x_m$ ,  $x_{i+1} - x_i \in \mathbb{Z}$  et  $y_1 > \dots > y_n$ ,  $y_{i+1} - y_i \in \mathbb{Z}$ .

On dispose par ailleurs d'un *ordre partiel* sur les poids entiers défini par : si  $\lambda$  et  $\mu$  sont dans  $P$ , on dit que  $\lambda \geq \mu$  si  $\lambda - \mu$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients dans  $\mathbb{N}$ ,  $\sum_{\alpha_k \in \Delta_0^+ \cup \Delta_1^+} n_k \alpha_k$ .

*Remarque 1.2.* — La catégorie des  $\mathfrak{g}$ -modules  $\mathfrak{h}$ -diagonalisables de dimension finie,  $\mathcal{F}$ , munie des morphismes de  $\mathfrak{g}$ -modules de degré 0, est abélienne mais n'est pas semi-simple, contrairement à la catégorie correspondante pour  $\mathfrak{g}_0$ . D'autre part, un  $\mathfrak{g}$ -module irréductible  $V$  de  $\mathcal{F}$  a un *plus haut poids*, c'est-à-dire qu'il existe  $\lambda \in P^+$  tel que, pour tout poids  $\mu$  de  $V$ , on a  $\lambda \geq \mu$ .

### Algèbre enveloppante et caractère infinitésimal

Comme dans le cas classique (voir [5]), on dispose de l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ , d'un théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, et du centre  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  de  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ . Contrairement à ce dont nous avons l'habitude,  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  n'est plus un anneau de polynômes. L'article [15] donne une description complète de la structure de  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ . Par le lemme de Schur, si  $V$  est un  $\mathfrak{g}$ -module irréductible de dimension finie, tout élément  $z$  de  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  agit par un scalaire  $z(V)$  sur  $V$  et on peut donc définir le *caractère infinitésimal* associé à  $V$  sur  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  :

$$\chi_V : \mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z(V).$$

De même, si  $V$  est un module indécomposable avec plus haut poids (par exemple un module de Kac ou un module de Verma, voir les définitions dans l'alinéa suivant), tout élément  $z$  de  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  agit par un scalaire sur  $V$  et  $\chi_V$  est bien défini.

### Construction de modules de plus haut poids

Soit  $\lambda \in P$ . On construit le *module de Verma*  $M_\lambda$  de plus haut poids  $\lambda$  : soit  $\mathbb{C}_\lambda$  le caractère de  $\mathfrak{b}$  qui étend trivialement le caractère  $\lambda$  de  $\mathfrak{h}$ . On pose :

$$M_\lambda = \text{Ind}_{\mathcal{U}(\mathfrak{b})}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} \mathbb{C}_\lambda.$$

C'est un  $\mathfrak{g}$ -module de dimension infinie qui admet un unique sous-module maximal, il est donc indécomposable. On note  $L_\lambda$  son unique quotient simple, c'est le  *$\mathfrak{g}$ -module simple de plus haut poids  $\lambda$* , on démontre ([8]) que  $L_\lambda$  est de dimension finie si et seulement si  $\lambda \in P^+$ .

Remarquons maintenant que, si  $\lambda \in P^+$ , alors il existe un  $\mathfrak{g}_0$ -module simple de plus haut poids  $\lambda$  et de dimension finie, que nous noterons  $L_\lambda(\mathfrak{g}_0)$ . On étend trivialement l'action à  $\mathfrak{g}^{+1}$ , ce qui nous donne un  $\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}^{+1}$ -module de dimension finie. On fait enfin une induction en posant :

$$V_\lambda = \text{Ind}_{\mathcal{U}(\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}^{+1})}^{\mathcal{U}(\mathfrak{g})} L_\lambda(\mathfrak{g}_0).$$

Or l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}^{-1}$  est isomorphe, comme  $\mathbb{C}$ -algèbre, à l'algèbre extérieure de l'espace vectoriel de dimension finie  $\mathfrak{g}^{-1}$ . En faisant cette induction, on obtient donc un  $\mathfrak{g}$ -module de dimension finie  $V_\lambda$  indécomposable qui s'appelle le *module de Kac* de plus haut poids  $\lambda$ . Le module simple  $L_\lambda$  est un quotient de  $V_\lambda$ .

### Modules typiques et atypiques

Rappelons que, dans le cas classique, si  $\mathfrak{a}$  est une algèbre de Lie réductive et si on a choisi  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$  une sous-algèbre de Cartan contenue dans une sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{a}$ , soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux poids entiers ; notons  $\chi_\lambda$  le caractère infinitésimal associé au

$\mathfrak{a}$ -module simple de plus haut poids  $\lambda$ ,  $W$  le groupe de Weyl de la situation et  $\rho$  la demi-somme des racines positives. On a :

$$\chi_\lambda = \chi_\mu \iff \exists w \in W \text{ t.q. } \mu = w(\lambda + \rho) - \rho.$$

Revenons à  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(m, n)$ , en gardant la notation  $\chi_\lambda$  pour le caractère infinitésimal associé au module simple de plus haut poids  $\lambda$ ,  $L_\lambda$ .

On introduit une relation d'équivalence sur l'ensemble des poids entiers  $P$  :

$$\lambda \sim \mu \iff \chi_\lambda = \chi_\mu.$$

DEFINITION-PROPOSITION 1.3. — Soit  $\lambda \in P^+$ .

i) Si pour toute racine  $\alpha$  dans  $\Delta_1^+$ , on a  $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle \neq 0$ , alors  $\lambda$  (et le module simple  $L_\lambda$ ) est dit **typique**. Pour tout  $\mu$ , on a alors

$$\chi_\lambda = \chi_\mu \iff \exists w \in W \text{ t.q. } \mu = w(\lambda + \rho) - \rho.$$

ii) Si il existe  $\alpha$  dans  $\Delta_1^+$  telle que  $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0$ , alors  $\lambda$  (et le module simple  $L_\lambda$ ) est dit **atypique** et on a, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ ,  $\chi_\lambda = \chi_{\lambda+k\alpha}$ .

DÉFINITION 1.4. — Soit  $\lambda$  un poids dominant atypique. On appelle **degré d'atypie** de  $\lambda$  et on note  $\#\lambda$  le cardinal de l'ensemble  $A(\lambda)$  suivant :

$$A(\lambda) := \{\alpha \in \Delta_1^+, \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0\}.$$

Remarquons que  $A(\lambda)$  est constitué de racines deux à deux orthogonales et indépendantes, ce qui fait que  $\#\lambda \leq \inf(m, n)$ .

Si  $\lambda$  est typique, l'ensemble  $A(\lambda)$  est vide et on pose  $\#\lambda = 0$ .

PROPOSITION 1.5. — Soit  $\lambda$  un poids dominant atypique, soit  $\mu$  dans  $P$ . On a

$$\chi_\lambda = \chi_\mu \iff \lambda \sim \mu$$

$$\lambda \sim \mu \iff \lambda \sim' \mu,$$

où  $\sim'$  est la relation d'équivalence engendrée par :

i)  $\lambda \sim' \mu$  si  $\exists w \in W$  t.q.  $\mu = w(\lambda + \rho) - \rho$ ,

ii) Soit  $\alpha \in \Delta_1^+$  tel que  $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0$ ; alors  $\mu = \lambda + \alpha$  vérifie  $\lambda \sim' \mu$ .

De plus, si  $\lambda \sim' \mu$  et si  $\mu$  est dominant, alors  $\#\lambda = \#\mu$ .

Ceci justifie la définition plus générale suivante :

DÉFINITION 1.6. — Soit  $\mu \in P$ ; on dira que  $\mu$  est atypique de degré d'atypie  $\#\mu$  s'il existe  $\lambda$  dans  $P^+$  atypique de degré d'atypie  $\#\mu$  tel que  $\lambda \sim \mu$ .

PROPOSITION 1.7. — Soit  $\lambda \in P^+$ ,  $\lambda$  typique. Alors le module de Kac  $V_\lambda$  est égal au module simple  $L_\lambda$ .

Remarque 1.8. — Les modules de Kac étant des modules induits à partir de  $\mathfrak{g}_0$ -modules, on calcule aisément leur décomposition en  $\mathfrak{h}$ -modules irréductibles (ce qu'on appelle leur *caractère*), donc le caractère des modules simples typiques est connu ([8]).

### Blocs de $\mathcal{F}$

La catégorie  $\mathcal{F}$  se décompose en composantes connexes, les *blocs* de  $\mathcal{F}$ . Dans [13], Serganova montre que chaque bloc correspond à une valeur du caractère infinitésimal  $\chi_\lambda$ . Les modules typiques forment donc chacun un bloc, et si  $\lambda$  est un poids atypique, tous les modules de dimension finie dont le caractère infinitésimal est  $\chi_\lambda$  sont dans le même bloc que le module simple  $L_\lambda$ . Elle montre de plus que si le degré d'atypie de  $\lambda$  est égal à  $k$ , alors le bloc est équivalent au bloc maximale atypique de  $\mathfrak{gl}(k, k)$  (c'est-à-dire l'unique bloc contenant les modules simples de degré d'atypie égal à  $k$ ; l'unicité de ce bloc est montrée dans [13]). Les modules de Kac étant indécomposables, tous les quotients simples d'une suite de Jordan-Hölder d'un module de Kac  $V$  sont dans le même bloc que  $V$ .

## 2. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS ET EXEMPLES

Soit  $\lambda$  un poids dominant atypique. On garde les notations du premier paragraphe.

On veut trouver les quotients simples d'une suite de Jordan-Hölder du module de Kac  $V_\lambda$ . On utilise pour ce faire des opérateurs définis dans le  $\mathbb{Z}$ -module libre  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$  ayant pour base les classes d'isomorphismes  $[L_\mu]$  de  $\mathfrak{g}$ -modules simples  $\mathfrak{h}$ -diagonalisables de dimension finie (c'est le *groupe de Grothendieck* de la catégorie  $\mathcal{F}$ ). Soit  $q$  une indéterminée. Si  $V = V_0 \oplus V_1$  est un super espace vectoriel de dimension  $m + \varepsilon n$ , on note  $V^\Pi$  le super espace vectoriel  $(V^\Pi)_0 \oplus (V^\Pi)_1$  avec  $(V^\Pi)_0 = V_1$  et  $(V^\Pi)_1 = V_0$ , et on pose, pour tout  $V$  dans  $\mathcal{F}$ ,  $\varepsilon V = V^\Pi$ . C'est un opérateur dont le carré vaut l'identité.

Soit  $\mathcal{H}$  le  $\mathbb{C}[q, \varepsilon]$ -module libre ayant pour base des éléments  $T_\lambda$ , où  $\lambda$  parcourt l'ensemble des poids entiers,  $P$ .

**DÉFINITION 2.1.** — *Soit  $\alpha$  une racine impaire positive. On définit un opérateur  $\sigma_\alpha$  sur  $\mathcal{H}$  par les axiomes suivants :*

i)  $\sigma_\alpha(T_\lambda) = 0$  si  $\langle \lambda, \alpha \rangle \neq 0$ .

ii) Si  $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0$ ,

$$\sigma_\alpha(T_\lambda) = \varepsilon [q^{l(\lambda, \alpha) - 1} \sigma_\alpha(T_{\lambda - \alpha})]_+ + \varepsilon q T_{\lambda - \alpha},$$

où  $[ ]_+$  désigne la partie polynomiale en  $q$  de degré strictement positif et  $l(\lambda, \alpha) = rk(W_{\lambda - \alpha}) - rk(W_{\lambda - \alpha} \cap W_\lambda)$ , où  $rk(W_\mu)$  désigne le rang (comme groupe de Coxeter) du stabilisateur de  $\mu$  dans  $W$ .

iii) Si  $\langle \lambda, \alpha \rangle = 0$  et si  $\lambda$  et  $-\alpha$  sont dans la même chambre (dans le même domaine fondamental pour l'action de  $W$ ), alors  $\sigma_\alpha(T_\lambda) = \varepsilon q T_{\lambda - \alpha}$ .

On obtient ainsi les  $\sigma_\alpha$  par récurrence. Leur définition est directement liée à la démonstration des théorèmes, comme on le voit en analysant l'énoncé du théorème 4.3 de ce texte. Nous donnerons un peu plus loin un algorithme permettant de les calculer.

On définit ensuite des opérateurs  $\tilde{s}_\alpha$  et  $s_\alpha$  de  $\mathbb{C}[q] \otimes \mathcal{K}[\mathcal{F}]$  et de  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$  respectivement : on définit d'abord l'opérateur  $\mathbb{C}[q, \varepsilon]$ -linéaire  $\Xi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}[q] \otimes \mathcal{K}[\mathcal{F}]$  tel que  $\Xi(T_\lambda) = [L_{\tilde{\lambda}-\rho}]$  (où  $\tilde{\lambda}$  est un représentant dans  $P^+$  de la  $W$ -orbite de  $\lambda$ ) si  $\tilde{\lambda} - \rho \in P^+$ , et  $\Xi(T_\lambda) = 0$  si  $\tilde{\lambda} - \rho \notin P^+$ .

On pose :  $\tilde{s}_\alpha[L_\lambda] = \Xi(\sigma_\alpha(T_{\lambda+\rho}))$ , l'opérateur  $s_\alpha$  étant alors obtenu en évaluant  $\tilde{s}_\alpha$  en  $q = -1$ .

THÉORÈME 2.2. — *On a la relation suivante dans l'anneau de Grothendieck  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$  :*

$$[V_\lambda] = \left( \prod_{\alpha \in \Delta_1^+}^{\leftarrow} (1 - s_\alpha) \right) [L_\lambda],$$

où l'ordre du produit est compatible avec l'ordre partiel  $\geq$  sur  $\Delta_1^+$ .

On connaît donc les modules simples qui interviennent dans les suites de Jordan-Hölder des modules de Kac. De plus, on a une égalité de  $\mathfrak{g}_0$ -modules entre la somme directe des modules en question et le module de Kac.

On note  $Ch(\mathcal{F})$  l'anneau des caractères de la catégorie  $\mathcal{F}$  : on le considère comme un sous-anneau de  $\mathbb{Z}[\varepsilon, \{e^\mu\}_{\mu \in P}]$ . En effet, le caractère d'un  $\mathfrak{g}$ -module  $V = V_0 \oplus V_1$  est  $Ch(V) = \sum (m_i e^{\mu_i} + \varepsilon n_j e^{\nu_j})$  où  $\mu_i$  parcourt les poids de  $V_0$  (avec multiplicité  $m_i$ ) et  $\nu_j$  parcourt les poids de  $V_1$  (avec multiplicité  $n_j$ ).

On a vu que le caractère du module de Kac  $V_\lambda$  est connu car il s'agit d'un module induit. On a la formule suivante :

$$Ch(V_\lambda) = Ch(L_\lambda(\mathfrak{g}_0)) \prod_{\alpha \in \Delta_1^+} (1 + \varepsilon e^{-\alpha}).$$

Soit maintenant l'application  $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ -linéaire de  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$  dans  $Ch(\mathcal{F})$ ,  $\psi$ , telle que  $\psi[L_\lambda] := Ch(V_\lambda)$ , qui à une classe d'isomorphisme de modules simples de plus haut poids  $\lambda$  associe le caractère du module de Kac de plus haut poids  $\lambda$ . On a le

THÉORÈME 2.3. — *Soit  $\lambda$  un poids dominant; on a :*

$$Ch(L_\lambda) = \psi \left( \prod_{\alpha \in \Delta_1^+}^{\rightarrow} (1 - s_\alpha)^{-1} [L_\lambda] \right),$$

où l'ordre du produit est compatible avec l'ordre partiel  $\leq$  sur  $\Delta_1^+$ .

**Exemples**

Le théorème 2.3 correspond à une inversion formelle dans la formule du théorème 2.2; la formule fait apparaître des sommes infinies, car  $(1 - s_\alpha)^{-1} = 1 + s_\alpha + s_\alpha^2 + \dots$ . Elle n'aide donc pas beaucoup au calcul effectif du caractère d'un module simple atypique donné.

Le théorème 2.2 est plus accessible au calcul; Vera Serganova donne un algorithme pour le calcul des  $s_\alpha$  ([12], remarque 2.5) qui se déduit de l'énoncé du théorème. Je vais décrire cet algorithme en utilisant des diagrammes de partitions pour un poids



maximalement atypique (de degré d'atypie  $k$ ) dans  $\mathfrak{gl}(k, k)$  pour un entier  $k \geq 2$ . On peut toujours se ramener à cette situation-là d'après le dernier alinéa du paragraphe 1.

Dans les notations précédentes, un tel poids s'écrit  $\lambda = a_1\varepsilon_1 + \dots + a_k\varepsilon_k + b_1\delta_1 + \dots + b_k\delta_k$  et on peut supposer qu'on a les relations  $a_i = -b_{k+1-i}$  pour  $1 \leq i \leq k$ , de sorte que les racines  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  telles que  $\langle \lambda + \rho, \alpha_i \rangle = 0$  sont les  $\alpha_i := \varepsilon_{k+1-i} - \delta_i$  (on a  $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_k$ , ce qui fait que l'ordre du produit dans le théorème 2.2 est  $(1 - s_{\alpha_k}) \dots (1 - s_{\alpha_1})$ ). Pour éviter les lourdeurs de notations, on note  $\lambda = (a_1, \dots, a_k)$ .

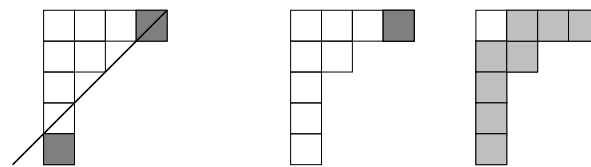
Comme  $\lambda$  est dominant, on a  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$ . Notons  $D_\lambda$  le diagramme obtenu en mettant  $a_i$  cases dans la  $i$ -ième ligne (avec la notation anglaise). Comme les  $a_i$  ne sont pas supposés positifs, on considère qu'on peut ajouter autant de colonnes qu'on veut à gauche du diagramme.

Pour calculer  $s_{\alpha_k}$ , (ou plus exactement  $-s_{\alpha_k}$ ) on fait la chose suivante : soit  $\Delta$  l'antidiagonale issue de la case  $C_1$  en haut à droite de  $D_\lambda$ . On regarde toutes les cases  $C_j$  qui sont à droite (au sens large) de cette antidiagonale, à droite de leur horizontale, en bas de leur verticale (les cases Sud-Est sous l'antidiagonale  $\Delta$ ) et telles que la parallèle à  $\Delta$  issue de  $C_j$  est au-dessous (au sens large) de toutes les cases Sud-Est apparues avant  $C_j$ . Elles correspondent à des lignes  $i_1, \dots, i_r$  de  $D_\lambda$ , la ligne  $i_j$  contenant  $a_{i_j}$  cases (dont  $C_j$  est la dernière). On en déduit  $r$  nouveaux diagrammes  $D_{\lambda_1}, \dots, D_{\lambda_r}$ , où  $D_{\lambda_j}$  est obtenu en retirant à  $D_\lambda$  la bordure reliant la case  $C_j$  à la case  $C_1$ . Cela nous donne  $r$  nouveaux poids  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  et on calcule

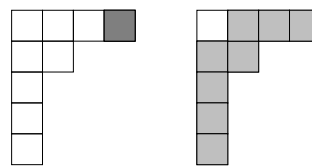
$$-s_{\alpha_k}[L_\lambda] = \sum_{j=1}^r (-\varepsilon)^{a_{i_j} - a_1 + i_j - 1} [L_{\lambda_j}]$$

(le nombre  $a_{i_j} - a_1 + i_j - 1$  est la distance de la case  $C_j$  à  $\Delta$ ).

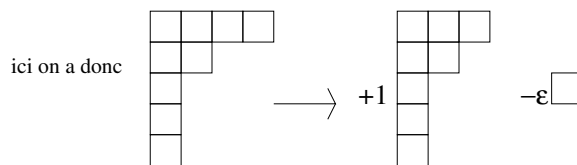
Exemple pour le poids  $\lambda = (4, 2, 1, 1, 1)$  :



étape 1



les bordures



Pour calculer  $s_{\alpha_{k-i}}$ , on refait la même chose en oubliant les  $i - 1$  premières lignes de  $D_\lambda$ .

Si par chance  $\lambda$  est tel que, pour tout  $i$ ,  $a_i - a_{i+1} \geq 2$ , alors les opérations sur le diagramme sont triviales et on obtient la belle formule suivante :

$$[V_\lambda] = [L_\lambda] + \varepsilon \sum_{1 \leq i \leq k} [L_{\lambda - \alpha_i}] + \sum_{1 \leq i < j \leq k} [L_{\lambda - \alpha_i - \alpha_j}] + \cdots + \varepsilon^k [L_{\lambda - \sum_{i=1}^k \alpha_i}].$$

Ces poids sont « loin des murs », ils ont un comportement régulier qu'on peut considérer comme admirable...

Dès qu'on s'approche des murs (i.e. quand un  $a_i - a_{i+1}$  est égal à 0 ou 1), les calculs se compliquent fortement, des signes font leur apparition et le nombre de termes peut croître beaucoup.

L'exemple 2.6 de [12] consiste à faire tous les calculs pour le module trivial de  $\mathfrak{gl}(3, 3)$ ,  $\lambda = (0, 0, 0)$ , on trouve (après des calculs où interviennent 14 modules!!!) un résultat plutôt élégant :

$$[V_{(0,0,0)}] = [L_{(0,0,0)}] + \varepsilon [L_{(0,0,-1)}] + [L_{(0,-2,-2)}] + \varepsilon [L_{(-3,-3,-3)}].$$

Plus généralement, on trouve pour le module trivial de  $\mathfrak{gl}(k, k)$  :

$$[V_{(0,\dots,0)}] = \sum_{i=0}^k [L_{-i \sum_{j=1}^i \alpha_j}].$$

### 3. INDUCTION GÉOMÉTRIQUE

Soit  $\mathcal{F}^{free}$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{F}$  constituée des modules qui sont libres comme  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}^{-1})$ -modules : par construction, les modules de Kac sont dans  $\mathcal{F}^{free}$ . On montre facilement que tout module de  $\mathcal{F}^{free}$  admet une filtration finie dont les quotients successifs sont des modules de Kac, qui, comme dans une suite de Jordan-Hölder, sont uniquement déterminés à l'ordre près. On démontre de plus que tout module  $M$  de  $\mathcal{F}$  admet une résolution par des modules de  $\mathcal{F}^{free}$ , et cette résolution est de longueur finie si et seulement si  $M \in Ob(\mathcal{F}^{free})$ . En particulier, les  $\mathfrak{g}$ -modules simples  $L_\lambda$  de  $\mathcal{F}$  ont une résolution dans  $\mathcal{F}^{free}$  qui est de longueur infinie quand  $\lambda$  est un poids atypique. On peut choisir la résolution de  $L_\lambda$  de sorte que le premier terme soit le module de Kac  $V_\lambda$  ; on a ainsi :

$$\cdots \rightarrow M_i \rightarrow \cdots \rightarrow M_1 \rightarrow V_\lambda \rightarrow L_\lambda \rightarrow 0$$

et de plus (c'est le lemme 1.14 de [12]), en désignant par  $[M_i : V_\mu]$  la multiplicité du module de Kac  $V_\mu$  dans une  $\mathcal{F}^{free}$ -filtration de  $M_i$ , si  $i > 0$ ,  $[M_i : V_\mu] \neq 0$  impose  $\mu < \lambda$  et  $\chi_\mu = \chi_\lambda$ .

Ceci signifie qu'on peut choisir la résolution de  $L_\lambda$  dans le bloc de  $L_\lambda$ .

Serganova introduit un opérateur  $\mathbb{Z}[q]$ -linéaire de  $\mathcal{K}[\mathcal{F}] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[q]$ ,  $\mathbf{U}(q)$ , dont elle donne deux définitions (elle démontre dans [14] qu'elles sont équivalentes).

**Première définition de  $\mathbf{U}(q)$** 

Soit  $\mathfrak{p}$  la sous-algèbre parabolique maximale de  $\mathfrak{g}$  obtenue en annulant toutes les coordonnées non diagonales de la première colonne. On note  $\mathfrak{g}(m-1, n)$  la sous super algèbre de Lie de  $\mathfrak{p}$  obtenue en annulant toutes les coordonnées non diagonales de la première ligne. C'est une sous super algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  qui est isomorphe à  $\mathfrak{gl}(m-1, n) \oplus \mathbb{C}\varepsilon_1$ ; elle a donc un centre de dimension deux.

Soit  $t$  un entier. Soit  $M \in \text{Ob}(\mathcal{F})$ , soit  $M^t$  le sous-espace vectoriel de  $M$  engendré par les vecteurs de poids  $\mu$  avec  $\langle \mu, \varepsilon_1 \rangle \geq t$ : c'est un sous- $\mathfrak{p}$ -module de  $M$  et on note  $U_t(M)$  le quotient de  $M$  par le  $\mathfrak{g}$ -module engendré par  $M^t$ . Ceci définit un foncteur  $U_t$  de la catégorie  $\mathcal{F}$  dans elle-même qui est exact à droite ([12], lemme 4.3), ce qui fait qu'on peut considérer la suite  $(U_t)_i, i \geq 1$  de ses foncteurs dérivés à gauche.

**DÉFINITION 3.1.** — *L'opérateur  $\mathbf{U}(q)$  associe au module simple de plus haut poids  $\lambda$  dans  $P^+$  la somme formelle*

$$\sum_{i \geq 1} q^i [(U_t)_i(L_\lambda)],$$

où  $t = \langle \lambda, \varepsilon_1 \rangle$ .

On démontre (cf. [14]) que cette somme définit un polynôme en  $q$  sur  $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ .

*Remarque 3.2.* — On montre que le foncteur  $U_t$  est exact dans  $\mathcal{F}^{free}$ , ce qui fait que, si  $V \in \text{Ob}(\mathcal{F})$  et si

$$\cdots \rightarrow M_i \rightarrow \cdots \rightarrow M_0 \rightarrow V \rightarrow 0$$

est une résolution de  $V$  par des modules de  $\mathcal{F}^{free}$ , on a  $(U_t)_i(V) = H_i(U_t(M_\bullet))$ . Dans [12], toutes les notations sont cohomologiques, ce qui rend parfois l'interprétation hasardeuse. J'ai pris la liberté de descendre les indices pour comprendre.

**Seconde définition de  $\mathbf{U}(q)$** 

Soit  $(G, \mathcal{O}_G)$  le super groupe algébrique complexe  $GL(m, n)$ : sa super algèbre de Lie est  $\mathfrak{g}$ ; les points  $G_0$  de  $G$  sont les éléments de  $GL(m, \mathbb{C}) \times GL(n, \mathbb{C})$  et l'algèbre de Hopf  $\mathcal{O}_G$  est isomorphe à l'algèbre (super) symétrique de  $\mathfrak{g}$ , localisée en  $\det|_{\mathfrak{g}_0}$ , la restriction du déterminant à la partie paire.

Soit  $(P, \mathcal{O}_P)$  le sous super groupe de  $(G, \mathcal{O}_G)$  d'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}$ : c'est le sous super groupe fermé de  $(G, \mathcal{O}_G)$  qui fixe le premier vecteur de base de  $\mathbb{C}^m$  à homothéties près. On note  $P_0$  les points de  $P$ . Comme  $P$  est fermé dans  $G$ , il existe une structure de super variété algébrique sur le quotient  $G/P$  notée  $(X, \mathcal{O}_X)$ . Les points de cette super variété sont les points de l'espace projectif  $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ , qu'on notera aussi parfois  $G_0/P_0$ , et les fonctions constituent l'algèbre extérieure de  $\mathbb{C}^n \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m-1}}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m-1}}(-1)$  où  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{m-1}}$  désigne l'anneau des fonctions régulières (au sens non gradué) sur l'espace projectif  $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ .

Soit  $V$  un  $(P, \mathcal{O}_P)$ -module de dimension finie (il se dérive en un  $\mathfrak{p}$ -module). On construit, de la manière habituelle ([7], I.5.8), un super fibré vectoriel  $\mathbf{V}$  sur  $X$ , dont on note  $\mathcal{O}_V$  le faisceau des sections, sur lequel le super groupe  $(G, \mathcal{O}_G)$  agit de manière

équivariante. On note  $H^i(\mathcal{O}_V)$  le  $i$ -ième groupe de cohomologie de ce faisceau ; c'est un  $(G, \mathcal{O}_G)$ -module de dimension finie, qui se dérive en un  $\mathfrak{g}$ -module de dimension finie que l'on note de la même manière.

PROPOSITION 3.3. — Soit  $\lambda$  un poids dominant de  $\mathfrak{g}$ .

i) On note  $V_\lambda(\mathfrak{p})$  le  $\mathfrak{g}(m-1, n)$ -module de Kac de plus haut poids  $\lambda$  étendu à  $\mathfrak{p}$  et  $V_\lambda$  le  $\mathfrak{g}$ -module de Kac de plus haut poids  $\lambda$ . On a alors :

$$H^i(\mathcal{O}_{V_\lambda(\mathfrak{p})^*}) = 0, \quad \forall i > 0,$$

$$H^0(\mathcal{O}_{V_\lambda(\mathfrak{p})^*}) = V_\lambda^*.$$

ii) On note  $L_\lambda(\mathfrak{p})$  le  $\mathfrak{g}(m-1, n)$ -module simple de plus haut poids  $\lambda$  étendu à  $\mathfrak{p}$  et  $L_\lambda$  le  $\mathfrak{g}$ -module simple de plus haut poids  $\lambda$ . On a alors :

$$H^i(\mathcal{O}_{L_\lambda(\mathfrak{p})^*}) = ((U_t)_{i+1}(L_\lambda))^* \text{ où } t = \langle \lambda, \varepsilon_1 \rangle \text{ si } i > 0,$$

et une suite exacte :

$$0 \rightarrow (U_t)_1(L_\lambda) \rightarrow (H^0(\mathcal{O}_{L_\lambda(\mathfrak{p})^*}))^* \rightarrow L_\lambda \rightarrow 0.$$

Remarque 3.4. — Cette proposition montre que la somme formelle de la définition 3.1 de  $\mathbf{U}(q)$  est bien un polynôme en  $q$  sur  $\mathbb{Z}[\varepsilon]$  puisqu'elle porte sur un nombre fini de termes.

COROLLAIRE 3.5. — Soit  $\lambda$  un poids dominant, on a l'égalité suivante dans  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$  :

$$[L_\lambda] - \mathbf{U}(-1)[L_\lambda] = Eu((\mathcal{O}_{L_\lambda(\mathfrak{p})^*})^*),$$

où  $Eu$  désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré.

### Lien avec la formule des caractères

Serganova introduit dans [14] des polynômes en la variable  $q$  présentant des analogies avec les polynômes de Kazhdan-Lusztig tels qu'ils apparaissent dans l'étude de la catégorie  $\mathcal{O}$  de [1] dans le cas d'une algèbre de Lie semi-simple complexe.

DÉFINITION 3.6. — Soit  $\lambda$  un poids dominant. Considérons le complexe de Koszul  $S^\bullet(\mathfrak{g}^{-1}) \otimes L_\lambda$  ; soit  $\mu \in P^+$ . On pose :

$$K_{\lambda, \mu}(q) := \sum_{i \geq 0} \dim(H_i(\mathfrak{g}^{-1}, L_\lambda))_\mu q^i,$$

où  $(H_i(\mathfrak{g}^{-1}, L_\lambda))_\mu$  désigne la composante  $\mathfrak{g}_0$ -isotypique de poids  $\mu$  de  $H_i(\mathfrak{g}^{-1}, L_\lambda)$ . On appelle  $K_{\lambda, \mu}$  le **polynôme de Kazhdan-Lusztig associé à  $\lambda$  et  $\mu$** .

Remarque 3.7. — La série formelle qui définit  $K_{\lambda, \mu}$  est un polynôme car, pour  $i$  assez grand, le poids  $\mu$  n'apparaît pas dans  $S^i(\mathfrak{g}^{-1}) \otimes L_\lambda$ .

Remarque 3.8. — Soient  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $P^+$  ; on a :

$$K_{\lambda, \lambda} = 1,$$

$$K_{\lambda, \mu} \neq 0 \Rightarrow \mu \leq \lambda \text{ et } \chi_\lambda = \chi_\mu.$$

Attention, il peut y avoir des suites infinies décroissantes de poids ayant même caractère infinitésimal qui restent dans  $P^+$ , par exemple, pour  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\lambda_k = -k\varepsilon_m + k\delta_1$ .

Vera Serganova aimerait beaucoup avoir une méthode théorique de calcul de ces polynômes, mais elle ne sait pour le moment le faire que pour  $q = -1$  (c'est une des raisons pour lesquelles j'ai dit dans le résumé que la compréhension de la structure des blocs de la catégorie  $\mathcal{F}$  est presque complète).

La démonstration du lemme qui suit (numéroté 3.4 dans [12]) est une adaptation d'arguments de la théorie de Bernstein-Gelfand-Gelfand [1].

LEMME 3.9. — Soit  $\lambda$  un poids dominant ; on a l'égalité suivante dans  $\tilde{\mathcal{K}}[\mathcal{F}]$  (où  $\tilde{\mathcal{K}}[\mathcal{F}]$  est un complété convenable de  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$ , voir [12], p. 622) :

$$[L_\lambda] = \sum_{\mu \in P^+} K_{\lambda, \mu}(-1)[V_\mu],$$

ce qui donne le caractère de  $L_\lambda$  si les valeurs en  $-1$  des polynômes de Kazhdan-Lusztig sont connues.

Notons  $\mathbf{K}$  la matrice (infinie) constituée des  $K_{\lambda, \mu}(-1)$  : elle est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. D'après ce qui précède, son inverse calcule les multiplicités des modules simples  $[L_\mu]$  dans une suite de Jordan-Hölder d'un module de Kac  $[V_\lambda]$ .

Notons  $\mathbf{U}$  l'opérateur  $\mathbf{U}(q)$  de la définition 3.1 pris en  $q = -1$ . Si on désigne par  $\mathbf{K}[\mathfrak{g}(m-1, n)]$  l'analogue de la matrice  $\mathbf{K}$  pour l'algèbre  $\mathfrak{g}(m-1, n)$  contenue dans  $\mathfrak{p}$ , on a le théorème suivant :

THÉORÈME 3.10. — On a l'égalité de matrices :

$$\mathbf{K}[\mathfrak{g}(m-1, n)] = \mathbf{K} - \mathbf{KU}.$$

Ce résultat permet de calculer  $\mathbf{K}$  par récurrence si on connaît l'opérateur  $\mathbf{U}$ .

Remarque 3.11. — Tout le contenu de ce paragraphe peut se faire à l'identique si on remplace  $\mathfrak{p}$  par  $\tilde{\mathfrak{p}}$ , la sous-algèbre parabolique maximale de  $\mathfrak{g}$  obtenue en annulant toutes les coordonnées non diagonales de la dernière ligne. Le rôle de  $\varepsilon_1$  est alors joué par  $\delta_n$ . Quand on utilisera  $\tilde{\mathfrak{p}}$ , on notera tout avec un tilde sauf  $\mathfrak{g}(m-1, n)$  transformée alors en  $\mathfrak{g}(m, n-1)$ .

#### 4. DESCRIPTION PAR RÉCURRENCE DE L'OPÉRATEUR $U(q)$ ET FIN DE LA DÉMONSTRATION

##### Notations et définitions

Pour  $0 \leq k \leq m$  et  $0 \leq l \leq n$ , on notera  $\mathfrak{g}(k, l)$  la sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  constituée des matrices dont tous les coefficients qui ne sont pas sur la diagonale sont nuls sur les  $m-k$  premières (resp.  $n-l$  dernières) lignes et colonnes (ces notations sont compatibles avec les notations  $\mathfrak{g}(m-1, n)$  et  $\mathfrak{g}(m, n-1)$  introduites au paragraphe 3).

Reprenons la sous-algèbre  $\mathfrak{p}$  (resp.  $\tilde{\mathfrak{p}}$ ). Soit  $\lambda$  un poids de  $P^+$ ; on dira que  $\lambda$  est *atypique relativement à  $\mathfrak{p}$*  (resp.  $\tilde{\mathfrak{p}}$ ) s'il existe une racine impaire positive  $\alpha$  (resp.  $\tilde{\alpha}$ ) avec  $\alpha = \varepsilon_1 - \delta_i$  (resp.  $\tilde{\alpha} = \varepsilon_j - \delta_n$ ) telle que  $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0$  (resp.  $\langle \lambda + \rho, \tilde{\alpha} \rangle = 0$ ).

Dans le cas contraire,  $\lambda$  est dit *typique relativement à  $\mathfrak{p}$*  (resp.  $\tilde{\mathfrak{p}}$ ). Notons que, comme l'ensemble  $A(\lambda)$  de la définition 1.4 est constitué de racines deux à deux orthogonales, si  $\lambda$  est atypique relativement à  $\mathfrak{p}$ , alors la racine  $\alpha$  est unique.

On note  $U_{\lambda, \mu}$  (resp.  $\tilde{U}_{\lambda, \mu}$ ) le polynôme en  $q$  qui correspond à l'entrée  $(\lambda, \mu)$  de la matrice de l'opérateur  $\mathbf{U}(q)$  (resp.  $\tilde{\mathbf{U}}(q)$ ) dans  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$  (cf. définition 3.1). On note  $U_{\lambda, \mu}[\mathfrak{g}(k, l)]$  le polynôme en  $q$  défini de manière analogue pour  $\mathfrak{g}(k, l)$ .

Dans la catégorie  $\mathcal{F}$ , pour un poids dominant  $\lambda$ , on notera  $p_\lambda$  la projection sur le bloc correspondant à la valeur  $\chi_\lambda$  du caractère infinitésimal. Si  $V$  est un  $(P, \mathcal{O}_P)$ -module et si on note  $\mathcal{O}_V$  le faisceau correspondant sur la super grassmannienne  $G/P$ , on peut considérer les  $p_\lambda(\mathcal{O}_V)$  (qui ne sont pas nécessairement les mêmes que les  $\mathcal{O}_{p_\lambda(V)}$ ).

Il existe un foncteur (qui dépend du choix de la sous-algèbre de Cartan,  $\mathfrak{h}$ ) de  $\mathcal{F}$  dans elle-même, contravariant et de carré l'identité

$$V \rightarrow V^\vee,$$

qui conserve la décomposition en  $\mathfrak{h}$ -modules irréductibles (et donc le caractère) : soit  $\tau$  l'automorphisme de  $\mathfrak{g}$  qui, à toute matrice  $M$ , associe  $-{}^{str}M$ , où, si  $M$  est une matrice par blocs  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ,  ${}^{str}M = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ -{}^tB & {}^tD \end{pmatrix}$ . Si  $V$  est un  $\mathfrak{g}$ -module de  $\mathcal{F}$ , on construit un module  $V^\tau$ , isomorphe à  $V$  comme super espace vectoriel, sur lequel une matrice  $M$  de  $\mathfrak{g}$  agit sur  $x$  dans  $V$  par  $-{}^{str}M.x$ . On pose  $V^\vee = (V^\tau)^*$ .

##### Principe de la récurrence

On veut calculer les  $U_{\lambda, \mu}$ . Pour le faire, on suppose d'une part qu'on a calculé les opérateurs  $\mathbf{U}[\mathfrak{g}(k, l)](q)$ , et d'autre part qu'on connaît  $U_{\lambda-\alpha, \mu}$  si  $\lambda$  est atypique relativement à  $\mathfrak{p}$  avec  $\alpha = \varepsilon_1 - \delta_j$  et  $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle = 0$ . On montre dans le même mouvement que les  $\mathfrak{g}$ -modules  $(U_t)_i(L_\lambda)$  ( $t = \langle \lambda, \varepsilon_1 \rangle$ , comme dans la partie 3) sont semi-simples.

La récurrence s'initialise pour  $\mathfrak{gl}(1, 1)$ ; les poids atypiques sont de la forme  $\lambda = a\varepsilon_1 - a\delta_1$  ( $a$  est supposé entier). Ils sont tous dominants et ils sont tous dans le même

bloc. Tous les modules simples associés sont de dimension 1 ; on a la suite exacte :

$$0 \rightarrow (L_{\lambda-\alpha})^{\Pi} \rightarrow V_{\lambda} \rightarrow L_{\lambda} \rightarrow 0,$$

où  $\alpha$  est la racine impaire  $\varepsilon_1 - \delta_1$ . Ceci décrit les  $U_{\lambda, \mu}$ , qui sont tous nuls sauf pour  $\mu = \lambda - \alpha$  pour lequel on a  $U_{\lambda, \lambda-\alpha}(q) = \varepsilon q$ .

Revenons au cas général.

On veut se ramener à étudier les poids  $\lambda$  qui sont atypiques relativement à  $\mathfrak{p}$ , la racine  $\alpha$  correspondante étant  $\varepsilon_1 - \delta_n$ . On montre relativement facilement les deux énoncés suivants :

PROPOSITION 4.1 ([12], théorème 6.2). — *Supposons que  $\lambda$  est typique relativement à  $\mathfrak{p}$  (resp.  $\tilde{\mathfrak{p}}$ ) alors, si on note  $U_{\lambda}$  (resp.  $\tilde{U}_{\lambda}$ ) la matrice ligne formée des polynômes  $U_{\lambda, \mu}$  (resp.  $\tilde{U}_{\lambda, \mu}$ ), on a  $U_{\lambda} = 0$  (resp.  $\tilde{U}_{\lambda} = 0$ ).*

PROPOSITION 4.2. — *Supposons que  $\lambda$  est atypique relativement à  $\mathfrak{p}$ , la racine  $\alpha$  correspondante étant  $\varepsilon_1 - \delta_k$  ; alors, lorsque les polynômes en  $q$  correspondants ont tous un sens, on a :*

$$U_{\lambda, \mu} = U_{\lambda, \mu}[\mathfrak{g}(m, k)].$$

De plus, si on fait l'hypothèse que les  $(U_t)_i$  ( $t = \langle \lambda, \varepsilon_1 \rangle$ ) du paragraphe 3 appliqués au  $\mathfrak{g}(m, k)$ -module simple  $L_{\lambda}[\mathfrak{g}(m, k)]$  sont des  $\mathfrak{g}(m, k)$ -modules semi-simples, alors  $(U_t)_i(L_{\lambda})$  est un  $\mathfrak{g}$ -module semi-simple.

On a un résultat analogue en transformant  $\mathfrak{p}$  en  $\tilde{\mathfrak{p}}$  et  $\alpha$  en  $\tilde{\alpha} = \varepsilon_k - \delta_n$ , avec les modifications évidentes.

On suppose maintenant que  $\lambda$  est atypique relativement à  $\mathfrak{p}$  pour la racine  $\alpha = \varepsilon_1 - \delta_n$ .

Trois cas de comportements relativement différents surgissent :

THÉORÈME 4.3 ([12], corollaire 6.26). — *Soit  $\lambda$  un poids dominant atypique relativement à  $\mathfrak{p}$  pour la racine  $\alpha = \varepsilon_1 - \delta_n$ . On a les relations suivantes :*

i) *Si  $\lambda - \alpha$  est dominant,*

$$U_{\lambda, \mu} = \varepsilon[q^{-1}U_{\lambda-\alpha, \mu}]_+ \text{ si } \mu \neq \lambda - \alpha$$

où  $[\ ]_+$  a le même sens que dans la définition 2.1, et

$$U_{\lambda, \lambda-\alpha} = \varepsilon q.$$

ii) *Si  $\lambda - \alpha$  n'est pas dominant et si*

a)  *$\lambda - \varepsilon_1$  est dominant,*

$$U_{\lambda, \mu} = \varepsilon U_{\lambda-\alpha, \mu}[\mathfrak{g}(m, n-1)],$$

b)  *$\lambda + \delta_n$  est dominant,*

$$U_{\lambda, \mu} = \varepsilon U_{\lambda-\alpha, \mu}[\mathfrak{g}(m-1, n)].$$

iii) Si  $\lambda - \alpha$ ,  $\lambda - \varepsilon_1$ ,  $\lambda + \delta_n$  ne sont pas dominants,

$$U_{\lambda, \mu} = \varepsilon q U_{\lambda - \alpha, \mu}[\mathfrak{g}(m - 1, n - 1)].$$

Je ne prétends pas donner ici une démonstration, même incomplète, de ce théorème ; je veux juste indiquer quelques articulations de l'argument de Vera Serganova pour i), sachant que ii) utilise le même type d'éléments. La preuve de iii) est plus technique et compliquée.

On remarque que  $L_{\varepsilon_1}$  (resp.  $L_{-\delta_n}$ ) est la représentation standard (resp. standard duale) de  $\mathfrak{g}$ . L'étude du produit tensoriel avec  $L_{\varepsilon_1}$  joue un rôle crucial dans la démonstration :

LEMME 4.4 ([12], théorème 5.9). — Soient  $\lambda$  un poids dominant,  $\chi$  un caractère de  $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$  provenant d'un  $\mathfrak{g}$ -module simple de dimension finie et  $E$  le module  $L_{\varepsilon_1}$  (resp.  $L_{-\delta_n}$ ). On pose :

$$T = p_{\chi}(L_{\lambda} \otimes E).$$

On a :

- i)  $T^{\vee} \simeq T$ .
- ii) Si  $T$  est non nul, alors  $\chi = \chi_{\lambda + \varepsilon_i}$  ou  $\chi_{\lambda + \delta_j}$  (resp.  $\chi = \chi_{\lambda - \varepsilon_i}$  ou  $\chi_{\lambda - \delta_j}$ ) pour un certain  $i \in \{1, \dots, m\}$ , ou  $j \in \{1, \dots, n\}$ .
- iii) Si  $\#\chi$  est égal à  $\#\lambda$ , alors  $T$  est simple.
- iv) Si  $T$  n'est pas irréductible, il a un unique sous-module simple  $S$  et, si on note  $X$  le noyau de la projection de  $T^{\vee}$  ( $= T$ ) vers  $S^{\vee}$ , alors  $X$  contient  $S$  et  $X$  est engendré comme  $\mathfrak{g}$ -module par un vecteur de plus haut poids, dont on note  $\mu$  le poids. On a  $\chi_{\mu} = \chi$ , et il existe une racine  $\alpha$  dans  $\Delta_1^+$  vérifiant  $\langle \mu + \rho, \alpha \rangle = 0$  et telle que le plus haut poids de  $S$  est égal à  $\mu - \alpha$ .

Notons  $p_{\lambda^*}$  la projection de  $\mathcal{F}$  sur le bloc dont le caractère infinitésimal est celui du dual de  $L_{\lambda}$ .

Le lien entre  $U_{\lambda, \mu}$  et  $U_{\lambda - \alpha, \mu}$  provient, avec les notations du paragraphe 3, de la suite exacte de faisceaux au-dessus du super espace projectif  $X = G/P$  :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{((L_{\lambda - \alpha}(\mathfrak{p}))^{\Pi})^*} \rightarrow p_{\lambda^*}(\mathcal{O}_{(L_{\lambda - \varepsilon_1}(\mathfrak{p}))^*} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{(L_{\varepsilon_1})^*}) \rightarrow \mathcal{O}_{(L_{\lambda}(\mathfrak{p}))^*},$$

qui provient du dévissage de  $L_{\varepsilon_1}$  comme  $\mathfrak{p}$ -module :

$$0 \rightarrow L_{\varepsilon_1}(\mathfrak{p}) \rightarrow L_{\varepsilon_1} \rightarrow L_{\varepsilon_2}(\mathfrak{p}) \rightarrow 0$$

(suite d'Euler pour le fibré tangent à  $X$ ).

Le terme du milieu de cette suite exacte de faisceaux s'écrit

$$p_{\lambda^*}(\mathcal{O}_{(L_{\lambda - \varepsilon_1}(\mathfrak{p}))^*} \otimes_{\mathbb{C}} (L_{\varepsilon_1})^*).$$

Comme  $\lambda - \varepsilon_1$  est typique relativement à  $\mathfrak{p}$ , la proposition 4.1 montre que la cohomologie de ce faisceau est concentrée en degré 0 et est égale à  $(p_{\lambda}(L_{\varepsilon_1} \otimes L_{\lambda - \varepsilon_1}))^*$ .



La suite exacte longue de cohomologie, associée à la suite exacte de faisceaux, donne des isomorphismes

$$H^i(\mathcal{O}_{(L_\lambda(\mathfrak{p}))^*}) \simeq H^{i+1}(\mathcal{O}_{((L_{\lambda-\alpha}(\mathfrak{p}))^*)^\Pi}) \text{ si } i \geq 1;$$

donc, compte tenu de la proposition 3.3, ii), on obtient des isomorphismes

$$(U_{t'})_{i+2}(L_{\lambda-\alpha}) \simeq (U_t)_{i+1}(L_\lambda) \text{ si } i \geq 1,$$

où  $t = \langle \lambda, \varepsilon_1 \rangle$ ,  $t' = \langle \lambda - \alpha, \varepsilon_1 \rangle$  (on a  $t' = t - 1$ ).

Pour  $i = 0$ , on a une suite exacte :

$$0 \rightarrow (U_{t'})_2(L_{\lambda-\alpha}) \rightarrow (H^0(\mathcal{O}_{(L_\lambda(\mathfrak{p}))^*}))^* \rightarrow p_\lambda(L_{\varepsilon_1} \otimes L_{\lambda-\varepsilon_1}) \rightarrow (H^0(\mathcal{O}_{(L_{\lambda-\alpha}(\mathfrak{p}))^*}))^* \rightarrow 0.$$

Ces isomorphismes donnent l'égalité de i) pour les coefficients des puissances strictement supérieures à 1 de  $q$  (le terme constant est nul par la définition 3.1). Le coefficient de  $q$  est plus difficile à trouver.

On montre dans un premier temps qu'on a l'égalité suivante dans le groupe de Grothendieck :

$$[(U_t)_1(L_\lambda)] = \varepsilon[(U_{t'})_2(L_{\lambda-\alpha})] + \varepsilon[L_{\lambda-\alpha}] + [R_\lambda], \quad (4.5(\lambda))$$

où  $R_\lambda$  est un  $\mathfrak{g}$ -module tel que  $[R_\lambda : L_\mu] \leq \varepsilon[(U_t)_1(L_{\lambda-\alpha}) : L_\mu]$  pour  $\mu \in P^+$ .

La preuve est algébrique et elle repose sur le lemme 4.4.

Pour obtenir i), il reste à voir que  $R_\lambda = 0$ .

On a l'égalité (4.5( $\lambda$ )), et donc l'égalité (4.5( $\lambda + k\alpha$ )) est vérifiée pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

On montre que  $R_{\lambda+k\alpha} = 0$  pour  $k$  assez grand : je donne ici quelques détails.

Soit  $k$  un entier assez grand, on pose  $\mu = \lambda + k\alpha$ , montrons que  $R_\mu = 0$ . On a la suite exacte :

$$0 \rightarrow (U_t)_1(L_\mu) \rightarrow (H^0(\mathcal{O}_{L_\mu(\mathfrak{p})^*}))^* \rightarrow L_\mu \rightarrow 0,$$

qui provient de la proposition 3.3. On montre d'abord que :

(\*) les plus hauts poids des facteurs de composition de  $(U_t)_1(L_\mu)$  font partie des plus hauts poids des facteurs de composition de  $L_{\varepsilon_1} \otimes L_\mu$ .

On peut regarder le faisceau  $\mathcal{O}_{L_\mu(\mathfrak{p})^*}$  comme un faisceau  $M$  au-dessus de  $G_0/P_0 = \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ ; les résultats de Penkov [11] permettent de construire une filtration finie  $G_0$ -équivariante de  $M$  dont les quotients  $M_i$  sont des  $\mathcal{O}_{G_0/P_0}$ -modules, chacun provenant d'un  $\mathfrak{g}_0$ -module simple dont on notera  $\mu_i$  le plus haut poids. De plus, les poids  $\mu - \mu_i$  doivent être les plus hauts poids de  $\mathfrak{g}_0$ -composantes de l'algèbre extérieure  $\Lambda(\mathfrak{g}^{+1})$ , donc on a  $\mu - \mu_i = \sum_{\beta \in S_i} \beta$  où  $S_i$  est un sous-ensemble de  $\Delta_1^+$ .

On applique le théorème de Borel-Weil-Bott aux faisceaux  $M_i$  : comme  $k$  est assez grand, il n'y a pas de cohomologie en degré strictement positif, et on a :

$$H_{G_0/P_0}^0(M_i) = (L_{\mu_i}(\mathfrak{g}_0))^*.$$

La cohomologie de  $M$  est donc connue comme  $\mathfrak{g}_0$ -module : elle est concentrée en degré 0 et on a :

$$H_{G_0/P_0}^0(M) = \oplus_i (L_{\mu_i}(\mathfrak{g}_0))^*.$$

De plus,  $H_{G_0/P_0}^0(M)$  est un  $\mathfrak{g}$ -module égal à  $H^0(\mathcal{O}_{L_\mu(\mathfrak{p})^*})$ , donc les  $\mathfrak{g}_0$ -plus hauts poids de  $(H^0(\mathcal{O}_{L_\mu(\mathfrak{p})^*}))^*$  sont les  $\mu_i$ . On doit chercher parmi les  $\mu_i$ , qui sont les  $\mathfrak{g}$ -plus hauts poids, c'est-à-dire les poids  $\nu$  tels que  $\chi_\mu = \chi_\nu$  et qui font partie des  $\mu_i$ . Un tel  $\nu$  est nécessairement de la forme  $\mu - \sum_{\beta \in S_\nu} \beta$  avec  $S_\nu$  contenu dans  $\Delta_1^+$  et, si  $\beta$  appartient à  $S_\nu$  et si  $\beta = \varepsilon_1 - \delta_k$ , alors  $k = n$ . Ceci fait que toute racine de  $S_\nu$  est soit orthogonale, soit égale à  $\alpha$ . Alors  $\langle \mu - \nu, \varepsilon_1 \rangle$  est égal à 0 ou 1, ce qui permet de montrer (\*).

En utilisant le lemme 4.4, iii), on en déduit que  $R_\mu = 0$  pour  $k$  assez grand. Il reste à voir que

$$R_\mu = 0 \Rightarrow R_{\mu-\alpha} = 0,$$

ce qui se fait en reprenant les arguments algébriques aboutissant à l'égalité (4.5( $\lambda$ )), auxquels on incorpore deux ingrédients supplémentaires : l'hypothèse  $R_\mu = 0$  et le fait que, si  $V$  est un  $\mathfrak{g}$ -module dont les facteurs de composition sont de multiplicité 1 et vérifiant  $V = V^\vee$ , alors  $V$  est semi-simple.

Pour obtenir les théorèmes 2.2 et 2.3, on remarque que les résultats de ce paragraphe nous permettent de calculer la matrice de  $\mathbf{U}$  et donc de calculer l'opérateur  $\mathbf{K}$  par récurrence (théorème 3.10). Le lien avec les opérateurs  $s_\alpha$  s'obtient en remarquant que si  $\alpha = \varepsilon_1 - \delta_n$ , on a les mêmes matrices pour  $\mathbf{U}$  et  $s_\alpha$ .

## 5. ÉTAT DES LIEUX

Depuis [12], je connais deux développements récents du sujet.

Dans [13], Vera Serganova cite un certain nombre de résultats nouveaux, sans démonstration. D'une part elle étudie les blocs des différentes catégories  $\mathcal{F}$  (quand on fait varier  $m$  et  $n$ ), et montre qu'à équivalence près ils sont caractérisés par le degré d'atypie. D'autre part, elle utilise des techniques d'induction géométrique pour obtenir des résultats analogues à la formule des caractères pour les super algèbres de Lie de type orthosymplectique : dans ce cadre, les modules de Kac n'existent plus, ce qui oblige à formuler des énoncés plus compliqués que je ne chercherai pas à décrire ici.

Le travail de Jonathan Brundan [4] décrit le groupe de Grothendieck  $\mathcal{K}[\mathcal{F}]$  comme  $\Lambda^m(V^*) \otimes \Lambda^n(V)$  où  $V$  désigne la représentation naturelle du groupe quantique  $\mathcal{U}_q(\mathfrak{gl}_\infty)$ .

En utilisant la base canonique (resp. canonique duale) de Lusztig ([10]) de ce module, il paramètre les classes d'objets simples (resp. basculants, qui sont en l'occurrence les objets projectifs indécomposables, qui sont aussi injectifs) de  $\mathcal{F}$ .

Cela lui permet d'obtenir une formule de multiplicité d'un module simple  $L_\lambda$  dans un module de Kac  $V_\mu$ , qui montre que ces multiplicités sont toujours égales à 0 ou 1.

Voici son résultat, qui est très élégant ; je le cite dans les notations que j'ai utilisées, dans le cas maximale atypique pour  $\mathfrak{gl}(n, n)$ .

THÉORÈME 5.1 ([4], Main theorem, p. 3). — Soit  $\lambda = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \dots + a_n\varepsilon_n - a_n\delta_1 - \dots - a_1\delta_n$  un poids dominant maximalelement atypique de  $\mathfrak{gl}(n, n)$ . Soit  $(k_1, \dots, k_n)$  un  $n$ -uplet d'entiers strictement positifs minimal dans l'ordre lexicographique pour la propriété suivante :

pour tous  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$  dans  $\{0, 1\}^n$ ,  $\lambda + \sum_{s=1}^n \theta_s k_s (\varepsilon_s - \delta_{k-s})$  est conjugué pour l'action  $w(\lambda + \rho) - \rho$  du groupe de Weyl  $W$  à un élément  $R_\theta(\lambda)$  de  $P^+$ .

Alors la multiplicité  $[V_\mu : L_\lambda]$  est égale à 1 si  $\mu$  est un  $R_\theta(\lambda)$ , à 0 sinon.

Ce théorème permet d'obtenir un algorithme qui détermine, pour un poids dominant maximalelement atypique  $\lambda$  donné, quels sont les modules de Kac  $V_\mu$  dont  $L_\lambda$  est un sous-quotient. On remarquera toutefois que cet algorithme ne fournit pas directement les facteurs de composition d'un module de Kac donné.

La démonstration utilise très peu la structure super, le principal argument  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -gradué provient de l'étude des produits tensoriels d'un module de Kac  $V_\mu$  par les puissances symétriques de  $L_{\varepsilon_1}$  et  $L_{-\delta_n}$ , dont il décompose les projections dans des blocs convenables.

Dans le même article, Brundan conjecture des résultats analogues pour la catégorie  $\mathcal{O}$  de  $\mathfrak{gl}(m, n)$ .

Parmi les nombreuses questions soulevées par les travaux de Brundan et de Serganova, il en est une que je souhaite poser : toutes les constructions que nous avons vues ici dépendent du choix de la sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b}$  de  $\mathfrak{g}$  ; il se trouve que, contrairement au cas classique, les sous-algèbres de Borel ne sont pas toutes  $\mathfrak{g}$ -conjuguées. Si on choisit une autre sous-algèbre de Borel  $\mathfrak{b}'$  de  $\mathfrak{g}$  contenant  $\mathfrak{b}_0$ , la catégorie  $\mathcal{F}$  reste elle-même en tant que catégorie, mais comme *catégorie de modules de plus haut poids*, elle change de nature. Quel parti peut-on en tirer ? En effet, le choix de  $\mathfrak{b}$  semble privilégié à cause de la  $\mathbb{Z}$ -gradation de longueur 3 de  $\mathfrak{gl}(m, n)$ , mais cette propriété disparaît dans le cas orthosymplectique.

## RÉFÉRENCES

- [1] I. N. BERNŠTEĪN, I. M. GEL'FAND & S. I. GEL'FAND – « A certain category of  $\mathfrak{g}$ -modules », *Funct. Anal. Appl.* **10** (1976), no. 2, p. 87–92.
- [2] I. N. BERNŠTEĪN & D. A. LEĪTES – « A formula for the characters of the irreducible finite-dimensional representations of Lie superalgebras of series  $Gl$  and  $sl$  », *C. R. Acad. Bulg. Sci.* **33** (1980), no. 8, p. 1049–1051.
- [3] N. BOURBAKI – *Groupes et algèbres de Lie*, chapitres 4, 5 et 6, Masson, Paris, 1981.
- [4] J. BRUNDAN – « Kazhdan-Lusztig polynomials and character formulae for the Lie superalgebra  $\mathfrak{gl}(m|n)$  », *J. Amer. Math. Soc.* **16** (2003), no. 1, p. 185–231 (electronic).
- [5] J. DIXMIER – *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

- [6] W. FULTON & P. PRAGACZ – *Schubert varieties and degeneracy loci*, Lect. Notes in Math., vol. 1689, Springer-Verlag, Berlin, 1998, appendice J en collaboration avec I. Ciocan-Fontanine.
- [7] J. C. JANTZEN – *Representations of algebraic groups*, 2<sup>nd</sup>e éd., Mathematical Surveys and Monographs, vol. 107, Amer. Math. Soc., Providence, 2003.
- [8] V. KAC – « Representations of classical Lie superalgebras », in *Differential geometrical methods in mathematical physics II (Bonn 1977)*, Lect. Notes in Math., vol. 676, Springer, Berlin, 1978, p. 597–626.
- [9] V. G. KAC – « Lie superalgebras », *Adv. Math.* **26** (1977), no. 1, p. 8–96.
- [10] G. LUSZTIG – *Introduction to quantum groups*, Progress in Math., vol. 110, Birkhäuser Boston Inc., Boston, 1993.
- [11] I. B. PENKOV – « Borel-Weil-Bott theory for classical Lie supergroups », in *Current problems in mathematics. Newest results*, Itogi Nauki i Tekhniki, vol. 32, Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform., Moscow, 1988, traduit dans *J. Soviet Math.* **51** (1990), p. 71–124.
- [12] V. SERGANOVA – « Kazhdan-Lusztig polynomials and character formula for the Lie superalgebra  $\mathfrak{gl}(m|n)$  », *Selecta Math. (N.S.)* **2** (1996), no. 4, p. 607–651.
- [13] ———, « Characters of irreducible representations of simple Lie superalgebras », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Berlin 1998)*, 1998, *Doc. Math.*, extra vol. II, p. 583–593 (electronic).
- [14] V. V. SERGANOVA – « Kazhdan-Lusztig polynomials for Lie superalgebra  $\mathfrak{gl}(m|n)$  », in *I. M. Gelfand Seminar*, Adv. Soviet Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, 1993, p. 151–165.
- [15] A. SERGEEV – « The invariant polynomials on simple Lie superalgebras », *Represent. Theory* **3** (1999), p. 250–280 (electronic).

Caroline GRUSON

Institut Élie Cartan (IÉCN)

Faculté des Sciences

Université Nancy I (Henri Poincaré)

F-54506 Vandœuvre-lès-Nancy

*E-mail* : [Caroline.Gruson@iecn.u-nancy.fr](mailto:Caroline.Gruson@iecn.u-nancy.fr)