Séminaire BOURBAKI Mars 2003
55^{e} année, 2002-2003, n^{o} 918, p. 231 à 250

SYSTÈMES HYPERBOLIQUES ET VISCOSITÉ ÉVANESCENTE
[d'après S. Bianchini et A. Bressan]

par **Frédéric ROUSSET**

INTRODUCTION

De nombreux phénomènes physiques provenant de domaines variés comme la mécanique des fluides, l'élasticité ou l'électromagnétisme peuvent être décrits par des systèmes de lois de conservation

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{1}$$

où $u(t,x)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $t > 0$ est la variable de temps, $x \in \mathbb{R}$ est la variable d'espace et le flux $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est régulier. Dans tout cet exposé, on notera les dérivées partielles par des indices : $u_t = \partial u/\partial t$, $f(u)_x = \partial f(u)/\partial x$. On considère le problème de Cauchy, où le système (1) est complété par une donnée initiale

$$u(0,x) = u_0(x). \tag{2}$$

Il est bien connu (même sur l'exemple très simple de l'équation de Burgers $u_t + (u^2/2)_x = 0$, voir par exemple [11], [21], [32], [40]) que pour des données initiales u_0 très régulières les solutions de (1) peuvent développer des discontinuités en temps fini. Il faut donc chercher les solutions de (1) dans un espace de fonctions discontinues et comprendre (1) au sens faible

$$\iint (u\phi_t + f(u)\phi_x)dx\,dt = 0,$$

pour toute fonction ϕ régulière à support compact dans $]0,T[\times\mathbb{R}$. Cependant ces solutions faibles ne sont en général pas uniques (cela peut encore se vérifier sur l'équation de Burgers). Il faut donc se donner des critères permettant d'isoler les solutions « physiquement » admissibles. Il existe de nombreux critères (conditions d'entropie, de Lax, de Liu, du profil de viscosité), voir par exemple le livre de C. Dafermos [21] pour une comparaison entre ces différents critères. Le moyen le plus naturel pour trouver certains d'entre eux est de considérer que les lois de conservation (1) sont obtenues à partir de systèmes plus complexes

$$u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{3}$$

en négligeant les effets de la diffusion. Une conjecture naturelle est donc que les solutions admissibles de (1) doivent être obtenues comme limites de solutions de (3) quand ε tend vers zéro.

Sur le plan mathématique cette brève introduction soulève deux problèmes importants :

1. Montrer que le problème de Cauchy pour (1) est bien posé (c'est-à-dire qu'il existe une unique solution admissible dépendant continûment des données).

2. Montrer que ces solutions peuvent effectivement s'obtenir comme limite de solutions de (3) lorsque ε tend vers zéro.

Avant de poursuivre, signalons que, dans le cas scalaire ($n = 1$), ces deux questions ont été résolues il y a longtemps dans un cadre L^∞ grâce au principe du maximum [30]. La méthode de compacité par compensation basée sur des estimations L^∞ a aussi permis de montrer pour certains systèmes 2×2 la convergence faible de u^ε vers une solution de (1) [23]. Enfin, pour des systèmes généraux, des méthodes de type « perturbations singulières » [26], [44] avaient permis de montrer que certaines solutions de (1) (régulières par morceaux avec des chocs sans interactions) étaient limites de solutions de (3).

Le but de cet exposé est de présenter les résultats obtenus dans la résolution du problème 2 par S. Bianchini et A. Bressan [7]. Néanmoins, les deux problèmes n'étant pas indépendants, nous rappelons d'abord les résultats obtenus dans la résolution du problème 1 par Bressan et divers collaborateurs pour des fonctions à variations bornées (notées VB).

1. LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR (1)

Commençons par fixer le cadre de la théorie ; on considère des systèmes strictement hyperboliques

(SH) $\qquad df(u)$ est diagonalisable à valeurs propres réelles simples.

Ces valeurs propres seront notées $\lambda_1(u) < \cdots < \lambda_n(u)$, les vecteurs propres correspondants $r_i(u)$.

Pour des données initiales u_0 à variation totale suffisamment petite, l'existence globale de solutions entropiques avait été montrée par Glimm dans les années 60 [24]. Une autre méthode de construction dite de « front tracking » a par la suite été proposée [20, 23, 8, 38, 1]. Sans entrer dans les détails, ces deux méthodes de construction reposent sur la résolution du problème de Riemann au moyen de n ondes simples due à Lax [31], *i.e.* la résolution de (1), (2) lorsque u_0 est constante par morceaux, de la forme

$$u_0(x) = \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ u_+, & x > 0. \end{cases} \tag{4}$$

Cela demande une hypothèse supplémentaire que nous ferons tout au long de ce paragraphe :

($\diamond$) les champs caractéristiques sont vraiment non linéaires $d\lambda_i(u)r_i(u) \neq 0$, $\forall\, u$ ou linéairement dégénérés $d\lambda_i(u)r_i(u) = 0$, $\forall\, u$.

Dans les deux méthodes, l'existence de solutions est obtenue par un argument de compacité (« l'injection » de $VB(\mathbb{R})$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est compacte), ce qui ne garantit pas du tout l'unicité. Cette question a été résolue dans les dix dernières années par Bressan et ses collaborateurs [9, 13, 14, 18, 16, 15, 17]. On peut résumer les résultats obtenus comme suit :

– Les solutions obtenues comme limite d'approximation par les schémas de Glimm ou de « front tracking » sont uniques et dépendent de manière lipschitzienne du temps et de la donnée initiale [35], [36], [18]. Plus précisément, la méthode de front-tracking permet de construire de manière unique un semi-groupe lipshitzien $(t, \overline{u}) \mapsto S_t\overline{u}$ défini pour $t \geqslant 0$ et $\overline{u} \in \mathcal{D} \subset L^1$, qui résout le problème de Cauchy pour (1) et dont on peut en fait caractériser les trajectoires. Soit $u \in \mathrm{Lip}([0,T], L^1)$ telle que $u(t,\cdot) \in \mathcal{D}$; alors u est une trajectoire du semi-groupe si et seulement si, au voisinage de chaque point (τ, ξ), pour des temps positifs, u peut être bien approchée par une solution du problème de Riemann et par une solution d'un problème linéaire à coefficients constants là où la variation totale est petite. Pour énoncer un théorème précis, notons $u^- = \lim_{x\to\xi^-} u(\tau, x)$, $u^+ = \lim_{x\to\xi^+} u(\tau, x)$ et $U^1_{(u,\tau,\xi)}$ la solution du problème de Riemann avec donnée (u^-, u^+). On définit aussi $U^2_{(u,\tau,\xi)}$ la solution du problème de Cauchy linéaire à coefficients constants à donnée en $t = \tau$

$$w_t + df(u(\tau,\xi))w_x = 0,\ w(\tau, x) = u(\tau, x) \ ;$$

on a alors :

THÉORÈME 1.1 ([9], [11]). — *Soit $u \in \mathrm{Lip}([0,T], L^1)$ telle que $u(t,\cdot) \in \mathcal{D}$ pour tout t ; alors, il existe $\overline{u} \in \mathcal{D}$ tel que $u = S_t\overline{u}$ si et seulement si*

i) $\forall\, (\tau, \xi), \beta > 0$,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_{\xi - h\beta}^{\xi + h\beta} |u(\tau + h, x) - U^1_{(u,\tau,\xi)}(h, x - \xi)|\, dx = 0,$$

ii) $\exists\, C,\ \beta > 0,\ \forall\, a < \xi < b, \forall\, \tau \geqslant 0,$

$$\limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h} \int_{a+\beta h}^{b-\beta h} |u(\tau + h, x) - U^2_{(u,\tau,\xi)}(h, x)|\, dx \leqslant C\ \ \mathrm{VT}(u(\tau)_{/[a,b]}).$$

Dans tout cet exposé, on notera VT la variation totale d'une fonction.

– Le fait surprenant du théorème précédent est que toute fonction u vérifiant i) et ii) sera en fait une solution de (1). Un autre résultat d'unicité consiste en une caractérisation directe des solutions entropiques de (1) qui satisfont une condition supplémentaire [16], [17], [15]. Par exemple, on dit que u satisfait la condition d'oscillation douce (« tame oscillation ») s'il existe $C > 0$, $\delta > 0$ tels que pour tout $t > 0$ et a, b, $a < b$ l'oscillation $\omega(u, \Delta) = \sup_{(s,y),\,(s',y')\in\Delta}\{|u(s,y) - u(s',y')|\}$ de u sur le triangle

$$\Delta = \{(s,y),\ s \geqslant t, a + (s-t)/\delta < y < b - (s-t)/\delta\}$$

vérifie :

$$\omega(u, \Delta) \leqslant C\ \mathrm{VT}\ (u(\tau)_{/[a,b]}).$$

THÉORÈME 1.2 ([15]). — *Toute solution faible de (1), (2) qui satisfait la condition de choc de Lax et la condition d'oscillation douce coïncide avec une trajectoire du semi-groupe construit par le schéma de front-tracking.*

Enfin, on peut montrer que le fait de travailler dans VB et les hypothèses « donnée initiale à variation totale petite » et « système strictement hyperbolique » (SH) sont cruciales. Il existe des contre-exemples (voir par exemple [10]) montrant :

(1) si le système n'est pas strictement hyperbolique, les solutions peuvent ne pas dépendre continûment de la donnée initiale en norme L^1,

(2) si la donnée initiale est seulement dans L^∞, la solution peut devenir à valeurs mesures en temps fini. L'unicité et la dépendance continue par rapport aux données sont alors perdues,

(3) si la variation totale à $t = 0$ est grande, alors la norme L^∞ peut exploser en temps fini. En particulier, il n'existe pas de solution globale dans VB [29].

2. LES RÉSULTATS DE BIANCHINI ET BRESSAN

THÉORÈME 2.1 ([7]). — *Considérons le problème de Cauchy*

$$u_t^\varepsilon + A(u^\varepsilon)u_x^\varepsilon = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon,\ u^\varepsilon(0,x) = \overline{u}(x), \tag{5}$$

où A est régulière et strictement hyperbolique (i.e. vérifie (SH)) alors il existe des constantes C, L, L' et $\delta > 0$ telles que si $VT(\overline{u}) < \delta$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, (5) a une unique solution u^ε définie pour tout $t \geqslant 0$. En notant $S_t^\varepsilon\overline{u}$ cette solution, on a :

– *une* borne uniforme sur la variation totale

$$\mathrm{VT}(S_t^\varepsilon\overline{u}) \leqslant C\mathrm{VT}(\overline{u}), \tag{6}$$

– *des estimations de* stabilité

$$||S_t^\varepsilon\overline{u} - S_t^\varepsilon\overline{v}||_{L^1} \leqslant L||\overline{u} - \overline{v}||_{L^1}, \tag{7}$$

$$||S_t^\varepsilon\overline{u} - S_s^\varepsilon\overline{u}||_{L^1} \leqslant L'(|t-s| + |\sqrt{\varepsilon t} - \sqrt{\varepsilon s}|), \tag{8}$$

– *la* convergence *: quand ε tend vers zéro, u^ε converge vers une trajectoire d'un semi-groupe S tel que*

$$||S_t\overline{u} - S_s\overline{v}||_{L^1} \leqslant L||\overline{u} - \overline{v}|| + L'|t-s|. \tag{9}$$

Appelons les trajectoires de S « solutions de viscosité évanescente » pour le système hyperbolique $u_t + A(u)u_x = 0$.

Dans le cas conservatif $A = df$, toute solution de viscosité évanescente est une solution faible de (1) qui satisfait la condition d'admissibilité de Liu. En supposant de plus ($\diamond$), les solutions de viscosité évanescente coïncident avec les limites uniques des schémas de Glimm et de front tracking.

Ce théorème provenant de [7] est l'aboutissement de toute une série de travaux [3, 6, 4, 5] ; il contient en fait plusieurs résultats, chacun étant intéressant par lui-même. L'idée directrice de ces travaux était l'obtention d'estimations VB permettant d'obtenir la convergence sans hypothèse très particulière sur la structure de la solution de (1) qu'il est nécessaire de faire pour utiliser les méthodes de perturbation singulière [26], [44].

Le théorème 2.1 montre, pour des données initiales quelconques à variation totale petite, l'existence d'une solution globale pour le problème de Cauchy (5) vérifiant les trois estimations (6), (7), (8). Cela généralise considérablement des travaux antérieurs où la stabilité était obtenue au voisinage de solutions particulières (chocs ou détentes) à variations totales petites [25, 26, 34, 41, 42, 44]. Dans certains cas particuliers, d'autres méthodes permettent de supprimer l'hypothèse de petitesse : pour des perturbations régulières d'un choc de forte amplitude, on a des résultats de stabilité et d'approximation par viscosité sous hypothèse spectrale [46, 39] même en plusieurs dimensions d'espace [45, 27]. Nous donnerons dans la suite des éléments de preuve de cette partie du théorème.

En ce qui concerne la partie convergence, on peut facilement montrer à partir du théorème de Helly (qui affirme que l'injection de $BV(\mathbb{R})$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est compacte) et des estimations (6) et (7), (8) qu'il existe une sous-suite ε_n telle que $S^{\varepsilon_n}_t\overline{u}$ converge dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ pour tout $t \geqslant 0$ et tout $\overline{u}$ tel que $VT(\overline{u}) \leqslant \delta$. Ce même argument de compacité etait déjà utilisé dans les méthodes de Glimm et de front-tracking (voir par exemple le livre de Bressan [11]). On remarque que dans le cas conservatif $A = df$, cela donne un procédé de construction de solutions faibles pour (1), (2) qui n'utilise pas l'hypothèse ($\diamond$). Cela généralise une série de résultats [33, 37, 28] où l'hypothèse était relaxée mais pas complètement supprimée. La convergence reposant sur un argument de compacité, le problème est ensuite de montrer l'unicité des solutions obtenues. Dans le cas conservatif $A = df$, les solutions de viscosité évanescente sont des solutions faibles de (1). Avec l'hypothèse ($\diamond$), il suffit alors de montrer que les trajectoires des semi-groupes obtenus comme limites de S^{ε_n} possèdent la liste de propriétés permettant d'utiliser le théorème 1.2. La méthode consiste à montrer que les solutions de

(5) vérifient « presque » ces propriétés lorsque $\varepsilon > 0$ est petit. Par exemple, on montre que si deux solutions u^ε, v^ε de (5) ont des données initiales vérifiant $u_0(x) = v_0(x)$, $\forall\, x \in [a,b]$, on a l'estimation

$$|u^\varepsilon(t,x) - v^\varepsilon(t,x)| \leqslant \alpha ||u_0 - v_0||_{L^\infty} \Big(e^{\frac{\beta t - (x-a)}{\varepsilon}} + e^{\frac{\beta t + (x-b)}{\varepsilon}} \Big).$$

Ainsi, en passant à la limite quand ε_n tend vers zéro, on retrouve la propriété classique de propagation à vitesse finie pour les solutions de (1) :

$$u(t,x) = v(t,x), \text{ si } a + \beta t < x < b - \beta t.$$

On utilise la même idée pour montrer la condition d'oscillation douce.

Le cas général non conservatif est beaucoup plus délicat. Les auteurs construisent d'abord pour une donnée initiale de Riemann (*i.e.* de la forme (4)) une solution autosimilaire du problème de Cauchy non conservatif pour le système $u_t + A(u)u_x = 0$ qui est l'unique solution pouvant s'obtenir comme limite de solutions u^ε de (5). Cette construction utilise les courbes de la décomposition en ondes progressives que nous décrirons plus loin ; dans l'esprit, elle est donc proche du procédé proposé dans [22]. Cela permet de définir une notion de solutions de viscosité en termes d'intégrales locales (u est solution de viscosité si u vérifie i) et ii) du théorème 1.1) comme dans le cas conservatif. Il s'agit ensuite de montrer par une modification de la preuve du théorème 1.1 que ces solutions de viscosité sont uniques et coïncident avec les trajectoires de n'importe quel semi-groupe $S = \lim S^{\varepsilon_n}$ obtenu par viscosité évanescente. La limite étant indépendante de la suite ε_n, cela montre la convergence vers une unique limite de toute la famille d'approximations visqueuses S^ε.

3. LE PROBLÈME DE CAUCHY POUR (5)

Dans ce paragraphe on s'attache à décrire la construction d'une solution globale pour (5) vérifiant la borne (6). On remarque tout d'abord que si on pose $u^\varepsilon(t,x) = u(t/\varepsilon, x/\varepsilon)$, u est une solution de

$$u_t + A(u)u_x = u_{xx} \tag{10}$$

avec donnée initiale $u(0,x) = \overline{u}(\varepsilon x)$. De plus la variation totale est invariante par le changement d'échelle ; ainsi on a toujours

$$\mathrm{VT}(\overline{u}(\varepsilon\cdot)) = \mathrm{VT}(\overline{u}) < \delta.$$

Ainsi, pour obtenir les estimations (6) et (7), (8), il suffit de considérer le système (10).

Pour présenter les nouvelles techniques de [7], on va donner des éléments de preuve de

THÉORÈME 3.1. — *Il existe des constantes* $\delta_0 > 0$ *et* $\kappa > 0$ *telles que si* $VT(u_0) \leqslant \delta_0/\kappa$ *alors il existe une unique solution de (10) vérifiant* $u(0,x) = u_0(x)$ *et* $VT(u(t)) \leqslant \delta_0$ *pour tout* $t \geqslant 0$.

La preuve de ce théorème comporte plusieurs étapes. Tout d'abord, l'équation (10) a une forme classique, c'est une équation parabolique semilinéaire. On dispose donc d'un théorème d'existence et d'unicité locale pour le problème de Cauchy (voir par exemple le livre de D. Serre [40]). Dans ce qui suit, on notera simplement $||\cdot||$ la norme $||\cdot||_{L^1(\mathbb{R})}$. Pour montrer que les solutions sont en fait globales, on peut donc faire un raisonnement de type équations différentielles ordinaires. On définit

$$T^* = \sup\{T,\ \forall\, t \in [0, T[,\ ||u_x(t)|| \leqslant \delta_0\}$$

et on cherche à montrer que $T^* = +\infty$. Grâce au théorème d'existence locale, il suffit de montrer que l'on ne peut jamais avoir $||u_x|| = \delta_0$.

Pour cela on utilise deux types d'estimations. Tout d'abord, on montre que pour $t \in [0, \widehat{t}]$, où $\widehat{t} \sim 1/\delta_0^2$ on a l'estimation

$$||u_x(t)|| \leqslant \frac{\delta_0}{2}.$$

En particulier cela implique que $T^* > \widehat{t}$. Cette partie utilise des techniques « paraboliques », l'estimation pour le problème non linéaire (10) provient de la stabilité linéaire des constantes.

Il s'agit ensuite de faire une estimation pour $t \geqslant \widehat{t}$ de $||u_x||$. Pour cela, des techniques « hyperboliques » sont utilisées : on trouve une décomposition adéquate de u_x sous la forme

$$u_x = \sum_{i=1}^{n} v_i \widetilde{r}_i \tag{11}$$

de telle sorte que

$$||u_x|| \sim \sum_{i=1}^{n} ||v_i||. \tag{12}$$

Les composantes v_i sont alors solutions d'équations de transport diffusion-scalaire

$$v_{it} + (c_i v_i)_x = v_{ixx} + \varphi_i \tag{13}$$

où le terme source φ_i décrit des interactions entre les différentes composantes. Pour cette équation scalaire, on a la propriété classique de contraction dans L^1

$$||v_i(t)|| \leqslant ||v_i(\widehat{t})|| + \int_{\widehat{t}}^{t} ||\varphi_i(s)||\, ds, \quad \forall\, t \in [\widehat{t}, T]. \tag{14}$$

Par conséquent, si on trouve une décomposition (11) telle que les termes sources vérifient

$$\forall\, t,\ \widehat{t} \leqslant t \leqslant T,\ \forall\, i, \qquad \int_{\widehat{t}}^{T} ||\phi_i|| \leqslant \frac{\delta_0}{2C}, \tag{15}$$

on peut déduire de l'équivalence (12) que l'on garde

$$||u_x(t)|| \leqslant \delta_0. \tag{16}$$

On peut donc modifier la définition de T^* et prendre

$$T^* = \sup\Big\{T \geqslant \widehat{t},\, \forall\, i,\, \int_{\widehat{t}}^{T} ||\varphi_i||\, dt \leqslant \frac{\delta_0}{2C}\Big\}.$$

Pour conclure, il suffit alors de montrer que si on a l'estimation (15), et donc aussi (16), les termes d'interactions entre solutions de (13) sont en fait meilleurs et vérifient une estimation du type

$$\int_{\widehat{t}}^{T} ||\varphi_i(s)||\, ds \leqslant C\delta_0^2, \qquad \forall\, t \in [\widehat{t}, T]. \tag{17}$$

pour C indépendant de T.

4. ESTIMATIONS PARABOLIQUES

PROPOSITION 4.1. — *Il existe $\kappa > 0$, $\delta_0 > 0$ et $\widehat{t}$ telles que si $||u_{0x}|| \leqslant \delta_0/2\kappa$, alors la solution de (10) telle que $u(0,x) = u_0(x)$ vérifie*

$$||u_x(t)|| \leqslant \frac{\delta_0}{2}, \quad \forall\, t \in [0, \widehat{t}]. \tag{18}$$

De plus $\widehat{t}$ est de l'ordre de $1/\delta_0^2$.

Enfin, si on conserve la borne

$$||u_x(t)|| \leqslant \delta_0,\, \forall\, t \in [0, T] \tag{19}$$

pour $T > \widehat{t}$, on a alors de meilleures estimations pour les dérivées d'ordre supérieur, par exemple

$$||u_{xx}(t)||,\ ||u_x(t)||_\infty = \mathcal{O}(1)\delta_0^2. \tag{20}$$

La fin de la proposition montre que la partie difficile de la preuve du théorème 3.1 est vraiment l'obtention de la borne (19), puisque cela entraîne automatiquement un meilleur comportement des dérivées d'ordre supérieur.

La preuve se fait par une méthode de point fixe classique. On remarque d'abord que pour une solution $u(t,x)$ de (10), l'état

$$u^* = \lim_{x \to -\infty} u(t,x)$$

est indépendant de t, on récrit alors l'équation (10) comme

$$u_t + A(u^*)u_x - u_{xx} = \Big(A(u^*) - A(u)\Big)u_x \tag{21}$$

c'est-à-dire comme une perturbation du système parabolique linéaire

$$u_t + A(u^*)u_x - u_{xx}.$$

Appelons $G(t,x)$ la matrice de Green de ce système linéaire ; on peut alors récrire (21) comme une équation intégrale

$$u(t)-u^* = G(t)\star(u_0-u^*)+\int_0^t G(t-s)\star\Big(A(u^*)-A(u)\Big)u_x(s)\,ds \tag{22}$$

$$u_x(t) = G(t)\star u_{0x}+\int_0^t G_x(t-s)\star\Big(A(u^*)-A(u)\Big)u_x(s)\,ds \tag{23}$$

où les convolutions sont des convolutions par rapport à la variable d'espace x. Pour ce système linéaire, la matrice de Green est explicite ; elle s'écrit

$$G(t,x)=\sum_{i=1}^n G_i(t,x)r_i(u^*)l_i(u^*),$$

où les $l_i(u^*)$ sont les vecteurs propres à gauche de $A(u^*)$ et

$$G_i(t,x)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\Big(-\frac{(x-\lambda_i(u^*)t)^2}{4t}\Big).$$

En particulier on a les estimations

$$||G(t)||\leqslant\kappa,\ ||G_x(t)||\leqslant\frac{\kappa}{\sqrt{t}},\ ||G_{xx}(t)||\leqslant\frac{\kappa}{t}.$$

On obtient facilement la preuve de la première partie de la proposition par un argument de point fixe et des estimations de convolutions. Pour la deuxième partie, on utilise la même méthode sur $[t-\widehat{t},t]$. On obtient par exemple

$$u_{xx}(t)=G_x(\widehat{t})\star u_x(\widehat{t})+\cdots$$

et donc

$$||u_{xx}(t)||\leqslant\frac{C}{\sqrt{\widehat{t}}}\delta_0\leqslant C\delta_0^2$$

puisque $\widehat{t}\sim 1/\delta_0^2$.

5. DÉCOMPOSITION D'ONDES À L'AIDE DE VARIÉTÉS CENTRALES

On passe maintenant à la deuxième partie du programme qui consiste à trouver une décomposition (11) telle que les termes sources φ_i vérifient (17), c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty}||\varphi_i(t)||\,dt<+\infty. \tag{24}$$

En s'inspirant des techniques utilisées pour les systèmes hyperboliques, une première approche naturelle est d'essayer la décomposition

$$u_x=\sum_{i=1}^n v_i r_i(u) \tag{25}$$

où les $r_i(u)$ sont les vecteurs propres de $A(u)$. Cette décomposition peut effectivement être utilisée (voir [3]) lorsque le système (10) possède des propriétés très particulières : les courbes intégrales des champs de vecteurs r_i sont des droites. Cependant une propriété fondamentale des équations paraboliques (10) est l'existence d'ondes progressives du type $u(t,x) = V(x - \sigma t)$ avec V régulière. En général, lorsqu'on essaie la décomposition (25) pour une onde progressive, on trouve des termes sources φ_i qui ne sont pas nuls et qui dépendent en fait de la seule variable $\xi = x - \sigma t$. Il est donc impossible d'avoir (24). Ce phénomène peut se vérifier [5] sur un système triangulaire

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= u_{xx}, \\ v_t + g(u,v)_x &= v_{xx}. \end{aligned}$$

L'idée pour surmonter cette difficulté est précisément de chercher en tout point x une décomposition de u_x en somme de dérivées d'ondes progressives U_i passant par $u(x)$. En fait, à cause de la présence de viscosité il faut chercher une décomposition simultanée de u_x et u_{xx} :

$$u_x = \sum_{i=1}^{n} U_i'(x), \qquad u_{xx} = \sum_{i=1}^{n} U_i''(x). \tag{26}$$

Une onde progressive est solution de l'équation différentielle du second ordre

$$U_i'' = (A(U_i) - \sigma_i)U_i', \tag{27}$$

σ_i étant la vitesse. Ainsi, pour tout i, on peut trouver une famille à $n+1$ paramètres d'ondes progressives en prescrivant σ_i et U_i'. Cela donne $n(n+1)$ paramètres à déterminer, ce qui est beaucoup trop puisque (26) est un système de $2n$ équations. Pour régler ce problème, l'idée est de se restreindre à des solutions U_i bornées sur $\mathbb{R}$ et donc de les chercher dans une variété centrale. Plus précisément, pour avoir le bon nombre de paramètres, on va chercher n familles d'ondes progressives dépendant de 2 paramètres lorsqu'on a fixé $U_i(x) = u(x)$.

On peut récrire le système (27) comme un système du premier ordre sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = (A(u) - \sigma)v, \\ \sigma' = 0, \end{cases} \tag{28}$$

puis linéariser ce système au point d'équilibre $P_i^* = (u^*, 0, \lambda_i(u^*))$, ce qui donne

$$\begin{cases} u' = v, \\ v' = (A(u^*) - \lambda_i(u^*))v, \\ \sigma' = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Décomposons un vecteur v de $\mathbb{R}^n$ sur la base $(r_1^*, \cdots, r_n^*)$,

$$v = \sum_{j=1}^{n} V_j r_j^*$$

où $r_j^* = r_j(u^*)$. Le noyau (généralisé) $\mathcal{N}_i$ du système linéaire (29) est de dimension $n+2$, il est constitué des vecteurs (u, v, σ) tels que

$$V_j = 0, \qquad \forall\, j \neq i.$$

Le théorème de variété centrale [43] donne l'existence d'une variété $\mathcal{M}_i$ tangente à $\mathcal{N}_i$ au point P_i^* et contenant toutes les trajectoires de (28) qui restent dans un petit voisinage de P_i^*. Cette variété peut donc être décrite localement par les équations

$$V_j = \varphi_j^i(u, V_i, \sigma), \qquad j \neq i.$$

De plus, $\mathcal{M}_i$ contient les équilibres $(u, 0, \sigma)$ au voisinage de P_i^*, on a donc $\phi_j^i(u, 0, \sigma) = 0$. Cela permet de factoriser φ_j^i et donc d'écrire pour $v \in \mathcal{M}_i$,

$$v = V_i \widetilde{r}_i(u, V_i, \sigma) \tag{30}$$

avec (il est plus pratique d'avoir des vecteurs de norme 1)

$$\widetilde{r}_i = \frac{r_i(u^*) + \sum_{j\neq i} \frac{\varphi_j^i(u,V_i,\sigma)}{V_i}}{\left| r_i(u^*) + \sum_{j\neq i} \frac{\varphi_j^i(u,V_i,\sigma)}{V_i} \right|}.$$

Sur la variété $\mathcal{M}_i$, on a donc une décomposition proche de (11) mais $\widetilde{r}_i$ est différent de $r_i(u)$. En effet, l'identité $(A(u) - \lambda_i) r_i = 0$ est remplacée par

$$(A(u) - \widetilde{\lambda}_i)\widetilde{r}_i = v_i(\widetilde{r}_{i,u}\widetilde{r}_i + \widetilde{r}_{i,v}(\widetilde{\lambda}_i - \sigma_i))$$

où $\widetilde{\lambda}_i = (A(u)\widetilde{r}_i, \widetilde{r}_i)$. En dépit de sa complexité apparente, cette identité s'avère cruciale pour parvenir à des termes sources φ_i intégrables. Finalement, on remarque que lorsque $u(t,x)$ est une onde progressive dans la variété centrale $\mathcal{M}_i$, *i.e.* $u(t,x) = U_i(x - \sigma_i t)$, on a alors $u_x = v = v_i \widetilde{r}_i$ et donc en dérivant, on obtient

$$v_x = v_{ix}\widetilde{r}_i + v_i \widetilde{r}_{ix} = (A(u) - \sigma_i) v_i \widetilde{r}_i.$$

Ce qui donne en prenant le produit scalaire par $\widetilde{r}_i$

$$v_{ix} = (\widetilde{\lambda}_i - \sigma_i) v_i$$

et donc en dérivant de nouveau

$$v_{it} + (\widetilde{\lambda}_i v_i)_x = v_{ixx}$$

puisque $v_{it} = -\sigma_i v_{ix}$. On trouve donc que v_i évolue selon l'équation de transport diffusion souhaitée sans terme source φ_i dans ce cas particulier.

L'étape suivante est de parvenir à la décomposition (26). En se basant sur ce qui précède on voudrait prendre $U_i' = v_i \widetilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i)$: il faut donc identifier les paramètres v_i et σ_i en fonction de u, u_x et u_{xx}. Considérons de nouveau le cas où u est une onde progressive dans la variété centrale $\mathcal{M}_i$. On a alors $u_x = v_i\widetilde{r}_i$ et donc $\widetilde{r}_i$ étant unitaire, $v_i = \pm|u_x|$. En ce qui concerne la vitesse, on a $u_t = -\sigma_i u_x$, donc u_t est colinéaire à $\widetilde{r}_i$ et on peut écrire

$$u_t = u_{xx} - A(u)u_x = \omega_i \widetilde{r}_i.$$

La vitesse est alors donnée par $\sigma_i = -\omega_i/v_i$.

En s'inspirant de ce qui précède, pour le cas général, on a envie de définir $u_t = u_{xx} - A(u)u_x$ et d'essayer de trouver v_i, ω_i tels que

$$u_x = \sum_i v_i\widetilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i), \ \ u_t = \sum_i \omega_i \widetilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i)$$

où $\sigma_i = -\omega_i/v_i$. Le problème de cette décomposition est que les vecteurs $\widetilde{r}_i$ ne sont définis que pour des vitesses σ_i proches de λ_i^* alors que le rapport ω_i/v_i peut devenir très grand lorsque $|u_x|$ est très petit. Pour surmonter cela, on utilise une fonction de troncature $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\theta(x) = x$ dans un voisinage de l'origine. On pose alors $\omega_i = w_i - \lambda_i^* v_i$ et on cherche la décomposition

$$u_x = \sum_i v_i\widetilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i), \qquad u_t = \sum_i (w_i - \lambda_i^* v_i)\widetilde{r}_i(u, v_i, \sigma_i) \tag{31}$$

avec

$$u_t = u_{xx} - A(u)u_x, \qquad \sigma_i = \lambda_i^* - \theta\Big(\frac{w_i}{v_i}\Big). \tag{32}$$

En fait, il y a toujours un problème lorsque $v_i = w_i = 0$, mais dans ce cas ce n'est pas gênant, car on a toujours $\widetilde{r}_i(u, 0, \sigma_i) = r_i(u)$ quelle que soit la valeur de σ_i.

Le théorème des fonctions implicites permet ensuite de montrer que l'on peut effectivement parvenir à la décomposition (31), (32).

Proposition 5.1. — *Pour $|u - u^*|$, $|u_x|$ et $|u_{xx}|$ suffisamment petits, le système d'équations (31) a une unique solution $(v, w) = (v_1, \cdots, v_n, w_1, \cdots, w_n)$. De plus l'application $(u, u_x, u_{xx}) \mapsto (v, w)$ est $\mathcal{C}^\infty$ en dehors des $\mathcal{N}_i = \{v_i = w_i = 0\}$ et elle est $\mathcal{C}^{1,1}$ dans un voisinage de $(u^*, 0, 0)$.*

On peut également montrer que tant qu'on a l'estimation (19), les composantes v_i et w_i satisfont des estimations de type (20).

6. ESTIMATIONS DES TERMES SOURCES

Les composantes (v_i, w_i) de la décomposition (31) évoluent alors selon les équations

$$v_{i,t} + (\widetilde{\lambda}_i v_i)_x - v_{i,xx} = \varphi_i, \qquad w_{i,t} + (\widetilde{\lambda}_i w_i)_x - w_{i,xx} = \psi_i. \tag{33}$$

On avait déjà vu que dans le cas idéal où u est une onde progressive, on trouvait ces équations sans termes sources.

Les termes sources ont donc trois origines possibles :

1. Il y a des ondes de deux différentes familles $j \neq k$ présentes dans la décomposition (31) au point x. Cela donne des termes quadratiques dus à des interactions transverses. Dans ce cas-là, leur contribution à φ_i, ψ_i est donnée par

$$T_1 = \mathcal{O}(1) \sum_{j \neq k} \Big(|v_j v_k| + |v_{j,x} v_k| + |v_j w_k| + |v_{j,x} w_k| + |v_j w_{k,x}| + |w_j w_k| \Big). \tag{34}$$

2. La décomposition (31) étant définie ponctuellement, deux ondes progressives de la même famille peuvent avoir des vitesses différentes en des points différents, l'interaction infinitésimale entre des ondes voisines de la même famille sera donc déterminée par le taux de variation de la vitesse $\sigma_{j,x}$. Dans ce cas, la contribution aux termes sources peut être linéaire ou quadratique :

$$\mathcal{O}(1) v_j^2 \sigma_{j,x} + \mathcal{O}(1) v_j^2 \sigma_{j,x}^2.$$

En se souvenant que l'on a $\sigma_j = \lambda_j^* - \theta(w_j/v_j)$, on peut récrire la contribution aux termes sources comme

$$T_2^l = \mathcal{O}(1) |w_{j,x} v_j - v_{j,x} w_j|, \qquad T_2^q = \mathcal{O}(1) \Big| v_j \Big(\frac{w_j}{v_j} \Big)_x \Big|^2 \chi_{\{w/v \in \mathrm{Supp}(\theta)\}}. \tag{35}$$

3. Le dernier type de terme source apparaît lorsque la fonction de troncature θ est active ; dans ce cas-là, il y a une erreur parce que l'on a fait un mauvais choix de la vitesse σ_j. On a alors une borne

$$T_3 = \mathcal{O}(1)(|v_{j,x}| + |w_{j,x}|) |w_j - \theta_j v_j|, \;\; \theta_j = \theta\Big(\frac{w_j}{v_j}\Big). \tag{36}$$

Nous n'insisterons pas sur la preuve des bornes (34), (35), (36). C'est la partie la plus technique de la preuve du théorème 3.1.

La dernière partie de la démonstration du théorème 3.1 consiste à montrer une estimation du type (17). Pour cela on utilise différentes fonctions de Lyapounov pour contrôler les trois types de termes d'interactions que l'on vient de décrire.

6.1. Interactions transverses

On commence par l'estimation d'un terme de type T_1, *i.e.* $\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |v_j v_k| \, dxdt$ avec $j \neq k$. Le problème modèle à étudier est un système

$$\begin{cases} v_t + (\lambda v)_x = v_{xx}, & v(0,x) = v_0(x), \\ w_t + (\lambda w)_x = w_{xx}, & w(0,x) = w_0(x), \end{cases} \tag{37}$$

avec

$$\inf_{t,x} \lambda(t,x) - \sup_{t,x} \mu(t,x) \geqslant c > 0. \tag{38}$$

On peut montrer l'estimation

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |vw| \, dxdt \leqslant ||v_0|| \, ||w_0|| \tag{39}$$

en utilisant un potentiel d'interaction

$$Q(v,w) = \int_{\mathbb{R}^2} K(x-y)|v(y)||w(x)|\,dxdy$$

où K est de la forme $K(s) = 1/c$ si $s \geqslant 0$, $K(s) = \frac{1}{c}e^{cs/2}$ si $s < 0$. Un calcul montre que

$$\frac{d}{dt}Q(v,w) + \int_{\mathbb{R}} |v(t,x)|\,|w(t,x)|\,dx \leqslant 0$$

ce qui donne (39). Ce potentiel peut être vu comme une version parabolique du potentiel pour les futures interactions d'onde [24]. On remarque que le potentiel a un rôle important dans la zone $x > y$, c'est-à-dire celle où on s'attend à une interaction compte tenu de (38).

6.2. Interactions d'ondes de la même famille

On passe maintenant à l'estimation des deux sortes de terme de type T_2. Le problème modèle est encore (37), mais cette fois-ci $\lambda = \mu$. On définit alors une courbe plane $\gamma = (\int_{-\infty}^{x} v, \int_{-\infty}^{x} w)$, qui évolue selon

$$\gamma_t + \lambda\gamma_x = \gamma_{xx}. \tag{40}$$

D'après cette équation, γ évolue dans la direction de la courbure, une fonction de Lyapounov est alors la longueur de la courbe

$$L(\gamma(t)) = \int_{\mathbb{R}} |\gamma_x|\,dx = \int_{\mathbb{R}} (v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}\,dx.$$

Une autre fonction de Lyapounov introduite dans [6] est la « fonctionnelle d'aire »

$$\mathcal{A}(\gamma(t) = \frac{1}{2}\iint_{x<y} |\gamma_x(t,x) \wedge \gamma_x(t,y)|\,dxdy.$$

Pour comprendre la signification de $\mathcal{A}(\gamma)$, on remarque que, dans le cas d'une courbe fermée, on a

$$\int \gamma(y) \wedge \gamma_x(y)\,dy = \frac{1}{2}\iint_{x<y} \gamma_x(t,x) \wedge \gamma_x(t,y)\,dxdy,$$

$\mathcal{A}(\gamma)$ représente donc la somme des aires des régions entourées par la courbe multipliées par le nombre de tours. On remarque aussi que pour une loi de conservation scalaire $u_t + f(u)_x = u_{xx}$, la courbe $\gamma = (u, u_x - f(u))$ évolue selon l'équation (40) avec $\lambda = f'$. De plus, si on définit la vitesse infinitésimale d'une onde par

$s(x) = -u_t(t,x)/u_x(t,x)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\gamma) &= \frac{1}{2}\iint_{x<y} |u_x(t,x)u_t(t,y) - u_t(t,x)u_x(t,y)|\,dxdy \\
&= \frac{1}{2}\iint_{x<y} |u_x(t,x)|\,|u_x(t,y)|\,|s(x) - s(y)|\,dxdy \\
&= \frac{1}{2}\iint_{x<y} \Big(\text{ onde en } x \times \text{ onde en } y \times \text{ différence des vitesses }\Big)\,dxdy
\end{aligned}$$

ce qui indique bien que $A(\gamma)$ peut être vu comme un potentiel d'interaction entre ondes de la même famille.

Le taux de dissipation de ces deux fonctions de Lyapounov permet de contrôler les termes de type T_1^l, T_1^q.

En utilisant la base de Frénet (τ, n), et en notant c, la courbure de $\gamma(t,\cdot)$, on peut récrire (40) comme

$$\gamma_t = \Big(|\gamma_x|_x - \lambda|\gamma_x|\Big)\,\tau + |\gamma_x|^2 c\,n.$$

Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}L(\gamma(t)) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_{xt}\cdot\tau\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \gamma_t \cdot n\,c|\gamma_x|\,dx &= -\int_{\mathbb{R}} |\gamma_x|^3 c^2\,dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \frac{(wv_x - vw_x)^2}{(v^2+w^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx,
\end{aligned}$$

ce qui s'écrit finalement

$$\frac{d}{dt}L(\gamma(t)) + \int_{\mathbb{R}} |v|\Big[\Big(\frac{w}{v}\Big)_x\Big]^2 \frac{1}{\Big(1+\big(\frac{w}{v}\big)^2\Big)^{3/2}}\,dx \leqslant 0.$$

Cela permet de contrôler les termes quadratiques T_2^q.

De même, un calcul plus long (voir [6]) montre que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{A}(\gamma(t)) + \int_{\mathbb{R}} |w_x v - v_x w|\,dx \leqslant 0$$

ce qui donne un contrôle des termes de type T_2^l.

6.3. Estimations d'énergie

Il reste à contrôler le dernier type de terme qui correspond à un mauvais choix de la vitesse. Pour expliquer les idées, revenons au cas idéal où la décomposition (31) ne comporterait qu'une seule onde progressive. Dans ce cas $u_x = v_i\widetilde{r}_i$ et, par définition, $u_{xx} - A(u)u_x = \omega_i\widetilde{r}_i = (w_i - \lambda_i^*)\widetilde{r}_i$. On trouve donc finalement

$$v_{ix} - \widetilde{\lambda}_i v_i = w_i - \lambda_i^* v_i. \tag{41}$$

En remplaçant dans (36), on voit que le terme prépondérant à majorer est $\mathcal{O}(1)|v_{ix}|^2$ lorsque $|w_i/v_i| \geqslant A$, où A détermine la taille du support de θ, c'est-à-dire en utilisant de nouveau (41) lorsque

$$|v_{ix}/v_i| \geqslant A/2. \tag{42}$$

Le terme à estimer correspond au taux de dissipation de l'énergie usuelle

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |v_i|^2\, dx.$$

Cependant, pour l'équation

$$v_{it} + (\widetilde{\lambda}_i v_i)_x - v_{ixx} = 0.$$

l'énergie n'est en général pas décroissante ; on a seulement

$$\frac{d}{dt}E(t) + \int_{\mathbb{R}} |v_{ix}|^2\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |\lambda|\, |v_{ix}|\, |v_i|\, dx,$$

mais en choisissant bien la taille du support de θ, on conclut quand même en utilisant (42).

7. ESTIMATIONS DE STABILITÉ

On a seulement insisté sur l'obtention d'une borne VT uniforme pour (10) . L'estimation de stabilité (7) s'obtient en utilisant le même type de technique et un argument homotopique. Soient u, v deux solutions de (10) avec données initiales $\overline{u}$ et $\overline{v}$. On considère un chemin régulier $\overline{u}^\theta = \theta\overline{u} + (1-\theta)\overline{v}$ et u^θ la solution de (10) avec donnée initiale $\overline{u}^\theta$. Puisqu'on a

$$||u(t) - v(t)|| \leqslant \int_0^1 \Big|\Big|\frac{du^\theta}{d\theta}\Big|\Big|\, d\theta,$$

il suffit de montrer une estimation du type

$$\Big|\Big|\frac{du^\theta}{d\theta}\Big|\Big| \leqslant L\Big|\Big|\frac{du^\theta(\theta=0)}{d\theta}\Big|\Big| = L||\overline{u} - \overline{v}|| \tag{43}$$

pour avoir (7).

Posons $z^\theta = \frac{du^\theta}{d\theta}$; z^θ est solution de l'équation linéaire

$$z_t^\theta + \Big(dA(u^\theta)\cdot z^\theta\Big)u_x^\theta + A(u^\theta)z_x^\theta = z_{xx}^\theta \tag{44}$$

avec donnée initiale $\overline{u}(x) - \overline{v}(x)$. Pour montrer que z^θ vérifie (43), on utilise une décomposition de z^θ et $z_x^\theta - A(u^\theta)z^\theta$ analogue à (31).

8. CONCLUSION

Les nouvelles méthodes issues de [7] devraient avoir très rapidement de nouvelles applications : S. Bianchini est parvenu [2] à montrer la convergence d'approximations semi-discrètes en espace de (1) :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \frac{1}{\Delta x}\frac{\partial}{\partial x}\Big(f(u(x,t)) - f(u(x-\Delta x,t))\Big) = 0.$$

En ce qui concerne la convergence des schémas numériques complètement discrets, il a été montré que l'on ne pouvait pas espérer d'estimations VB analogues à (6) [12]. Enfin, A. Bressan et T. Yang [19] ont très récemment estimé le taux de convergence de la solution u^ε de (5) vers la solution u de (1) sous les hypothèses (SH) et ($\diamond$). Ils obtiennent une estimation qui paraît presque optimale $||u^\varepsilon(t) - u(t)||_{L^1} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}|\ln\varepsilon|)$.

RÉFÉRENCES

[1] P. Baiti & H.K. Jenssen – « On the front-tracking algorithm », *J. Math. Anal. Appl.* **217** (1998), no. 2, p. 395–404.

[2] S. Bianchini – « BV solutions of the semidiscrete upwind scheme », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **167** (2003), no. 1, p. 1–81.

[3] S. Bianchini & A. Bressan – « BV solutions for a class of viscous hyperbolic systems », *Indiana Univ. Math. J.* **49** (2000), no. 4, p. 1673–1713.

[4] ———, « A case study in vanishing viscosity », *Discrete Contin. Dynam. Systems* **7** (2001), no. 3, p. 449–476.

[5] ———, « A center manifold technique for tracing viscous waves », *Commun. Pure Appl. Anal.* **1** (2002), no. 2, p. 161–190.

[6] ———, « On a Lyapunov functional relating shortening curves and viscous conservation laws », *Nonlinear Anal.* **51** (2002), no. 4, Ser. A : Theory Methods, p. 649–662.

[7] ———, « Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems », Preprint, 2002.

[8] A. Bressan – « Global solutions of systems of conservation laws by wave-front tracking », *J. Math. Anal. Appl.* **170** (1992), no. 2, p. 414–432.

[9] ———, « The unique limit of the Glimm scheme », *Arch. Rational Mech. Anal.* **130** (1995), no. 3, p. 205–230.

[10] ———, « Hyperbolic systems of conservation laws », *Rev. Mat. Complut.* **12** (1999), no. 1, p. 135–200.

[11] ———, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 20, Oxford University Press, Oxford, 2000, The one-dimensional Cauchy problem.

[12] A. Bressan, P. Baiti & H.K. Jenssen – « An instability of the Godunov scheme », Preprint.

[13] A. Bressan & R. M. Colombo – « The semigroup generated by 2×2 conservation laws », *Arch. Rational Mech. Anal.* **133** (1995), no. 1, p. 1–75.

[14] A. Bressan, G. Crasta & B. Piccoli – *Well-posedness of the Cauchy problem for $n\times n$ systems of conservation laws*, vol. 146, Mem. Amer. Math. Soc., no. 694, American Mathematical Society, 2000.

[15] A. Bressan & P. Goatin – « Oleinik type estimates and uniqueness for $n\times n$ conservation laws », *J. Differential Equations* **156** (1999), no. 1, p. 26–49.

[16] A. Bressan & P.G. Le Floch – « Uniqueness of weak solutions to systems of conservation laws », *Arch. Rational Mech. Anal.* **140** (1997), no. 4, p. 301–317.

[17] A. Bressan & M. Lewicka – « A uniqueness condition for hyperbolic systems of conservation laws », *Discrete Contin. Dynam. Systems* **6** (2000), no. 3, p. 673–682.

[18] A. Bressan, T.-P. Liu & T. Yang – « L^1 stability estimates for $n\times n$ conservation laws », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **149** (1999), no. 1, p. 1–22.

[19] A. Bressan & T. Yang – « On the rate of convergence of the vanishing viscosity approximation », Preprint, 2003.

[20] C.M. Dafermos – « The entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws », *J. Differential Equations* **14** (1973), p. 202–212.

[21] ———, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 325, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[22] G. Dal Maso, P.G. LeFloch & F. Murat – « Definition and weak stability of nonconservative products », *J. Math. Pures Appl. (9)* **74** (1995), no. 6, p. 483–548.

[23] R.J. DiPerna – « Convergence of approximate solutions to conservation laws », *Arch. Rational Mech. Anal.* **82** (1983), no. 1, p. 27–70.

[24] J. Glimm – « Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **18** (1965), p. 697–715.

[25] J. Goodman – « Nonlinear asymptotic stability of viscous shock profiles for conservation laws », *Arch. Rational Mech. Anal.* **95** (1986), no. 4, p. 325–344.

[26] J. Goodman & Z.P. Xin – « Viscous limits for piecewise smooth solutions to systems of conservation laws », *Arch. Rational Mech. Anal.* **121** (1992), no. 3, p. 235–265.

[27] O. Guès, G. Métivier, M. Williams & K. Zumbrun – « Multidimensional viscous shocks I, II », Preprint, 2002.

[28] T. Iguchi & P.G. Le Floch – « Existence theory for hyperbolic systems of conservation laws with general flux-functions », Preprint, 2002.

[29] H.K. Jenssen – « Blowup for systems of conservation laws », *SIAM J. Math. Anal.* **31** (2000), no. 4, p. 894–908 (electronic).

[30] S. Khruzhkov – « First order quasilinear equations with several space variables », *Math. USSR Sbornik* **10** (1970), p. 217–243.

[31] P.D. Lax – « Hyperbolic systems of conservation laws. II », *Comm. Pure Appl. Math.* **10** (1957), p. 537–566.

[32] P.G. Le Floch – *Hyperbolic systems of conservation laws*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002, The theory of classical and nonclassical shock waves.

[33] T.-P. Liu – *Admissible solutions of hyperbolic conservation laws*, vol. 30, Mem. Amer. Math. Soc., no. 240, American Mathematical Society, 1981.

[34] ———, *Nonlinear stability of shock waves for viscous conservation laws*, vol. 56, Mem. Amer. Math. Soc., no. 328, American Mathematical Society, 1985.

[35] T.-P. Liu & T. Yang – « A new entropy functional for a scalar conservation law », *Comm. Pure Appl. Math.* **52** (1999), no. 11, p. 1427–1442.

[36] ———, « Well-posedness theory for hyperbolic conservation laws », *Comm. Pure Appl. Math.* **52** (1999), no. 12, p. 1553–1586.

[37] ———, « Weak solutions of general systems of hyperbolic conservation laws », *Comm. Math. Phys.* **230** (2002), no. 2, p. 289–327.

[38] N.H. Risebro – « A front-tracking alternative to the random choice method », *Proc. Amer. Math. Soc.* **117** (1993), p. 1125–1139.

[39] F. Rousset – « Viscous approximation of strong shocks of systems of conservation laws », *SIAM J. Math. Anal.* **35** (2003), no. 2, p. 492–519 (electronic).

[40] D. Serre – *Systems of conservation laws. 1, 2*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, Geometric structures, oscillations, and initial-boundary value problems, Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.

[41] A. Szepessy & Z.P. Xin – « Nonlinear stability of viscous shock waves », *Arch. Rational Mech. Anal.* **122** (1993), no. 1, p. 53–103.

[42] A. Szepessy & K. Zumbrun – « Stability of rarefaction waves in viscous media », *Arch. Rational Mech. Anal.* **133** (1996), no. 3, p. 249–298.

[43] A. Vanderbauwhede – « Centre manifolds, normal forms and elementary bifurcations », in *Dynamics reported, Vol. 2*, Dynam. Report. Ser. Dynam. Systems Appl., vol. 2, Wiley, Chichester, 1989, p. 89–169.

[44] S.-H. Yu – « Zero-dissipation limit of solutions with shocks for systems of hyperbolic conservation laws », *Arch. Ration. Mech. Anal.* **146** (1999), no. 4, p. 275–370.

[45] K. Zumbrun – « Multidimensional stability of planar viscous shock waves », in *Advances in the theory of shock waves*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., vol. 47, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2001, p. 307–516.

[46] K. Zumbrun & P. Howard – « Pointwise semigroup methods and stability of viscous shock waves », *Indiana Univ. Math. J.* **47** (1998), no. 3, p. 741–871.

Frédéric ROUSSET

CNRS, Université de Nice
Laboratoire J.A. Dieudonné
UMR 6621 du CNRS
28 avenue Valrose
B.P. 2135
F-06103 Nice Cedex 2
E-mail : `frousset@math.unice.fr`