Astérisque

MICHEL TALAGRAND

Verres de Spin et optimisation combinatoire

Astérisque, tome 266 (2000), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 859, p. 287-317
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1998-1999__41__287_0>

© Société mathématique de France, 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Mars 1999
51ème année, 1998-99, n° 859

VERRES DE SPIN ET OPTIMISATION COMBINATOIRE

par **Michel TALAGRAND**

1. INTRODUCTION

Les verres de spin sont un vaste sujet, touchant aux probabilités, à l'optimisation combinatoire, et bien sûr à la physique. Les physiciens ont sans doute écrit plus de mille pages sur ce sujet, à commencer par le livre de M. Mézard, G. Parisi, M. Virasoro, "Spin Glass Theory and Beyond". Ce livre est remarquable non seulement par le foisonnement des idées qu'il introduit, mais peut-être, pour nous mathématiciens il l'est plus encore par son sujet. Il présente en effet l'étude d'objets motivés par la physique, mais purement mathématiques, et qui sont souvent, comme nous allons le voir, de nature extrêmement simple et canonique. Cette étude repose sur des méthodes de physique théorique, et est de plus exposée dans le langage de cette discipline, ce qui n'en facilite pas particulièrement l'accès pour un mathématicien. Les mathématiciens ont maintenant écrit sans doute plus de cinq cents pages sur le sujet. Il est très frappant toutefois de constater que les questions traitées à grand peine dans ces travaux n'occupent pas plus de quelques pages (d'introduction...) des publications des physiciens.

Le présent texte se voudrait une introduction accessible au sujet. Pour cela, il contiendra peu d'énoncés techniques, voire même peu d'énoncés tout court. Il tentera d'expliquer la nature des objets dont on parle, et quelques problèmes naturels. Il tentera aussi de donner un aperçu de quelques méthodes, des difficultés auxquelles elles font face, et d'expliquer le contexte et la signification des progrès récents sur les mystérieuses formules dites "réplique-symétrique". Il tentera aussi bien sûr d'expliquer la situation hautement paradoxale décrite plus haut. Pour un exposé plus détaillé, on pourra consulter un autre texte d'introduction plus ambitieux [T5], disponible en particulier sur la page personnelle de l'auteur [T6]. On y trouvera des énoncés précis et des indications plus complètes sur certains schémas de preuves.

2. QUELQUES PROBLÈMES FACILES (À POSER)

Le cube discret $\Sigma_N = \{-1,1\}^N \subset \mathbb{R}^N$ sera un objet central de cet exposé.

Étant donné un sous-espace A de $\mathbb{R}^N$, dénotons par Q_A la projection orthogonale sur A, et par $\|.\|$ la norme euclidienne. Considérons la quantité

$$R_A = \frac{1}{\sqrt{N}} \max_{\boldsymbol{\sigma}\in\Sigma_N} \|Q_A(\boldsymbol{\sigma})\| .$$

On observe que $\|\boldsymbol{\sigma}\| = \sqrt{N}$, ce qui justifie le facteur de normalisation $N^{-1/2}$.

Fixons maintenant $M \leq N$. L'ensemble des sous-espaces de $\mathbb{R}^N$ de dimension M est muni d'une probabilité naturelle ; désignons par E_M l'espérance vis-à-vis de cette probabilité. La quantité $Q(N,M) = E_M R_A$ est donc un nombre dépendant seulement de M et N. Dénotant par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, étant donné $0 < \alpha < 1$, on a la question naturelle suivante.

Problème 2.1.— Est-il vrai que la limite

$$\lim_{N\to\infty} Q(N, \lfloor \alpha N \rfloor)$$

existe ?

Cette question est étroitement reliée, tant au niveau philosophique qu'au niveau mathématique, aux problèmes qui seront considérés ultérieurement.

Au niveau philosophique, tout le monde s'accordera sans doute à penser que ne voyant aucune raison pour que cette limite n'existe pas, il serait vraiment surprenant que cela ne soit pas le cas.

On peut imaginer par contre que la plupart des mathématiciens et la plupart des physiciens ne donneront pas la même réponse à la question plus pratique de savoir si l'on doit travailler pour essayer d'éliminer tout à fait la lointaine possibilité que cette limite n'existe pas.

Au niveau mathématique, étant donné $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_N$, on peut considérer la variable aléatoire $X_{\boldsymbol{\sigma}}$ (définie sur l'ensemble des sous-espaces de $\mathbb{R}^N$ de dimension N muni de sa probabilité canonique) donnée par $X_{\boldsymbol{\sigma}}(A) = \|Q_A(\boldsymbol{\sigma})\|$. Le problème serait facile si la famille des variables aléatoires $X_{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_N)$ était indépendante. Cela n'est pas le cas.

Toutefois, pour des raisons de symétrie, la corrélation de $X_{\boldsymbol{\sigma}}$ et $X_{\boldsymbol{\sigma}'}$ ne dépend que de la distance de Hamming de $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\sigma}'$ (c'est-à-dire du nombre de coordonnées où $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\sigma}'$ diffèrent). On est donc en droit d'espérer que, pour $N \to \infty$, un ordre se dégage de cette structure de corrélation assez régulière, ce qui bien sûr renforce

l'espoir d'une réponse positive au problème 2.1. Cette idée d'un ordre émergeant d'une structure de corrélation régulière est sans doute l'un des thèmes centraux du sujet.

Examinons maintenant des questions similaires, plus proches des verres de spins, où les projections orthogonales sont remplacées par des opérateurs définis par des matrices aléatoires. Considérons l'opérateur aléatoire T de $\mathbb{R}^M$ dans $\mathbb{R}^N$, de matrice $(g_i^k)_{i\leq N, k\leq M}$, où les g_i^k sont des variables indépendantes normales standard. La norme de T est bien comprise si $\mathbb{R}^M$ et $\mathbb{R}^N$ sont munis de la structure euclidienne. Mais il n'en est pas de même si $\mathbb{R}^M$ est muni de la norme euclidienne et $\mathbb{R}^N$ de sa norme ℓ^1. La norme d'opérateur $R(M,N)$ de T (beaucoup plus difficile à calculer dans ce nouveau cas) est alors

$$R(M,N) = \sup\Big\{\sum_{i\leq N}\Big|\sum_{k\leq M} g_i^k x_k\Big|; \sum_{k\leq M} x_k^2 = 1\Big\}; \tag{2.1}$$

ou, par dualité

$$R(M,N) = \sup\Big\{\Big(\sum_{k\leq M}\Big|\sum_{i\leq N} g_i^k \sigma_i\Big|^2\Big)^{1/2}; \boldsymbol{\sigma}\in\Sigma_N\Big\}. \tag{2.2}$$

On remarque que ces deux quantités s'expriment comme des sup de variables aléatoires indexées par des ensembles ayant une structure géométrique simple.

Problème 2.2.— Est-il vrai que

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\, ER(\lfloor\alpha N\rfloor, N)$$

existe pour tout $\alpha > 0$?

Ici E désigne bien sûr l'espérance dans les variables (g_i^k).

3. LE MODÈLE SK À TEMPÉRATURE ZÉRO

Ce paragraphe mime l'introduction de [M-P-V].

Considérons une vaste population d'individus, numérotés de 1 à N. Ils se connaissent tous. Les sentiments respectifs des individus $i < j$ sont mesurés par un nombre g_{ij}. (On suppose donc la symétrie : les sentiments de i pour j et de j pour i sont égaux.) On veut modéliser une situation où ces sentiments respectifs sont aléatoires.

On suppose (ce qui représente bien entendu une simplification extrême par rapport à tout modèle réaliste !) que la famille de variables aléatoires (g_{ij}) est indépendante. Puisque l'on cherche à écrire un modèle simple, on supposera que les variables g_{ij} sont gaussiennes standard. Ces variables aléatoires, qui vont jouer un rôle central, seront appelées le désordre, car c'est cela qu'elles modèlent. À cause de l'indépendance, pour beaucoup de triplets i, j, k, i est ami de j et de k $(g_{ij}, g_{ik} > 0)$ mais j et k sont ennemis $(g_{ik} < 0)$, une situation connue sous le nom de frustration. Cela crée bien sûr des tensions. Pour les soulager, essayons de séparer la population en deux groupes, regroupant les amis et séparant les ennemis autant que faire se peut. Pour cela, il est pratique d'assigner à chaque individu i un nombre $\sigma_i \in \{-1, 1\}$. Chaque configuration $\boldsymbol{\sigma}$ de Σ_N définit ainsi naturellement une partition de la population en deux classes. Pour mesurer l'efficacité de cette partition à regrouper les amis et à séparer les ennemis, il est naturel de considérer la quantité

$$A_N(\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{1 \le i < j \le N} g_{ij}\sigma_i\sigma_j \tag{3.1}$$

qui ajoute les interactions de chaque paire d'individus dans le même groupe, mais retranche les interactions des individus dans des groupes différents.

Nous nous intéressons donc à $\max_{\boldsymbol{\sigma}} A_N(\boldsymbol{\sigma})$ et en particulier à son espérance (par rapport au désordre bien sûr). Les variables aléatoires $A_N(\boldsymbol{\sigma})$ sont conjointement gaussiennes, c'est-à-dire forment un processus gaussien. Le problème de la mesure de la "taille" d'un processus gaussien par l'estimation de l'espérance de son sup est un problème important qui a été beaucoup étudié. On sait (au moins en principe) estimer cette quantité en fonction de la covariance du processus [F], [T1]. Ces estimations ne sont hélas précises qu'à une constante multiplicative près, et dans le cas présent nous apprennent seulement que $E\max_{\boldsymbol{\sigma}} A_N(\boldsymbol{\sigma})$ est d'ordre $N^{3/2}$ (ce qui n'est d'ailleurs pas bien difficile). On a donc le problème naturel suivant

Problème 3.1.— Est-il vrai que la limite

$$\lim_{N\to\infty} N^{-3/2} E \max_{\boldsymbol{\sigma}} A_N(\boldsymbol{\sigma})$$

existe ?

A en croire les simulations numériques (portant sur des valeurs de N de l'ordre de 100) c'est bien le cas et cette limite vaut environ 0,7633.

Il est tout à fait intéressant de calculer la covariance du processus (3.1). On a

$$EA_N(\boldsymbol{\sigma})A_N(\boldsymbol{\sigma}') = \sum_{i<j} \sigma_i\sigma_j\sigma'_i\sigma'_j = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i\le N} \sigma_i\sigma'_i\Big)^2 - N, \tag{3.2}$$

une dépendance algébrique simple en $\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}' = \sum_{i \leq N} \sigma_i \sigma_i'$ ce qui bien sûr renforce l'espoir de l'émergence d'un ordre lorsque $N \to \infty$.

Le problème 3.1 est très proche en esprit du problème 2.1. En effet, si l'on désigne par $(\lambda_k)_{k \leq N}$ et $(\boldsymbol{x}_k)_{k \leq N}$ respectivement les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice symétrique (a_{ij}) donnée par $a_{ij} = \frac{1}{2} g_{ij}$ si $i < j, a_{ij} = \frac{1}{2} g_{ji}$, si $i > j$, et $a_{ii} = 0$, alors

$$\sum_{i<j} g_{ij} \sigma_i \sigma_j = \sum_{i,j} a_{ij} \sigma_i \sigma_j = \sum_{k \leq N} \lambda_k (\boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{\sigma})^2$$

et il nous faut donc comprendre $E \max_{\boldsymbol{\sigma}} \sum_{k \leq N} \lambda_k (\boldsymbol{x}_k \cdot \boldsymbol{\sigma})^2$.

La transformation orthogonale aléatoire qui envoie la base canonique $\mathbb{R}^N$ sur les $(\boldsymbol{x}_k)_{k \leq N}$ est indépendante des (λ_k) et uniformément distribuée sur le groupe orthogonal, comme il résulte de l'invariance de la distribution de la matrice (a_{ij}) par changement de base orthonormale. D'autre part (d'après la célèbre "loi du demi cercle") les nombres (λ_k) dépendent peu des (g_{ij}). Le problème 2.1 correspond tout simplement au cas où les λ_k, au lieu, comme ici, de suivre la loi du demi-cercle, ne prendraient que les valeurs 0 et 1, $\lfloor \alpha N \rfloor$ d'entre elles prenant la valeur 1.

4. OPTIMISATION COMBINATOIRE ET MÉCANIQUE STATISTIQUE

Il convient de remplacer la quantité (2.1) par la quantité plus appropriée

$$H_N(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1 \leq i < j \leq N} g_{ij} \sigma_i \sigma_j. \tag{4.1}$$

Le signe moins respecte les conventions de la physique, pour laquelle $H_N(\boldsymbol{\sigma})$ représente l'énergie de la configuration $\boldsymbol{\sigma}$, et qui cherche toujours à minimiser, et non pas maximiser l'énergie. Le facteur $N^{-1/2}$ introduit la normalisation nécessaire pour que $\min_{\boldsymbol{\sigma}} H_N(\boldsymbol{\sigma})$ soit d'ordre N, ce qui sera utile pour la suite. La section 2 s'intéressait au calcul de $\min_{\boldsymbol{\sigma}} H_N(\boldsymbol{\sigma})$, c'est-à-dire (par définition) en termes physiques, à l'énergie de l'état fondamental.

La mécanique statistique propose de remplacer le problème de trouver la plus petite valeur de $H_N(\boldsymbol{\sigma})$ (ce que l'on appelle d'ordinaire un problème d'optimisation combinatoire) par l'étude "des plus petites valeurs" de $H_N(\boldsymbol{\sigma})$, avec une pondération adéquate. Cette pondération utilise un paramètre $\beta \geq 0$ et introduit la mesure de Gibbs G_N, une mesure de probabilité qui donne à $\boldsymbol{\sigma}$ le poids

$$G_N(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{Z_N} \exp(-\beta H_N(\boldsymbol{\sigma})), \tag{4.2}$$

où Z_N est le facteur de normalisation $\sum_{\boldsymbol{\sigma}} \exp(-\beta H_N(\boldsymbol{\sigma}))$. Si l'on fixe N, pour $\beta \to \infty$, la mesure de Gibbs se concentre sur l'état fondamental. On peut donc espérer obtenir de l'information sur l'énergie de cet état si l'on arrive à étudier la mesure de Gibbs pour β grand.

La difficulté de l'étude de la mesure de Gibbs provient du facteur Z_N dans (4.2). Celui-ci est la somme de 2^N termes d'ordre de grandeurs très différents. Beaucoup de ces termes sont ≤ 1 (si $H_N(\boldsymbol{\sigma}) \geq 0$...) ; les plus grands d'entre eux sont d'ordre exponentiel, puisque $\max(-H_N(\boldsymbol{\sigma}))$ est d'ordre N. Il y a peu de grands termes, mais de nombreux petits. La normalisation est choisie de sorte qu'il ne soit nullement évident de quel ordre sont les termes qui contribuent le plus : cela dépend d'ailleurs de la valeur de β.

Nous avons présenté ici la mécanique statistique comme approche à l'optimisation combinatoire ; elle va en effet nous permettre d'aborder nombre de problèmes purement mathématiques faisant intervenir du "désordre" mais n'ayant a priori rien à voir avec l'étude de la matière. Il nous semble que la possibilité d'approcher ces problèmes contribue de façon essentielle à l'attrait du sujet. Mais bien entendu la mécanique statistique présente un intérêt considérable par elle-même ! Si un système physique peut se trouver dans l'une des configurations $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_N$, et qu'il possède une énergie $H_N(\boldsymbol{\sigma})$ dans cette configuration, la mesure de Gibbs (4.2) donne la probabilité que le système en équilibre thermique à température $1/\beta$ se trouve dans la configuration $\boldsymbol{\sigma}$. C'est évidemment la mécanique statistique qui a conduit Sherrington et Kirkpatrick à introduire leur célèbre modèle. Le but de celui-ci est de reproduire au moins le comportement qualificatif de certains alliages qui présentent d'étranges propriétés magnétiques à basse température, les célèbres "verres de spin". Dans un tel alliage, par exemple 5% Fe et 95% Au, seuls les atomes de fer ont des propriétés magnétiques. Du fait de leur grande dilution, la distance d'un atome de fer et de ses plus proches voisins est assez aléatoire. Il en est donc de même de leurs interactions, et l'on pense que c'est le caractère aléatoire de ses interactions qui est la source des comportements étranges observés expérimentalement. Sherrington et Kirkpatrick conservent le caractère aléatoire des interactions, le simplifiant à l'extrême en supposant l'indépendance des interactions pour des paires distinctes. Le modèle ne tient aucun compte de la position des atomes dans l'espace, puisqu'il n'y a pas de notion de "proximité" parmi les individus. C'est là l'approximation du "champ moyen" courante en physique. (Notons en passant que si les modèles à champ moyen sont souvent faciles à étudier, ce n'est pas du tout le cas des modèles désordonnés rencontrés dans cet exposé.) Il existe d'autres modèles pour les verres de spins, qui cette fois tiennent compte des positions

géométriques des individus, que l'on suppose localisés sur un réseau régulier, et où seuls les proches voisins interagissent. Ces modèles, comme on doit s'y attendre, sont encore beaucoup plus difficiles à étudier, à tel point qu'à basse température il ne s'est pas encore dégagé de consensus sur leur comportement probable, même au niveau des simulations numériques. Il est bien sûr extrêmement difficile de dire quoi que ce soit au niveau mathématique (voir cependant [N-S]). Nous ne parlerons pas davantage de ces modèles, qui constituent d'ailleurs un autre sujet.

5. TRAVAUX DES PHYSICIENS

Nous avons expliqué pourquoi ceux-ci se sont intéressés au modèle SK. Celui-ci semblait facile, comme l'indique le titre "a solvable model..." de l'article original. La situation n'était pas aussi simple. Après plusieurs essais une solution a été proposée par G. Parisi. Ses premières présentations faisaient appel à un formalisme, dont la signification demeure particulièrement obscure, dit "méthode des répliques". Il a fallu de nombreux travaux pour éclaircir le sens de ces idées. La solution proposée par Parisi se révèle d'une grande subtilité et est devenue à juste titre célèbre. Les nouveaux concepts auxquels elle mène ont été appliqués avec grand succès à nombre de problèmes, comme cela est décrit avec brio dans [M-P-V].

Du point de vue des physiciens, il semble n'y avoir plus guère de doute que les concepts proposés par Parisi représentent bien le comportement réel du modèle SK, et les plus brillants d'entre eux sont depuis longtemps allés explorer de nouveaux sujets. Les très nombreux travaux encore publiés dans le domaine concernent principalement des variations des principaux modèles, qui sont le plus souvent "résolus" en calculant par optimisation les différents paramètres des solutions proposées par Parisi. Telle est en gros la situation pour les problèmes "à basse température", c'est-à-dire les problèmes difficiles. En ce qui concerne les problèmes "à haute température" (nous donnerons un sens à cela plus tard), on se contente au mieux d'effectuer un rapide calcul par le formalisme des répliques, dans sa version la plus simple dite "réplique-symétrique". Or, en dehors de quelques situations très particulières, ce n'est que tout récemment que ce dernier cas a pu être abordé mathématiquement.

En ce qui concerne les différences de méthodes entre mathématiciens et physiciens, il serait sans doute souhaitable de pouvoir s'en tenir au commentaire suivant le problème 2.1. Cette question a toutefois une telle importance dans ce sujet qu'il semble préférable à l'auteur de discuter ce point avec beaucoup de soin quitte à risquer, sinon son existence, du moins d'être taxé de lourdeur. Tâchons donc d'expliquer la na-

ture de l'approche utilisée par les physiciens dans ce domaine. Ceux-ci n'exigent pas des arguments irréfutables, mais cherchent plutôt (ce qui est beaucoup plus sensé) à comprendre le comportement des objets qu'ils étudient avec un grand degré de certitude. Cette démarche les amène donc à supposer toujours a priori que "tout se passe bien" et à ne pas prêter attention aux pathologies concevables mais peu vraisemblables. Par exemple dans [M-P-V] on rencontre souvent l'argument de "limite thermodynamique" qui consiste essentiellement à supposer que toutes les quantités rencontrées ont des limites quand $N \to \infty$, et qui bien sûr résout facilement les problèmes 2.1 et 2.2. Les physiciens proposent toujours comme solution le comportement le plus naturel. "Le plus naturel" ne signifie absolument pas que cela est facile. Il a évidemment fallu une ingéniosité considérable pour découvrir ce qui nous est proposé dans [M-P-V]. Une fois ce comportement naturel découvert il est soumis à une analyse de cohérence interne heuristique, mais très serrée, puis il est confronté aux simulations numériques. Même si celles-ci sont difficiles à effectuer et ne peuvent pas avoir lieu pour N grand, elles s'efforcent toujours de tester des comportements dont la coïncidence avec les prédictions théoriques ne saurait être le fait du hasard. Lorsque plus personne n'a d'objections à formuler, le consensus est établi que la solution proposée reflète bien la réalité. Les physiciens semblent n'avoir aucun état d'âme à effectuer des calculs qui semblent assez formels, tels que des développements limités sans contrôle des termes d'erreur. Tout cela est justifié a posteriori par ce qui compte vraiment : l'adéquation des prévisions aux simulations numériques.

Les physiciens font de plus appel à une arme redoutable : une intuition foudroyante, qui s'appuie littéralement sur des siècles d'expérience collective. Le piment de la situation est que cette intuition est ici appliquée à des objets mathématiques tels le modèle SK, dont on ne peut pas dire qu'il soit un modèle réaliste de comportement de la matière, et qui est donc assez loin des exemples sur lesquels cette intuition s'est construite. L'une de ces intuitions est qu'à "haute température, un système est toujours dans un état pur" (expression dont le sens sera expliqué plus loin). Cela va de soi pour eux (au même titre que la solution au problème 2.1), et ils pensent donc qu'il s'agit d'une situation très simple. L'ironie du sort a voulu que du point de vue mathématique il semble extrêmement difficile de justifier cette situation "d'état pur".

Afin de mettre en lumière le fait que les physiciens ne font pas des mathématiques (ce qui évidemment n'est pas un reproche !) il est tentant de mettre en exergue la méthode dite des répliques, un formalisme mystérieux faisant intervenir des entiers $n, 0 < n < 1$, des matrices de dimension 0×0, des fonctions d'un nombre négatif de variables, etc. Il faut souligner toutefois que les succès de cette méthode (qui est tout

simplement une forme d'interpolation particulièrement audacieuse) ont semblé tout aussi mystérieux aux physiciens qu'ils ne le semblent à nous-même, et ceux-ci ont, dans plusieurs cas importants "vérifié" les prédictions de cette méthode par une approche plus compréhensible (la méthode dite de la cavité, qui n'est toutefois pas utilisée de façon rigoureuse comme nous le ferons plus loin). Ils se sont ainsi convaincus que la méthode des répliques fournit les bonnes réponses. Comme celle-ci est très puissante, c'est-à-dire propose par des calculs assez simples des expressions compliquées que l'on aurait plus de difficultés à obtenir autrement (même au niveau non rigoureux), ils ne voient donc bien sûr aucune raison de ne pas l'utiliser systématiquement.

6. LE MODÈLE SK : PREMIERS RÉSULTATS

Le modèle SK *n'est pas* notre centre d'intérêt principal. (De quoi est-ce un modèle ?) Il y a toutefois plusieurs raisons d'en faire le fil directeur du début de notre exposé : il est très connu, il est historiquement important, et il est bien plus simple que les autres modèles que nous considérerons plus tard.

Quelles questions faut-il poser ? La caractéristique principale du modèle est naturellement que les interactions, et donc l'hamiltonien H_N sont aléatoires. On doit bien sûr s'intéresser à la structure de G_N pour les réalisations typiques du désordre. Puisque la fonction de partition Z_N est difficile à estimer, on doit aussi s'intéresser à sa valeur. Pour obtenir une quantité d'ordre 1, il est naturel d'étudier plutôt $N^{-1}\log Z_N$. Ceci est une quantité aléatoire. Par bonheur, des principes généraux, et plus particulièrement le phénomène dit "de concentration de la mesure", font que les fluctuations de $N^{-1}\log Z_N$ dues au désordre sont l'ordre au plus $N^{-1/2}$ (au sens très fort d'une inégalité exponentielle) et donc l'essentiel de l'information sur Z_N est contenu dans le nombre

$$p_N = p_N(\beta) = E\frac{1}{N}\log Z_N. \tag{6.1}$$

Dans [A-L-R], on appelle cette quantité "l'énergie libre" (moyenne par site) du système, convention suivie ensuite par l'auteur et par d'autres. Pour un physicien, l'énergie libre F_N est définie par $F_N = (-1/\beta)p_N$. Le facteur $-1/\beta$ n'est pas utile au mathématicien, mais il ne semble pas judicieux d'augmenter à plaisir les difficultés de communication entre mathématiciens et physiciens. Le facteur $1/\beta$ est d'ailleurs nécessaire pour que F_N ait la dimension d'une énergie. On s'efforcera de calculer la limite de F_N quand $N \to \infty$. Si cette limite vaut, disons, a, cela signifie simplement

que pour N grand on a $Z_N \sim \exp(-\beta N a)$. L'énergie libre possède d'ailleurs un autre intérêt, car si on dérive $p_N = -\beta F_N$ par rapport à un paramètre au système (pour l'instant β est le seul paramètre, mais on en ajoutera bientôt d'autres), on voit apparaître Z_N au dénominateur, et des moyennes par rapport à la mesure de Gibbs, qui sont des quantités physiquement mesurables ; par exemple

$$\frac{\partial}{\partial\beta} p_N(\beta) = E\frac{1}{NZ_N}\sum_{\boldsymbol{\sigma}} -H_N(\boldsymbol{\sigma})\exp(-\beta H_N(\boldsymbol{\sigma})) = \frac{1}{N}E\langle -H_N(\boldsymbol{\sigma})\rangle \tag{6.2}$$

est l'espérance de l'opposé de l'énergie moyenne d'une configuration, où l'on a noté par $\langle\cdot\rangle$ la moyenne pour la mesure de Gibbs.

La première remarque à propos de (6.1) est l'utilisation de l'inégalité de Jensen

$$p_N = E\frac{1}{N}\log Z_N \le \frac{1}{N}\log EZ_N = \log 2 + \frac{\beta^2}{4}\frac{(N-1)}{N} \tag{6.3}$$

par un calcul immédiat. Il devrait être évident que cette borne ne peut être du bon ordre pour β grand, le membre de gauche pouvant croître au plus comme β et non comme β^2.

THÉORÈME 6.1 [A-L-R].— *Pour $\beta \le 1$, on a $\lim_{N\to\infty} p_N(\beta) = \log 2 + \beta^2/4$.*

L'article de Aizenmann, Lebowitz, Ruelle, l'un des premiers travaux rigoureux sur le modèle SK, reste très instructif. (Voir aussi [F-Z2] et surtout les profonds résultats de [F-Z1].) Il démontre beaucoup plus que le théorème 6.1, et en particulier un théorème limite central pour p_N (qui présente des fluctuations d'ordre 1). La démonstration repose sur des techniques de physique mathématique un peu lourdes. Une approche beaucoup plus élégante est proposée par Comets et Neveu qui utilisent cette fois les outils du calcul stochastique pour démontrer de nouveaux théorèmes limite centraux, toujours dans le domaine $\beta < 1$. Ce travail remarquable identifie des outils efficaces, mais dont l'utilité ne semble hélas pas s'étendre au-delà de quelques situations très particulières. Une troisième méthode, plus courte mais ne donnant que le théorème 6.1 (et pas les théorèmes limite centraux plus précis) est finalement introduite en [T2, section 12].

La condition $\beta \le 1$ du théorème 6.1 est-elle optimale ? Cela est montré par la borne suivante.

THÉORÈME 6.2. [C] (Voir aussi [K-T-J]).— *Pour $\beta \ge 1$, on a*

$$\limsup_{N\to\infty} p_N \le \log 2 + \beta - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\log\beta.$$

Que se passe-t-il pour $\beta > 1$?

C'est là le domaine des célèbres prédictions de Parisi. Les structures mathématiques remarquables inventées par Parisi sont aujourd'hui mieux comprises, en particulier grâce à des travaux récents de Bolthausen et Sznitman [B-S]. Quant à la question essentielle, c'est-à-dire de savoir si ces structures ont quoi que ce soit à voir avec le modèle SK, nous ne savons pratiquement rien de rigoureux à ce propos.

La situation est donc la suivante : si $\beta < 1$, le modèle est relativement bien compris (quoique bien des questions naturelles restent ouvertes). Si $\beta > 1$, il est au contraire extrêmement difficile. C'est une situation peu propice au progrès.

Revenons sur le cas $\beta < 1$. L'inégalité de Tchébitchef montre que la v.a. positive Z_N ne peut pas être souvent beaucoup plus grande que EZ_N. Il y a donc là une "barrière naturelle" à la taille de Z_N. Le fait que, asymptotiquement, on ait $EN^{-1}\log Z_N \simeq N^{-1}\log EZ_N$ implique que pour chaque $a > 0$, lorsque $N \to \infty$, on a $Z_N \geq 2^{-aN} EZ_N$ avec une probabilité qui tend vers 1. Cela signifie donc, en un sens, que Z_N "est le plus grand possible". Il devrait sembler naturel qu'une telle situation soit bien plus simple que la situation où Z_N est typiquement bien inférieur à EZ_N, car quelle valeur Z_N va-t-il alors "choisir" ? Une fâcheuse coïncidence a voulu que le modèle SK, de loin le plus connu, se trouve à $\beta < 1$ dans cette situation exceptionnelle. Cela n'est pas du tout représentatif des autres situations que nous étudierons, et donne une idée totalement fausse des problèmes "à haute température".

Pour sortir de ce cas très particulier, nous allons introduire un terme supplémentaire dans l'hamiltonien, remplaçant (3.2) par

$$H_N(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{1 \leq i < j \leq N} g_{ij}\sigma_i\sigma_j - h \sum_{i \leq N} \sigma_i. \tag{6.4}$$

Le dernier terme, extrêmement naturel du point de vue physique, représente un "champ magnétique externe", et introduit une préférence des spins +1 par rapport aux spins -1. Dès que $h \neq 0$ (et quel que soit $\beta > 0$) la majoration (6.3) par l'inégalité de Jensen n'est plus efficace. De plus, il semble qu'aucune des méthodes menant au théorème 6.1 ne soit utile. Le cas $h \neq 0, \beta$ petit apparaît donc comme un cas de difficulté intermédiaire entre les situations $h = 0, \beta < 1$ et $h = 0, \beta > 1$.

7. LE MODÈLE SK AVEC CHAMP EXTERNE ; LES FORMULES RÉPLIQUE-SYMÉTRIQUE ; LE THÉORÈME DE PASTUR ET SHCHERBINA

Le modèle SK avec hamiltonien (6.4) dépend maintenant de deux paramètres : β et h. Expliquons brièvement les prédictions de [M-P-V]. Considérons une v.a. g

normale standard, et q $(= q(\beta, h)) \geq 0$ satisfaisant

$$q = E\mathrm{th}^2\beta(g\sqrt{q} + h) \tag{7.1}$$

(le problème de l'existence ou de l'unicité d'un tel nombre ne semble pas abordé dans [M-P-V]) et considérons

$$\theta = \theta(\beta, h) = \beta^2 E \frac{1}{\mathrm{ch}^4\beta(g\sqrt{q} + h)}. \tag{7.2}$$

La région où $\theta < 1$ sera appelée la région "haute température" et la région $\theta > 1$ la région "basse température", qui est le domaine des prédictions de Parisi. Pour $\theta < 1$, la prédiction est que

$$\lim_{N\to\infty} p_N(\beta, h) = \frac{\beta^2}{4}(1-q)^2 + E\log(2\mathrm{ch}\beta(g\sqrt{q} + h)). \tag{7.3}$$

Il faut insister sur le caractère remarquable de cette formule, qui signifie que pour N grand la valeur typique de $N^{-1}\log Z_N$ est donnée par le membre de droite de (7.3), alors que $N^{-1}\log EZ_N$ vaut approximativement $\beta^2/4 + \log(2\mathrm{ch}\, h)$. Les formules (7.1), (7.3) sont appelées les formules "réplique-symétrique" du nom de la méthode (à laquelle nous avons déjà fait allusion) qui a permis de les découvrir, et qui est utilisée maintenant de façon systématique en physique. Devant le caractère mystérieux de cette méthode, Pastur et Shcherbina ont voulu donner une première justification de ces formules. Ils partent pour cela d'une des prédictions les plus remarquables de [M-V-P]. Considérons la v.a. $\overline{q}_N = N^{-1}\sum_{i\leq N}\langle\sigma_i\rangle^2$; alors [M-V-P] prédisent qu'à haute température la variable $\overline{q}_N$ est essentiellement constante ($\mathrm{Var}\,\overline{q}_N = E(\overline{q}_N - E\overline{q}_N)^2 \to 0$) mais que cela est *faux* à basse température, contrairement à l'intuition qu'une certaine "loi des grands nombres" devrait jouer. Remettant à plus tard la question de savoir pour quelles valeurs de β, h, on a bien $\mathrm{Var}\,\overline{q}_N \to 0$, Pastur et Shcherbina ont l'idée de montrer les formules réplique-symétrique sous cette condition. Personne hélas ne sachant faire cela avec l'hamiltonien (6.4), ils utilisent à la place un hamiltonien assez spécial et un peu mystérieux [P-S]. Ce travail est repris plus tard par Shcherbina, qui utilise cette fois l'hamiltonien

$$-\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i<j} g_{ij}\sigma_i\sigma_j - h\sum_{i\leq N}\sigma_i h_i, \tag{7.4}$$

où les h_i sont une nouvelle suite indépendante de v.a. gaussiennes standard. On peut sans doute considérer comme secondaire le fait que la signification physique du

dernier terme de (7.4) ne soit pas aussi claire que celle du dernier terme de (7.5) ; mais au niveau technique la présence de ces nouvelles variables joue un rôle essentiel. Une version de ces résultats existe maintenant [T3, théorème 1.11] pour l'hamiltonien (4.1), en remplaçant $\overline{q}_N$ (qui vaut alors zéro) par $q_N^* = N^{-2}\sum_{i<j}\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^2$.

Ce type de résultat a semble-t-il surtout un intérêt historique, puisque l'on sait maintenant aborder le vrai problème et montrer dans plusieurs situations bien différentes la validité des formules réplique-symétrique. Les trois sections suivantes tentent d'illustrer quelques idées de ces résultats à l'aide d'un schéma de preuve de (7.3) dans le domaine $\beta < \beta_0$, h quelconque.

8. LA MÉTHODE DE LA CAVITÉ ; LA NOTION D'ÉTAT PUR

Pour étudier le système gouverné par (6.3), il est naturel de tenter l'induction sur N, méthode connue en physique sous le nom de la méthode de cavité. (Pour se ramener de $N+1$ à N, on enlève un individu, ce qui crée une cavité...). Posons $N' = N+1$, considérons une nouvelle suite $(g_i)_{i\leq N}$ indépendante de variables gaussiennes standard, qui soit indépendante de la suite $(g_{ij})_{i<j\leq N}$. Pour $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_N, \sigma_{N+1} \in \{-1,1\}$, considérons la quantité

$$H_{N'}(\boldsymbol{\sigma},\sigma_{N+1}) = \sqrt{\frac{N}{N'}}H_N(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{1}{\sqrt{N'}}\sum_{i\leq N} g_i\sigma_i\sigma_{N+1} - h'\sigma_{N+1}, \tag{8.1}$$

où $h = \sqrt{N/N'}h$, et où bien sûr $H_N(\boldsymbol{\sigma})$ est donné par (6.4). Si l'on pose $g_i = g_{iN+1}$, et que l'on identifie $(\boldsymbol{\sigma},\sigma_{N+1})$ à un élément de Σ_{N+1}, on voit que (8.1) correspond exactement au membre de droite de (6.4), au remplacement près de N par $N' = N+1$ et de h par h'. Désignons par $\langle\cdot\rangle$ la moyenne pour la mesure de Gibbs sur Σ_N, à température inverse β, pour l'hamiltonien (6.4), et par $\langle\cdot\rangle'$ la moyenne pour la mesure de Gibbs sur Σ_{N+1}, à température inverse $\beta' = \beta\sqrt{N'/N}$, correspondant à l'hamiltonien (7.1). On a alors des identités du type

$$\langle\sigma_{N+1}\rangle' = \frac{Av\langle\sigma_{N+1}\mathcal{E}\rangle}{Av\langle\mathcal{E}\rangle} \tag{8.2}$$

où

$$\mathcal{E} = \exp\beta\sigma_{N+1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i\leq N} g_i\sigma_i + h'\right),$$

et où Av désigne la moyenne obtenue entre les valeurs de $\sigma_{N+1} = 1$ et $\sigma_{N+1} = -1$. Le point fondamental dans la méthode de la cavité est que dans (8.2) les v.a. g_i sont

indépendantes du désordre intervenant dans $\langle \cdot \rangle$ (c'est-à-dire des variables $(g_{ij})_{i<j\le N}$ ce qui permet de travailler "à (g_{ij}) fixées").

La formule (8.2) montre qu'il serait désirable de savoir calculer $\langle \mathcal{E} \rangle$, ou plus généralement $X = \langle \exp tN^{-1/2} \sum_{i\le N} g_i\sigma_i \rangle$. Essayons d'être optimiste, et de nous guider sur le cas où la mesure de Gibbs serait une mesure produit. Dans ce cas on aurait

$$X \simeq Y_1 = C \exp \frac{t}{\sqrt{N}} \sum_{i\le N} g_i \langle \sigma_i \rangle \tag{8.3}$$

où C est indépendante des g_i. La première réaction est de choisir C de sorte que $E_g X = E_g Y_1$, où E_g dénote intégration en les $(g_i)_{i\le N}$ seulement, mais il s'avère plus fructueux d'oser écrire

$$X \simeq Y = \exp\Big(\frac{t}{\sqrt{N}} \sum_{i\le N} g_i \langle \sigma_i \rangle + \frac{t^2}{2}(1 - \overline{q}_N) \Big) \tag{8.4}$$

où $\overline{q}_N = N^{-1} \sum_{i\le N} \langle \sigma_i \rangle^2$. Pour justifier (8.4), on peut essayer de montrer que $E_g(X - Y)^2$ est petit. On développe donc le carré, et on calcule chacun des termes. Pour calculer $E_g X^2$, on utilise une idée très utile des physiciens, qui consiste à écrire

$$X^2 = \Big\langle \exp \frac{t}{\sqrt{N}} \sum_{i\le N} g_i\sigma_i \Big\rangle^2 = \Big\langle \exp \frac{t}{\sqrt{N}} \sum_{i\le N} g_i(\sigma_i^1 + \sigma_i^2) \Big\rangle \tag{8.5}$$

La dernière intégrale est sur Σ_N^2, munie de $G_N^{\otimes 2}$, et la fonction intégrée est fonction d'un couple $(\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2)$ de configurations. C'est tout simplement la formule $(EA)^2 = EAB$ où B est une copie indépendante de A. Les deux copies de (Σ_N, G_N) (avec le *même* désordre) utilisées dans le membre de droite de (8.5) s'appellent des répliques (= copies), ce qui ne doit pas prêter à confusion avec la "méthode des répliques" qui elle aussi utilise des répliques, mais dont le nombre $n \to 0$. On déduit de (8.5) que

$$E_g X^2 = \Big\langle \exp t^2 \Big(1 + \frac{1}{N} \sum_{i\le N} \sigma_i^1 \sigma_i^2 \Big) \Big\rangle$$

et par un calcul similaire

$$E_g XY = \Big\langle \exp t^2 \Big(1 + \frac{1}{N} \sum_{i\le N} \sigma_i^1 \langle \sigma_i \rangle \Big) \Big\rangle$$

et bien sûr

$$E_g Y^2 = \exp t^2 (1 + \overline{q}_N).$$

On remarque donc que l'on a $E_g(X-Y)^2 \simeq 0$ dès que $\langle (\frac{1}{N}\sum_{i\le N} \sigma_i^1\sigma_i^2 - \overline{q}_N)^2\rangle \simeq 0$ (ce qui implique que $\langle (\frac{1}{N}\sum_{i\le N} \sigma_i\langle\sigma_i\rangle - \overline{q}_N)^2\rangle \simeq 0$ en intégrant en $\boldsymbol{\sigma}^2$ à l'intérieur du carré plutôt qu'à l'extérieur). Cette remarque amène à poser la définition suivante, qui naturellement a du sens dans un cadre bien plus général que celui du modèle SK.

DÉFINITION 8.1.— *On dira qu'un système (à une valeur donnée des paramètres) est dans un* état pur *si l'on a*

$$\lim_{N\to\infty} E\Big\langle \Big(\frac{1}{N}\sum_{i\le N} \sigma_i^1\sigma_i^2 - \overline{q}_N\Big)^2\Big\rangle = 0. \tag{8.6}$$

On voit donc sous cette hypothèse, par le calcul précédent que (3.2) devient

$$\langle\sigma_{N+1}\rangle' \simeq \operatorname{th}\beta\Big(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i\le N} g_i\langle\sigma_i\rangle + h\Big), \tag{8.7}$$

ce qui est bien sûr beaucoup plus satisfaisant.

Il semble naturel de *définir* la phase "haute température" d'un système par la condition (8.6).

Une version de l'idée principale (8.4) de cette section se trouve déjà dans un article très confidentiel de Shcherbina [Sh1]. La différence est toutefois que dans la situation de [Sh1] on sait déjà que $\operatorname{Var}\overline{q}_N \to 0$; alors que l'une des forces de (8.4) est précisément de ne pas supposer cela a priori. Shcherbina déduit (8.4) de la condition $\operatorname{Var}\overline{q}_N \to 0$ par des arguments dont le principe mérite d'être mentionné ici. La fonction $N^{-1}\log Z_N$ est une fonction convexe de h d'ordre 1, et ses fluctuations sont d'ordre $N^{-1/2}$ (concentration de la mesure). Les dérivées en h de cette fonction ont donc (tout au moins pour beaucoup de valeurs de h) des variances d'ordre $o(1)$. Le calcul de ces variances, au moyen d'intégrations par parties en les variables h_i, fournit alors, lorsque $\operatorname{Var}\overline{q}_N \to 0$, les relations nécessaires à la preuve de (8.4).

9. CALCUL DANS UN ÉTAT PUR

Nous repoussons à la section 10 l'examen de la question centrale, c'est-à-dire de savoir quand le système est dans un état pur, et, afin d'illustrer l'utilité de ce concept, poursuivons l'étude du modèle SK (en supposant qu'il se trouve dans un état pur,

et que β est assez petit). On voit à l'examen de (8.7), qu'il serait bien pratique si $\overline{q}_N = N^{-1}\sum_{i\le N}\langle\sigma_i\rangle^2$ était essentiellement indépendante du désordre, c'est-à-dire si $\Delta_N = \operatorname{Var}\overline{q}_N \to 0$. Cela ne résulte pas de (8.6). L'idée naturelle est d'essayer de relier $\Delta_{N+1}(\beta',h')$ et $\Delta_N(\beta,h)$. Nous ne détaillerons pas ce point, mais une fois que l'on a (8.6) et les relations type (8.7), on peut montrer que (si β est assez petit) on a $\Delta_{N+1}(\beta',h') \le A\Delta_N(\beta,h) + o(1)$ ou $A<1$ et $o(1)\to 0$ d'où il s'ensuit par itération que pour un certain $\beta_0>0$ on a

$$\Delta_N(\beta,h) \to 0 \text{ si } \beta \le \beta_o. \tag{9.1}$$

On peut alors renforcer (8.6) en

$$\lim_{N\to\infty} E\Big\langle \Big(\frac{1}{N}\sum_{i\le N}\sigma_i^1\sigma_i^2 - q_N\Big)^2\Big\rangle \to 0 \tag{9.2}$$

où $q_N = q_N(\beta,h) = E\overline{q}_N$. Cette dernière condition exprime "que les recouvrements de deux configurations sont constants", c'est-à-dire que si l'on choisit $\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2$ indépendamment pour la mesure de Gibbs, le "recouvrement" $N^{-1}\sum_{i\le N}\sigma_i^1\sigma_i^2$ de $\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2$ est essentiellement indépendant de $\boldsymbol{\sigma}^1,\boldsymbol{\sigma}^2$, et du désordre. C'est ce qu'expriment certains des diagrammes de [M-P-V], p. 47.

On déduit de (8.7), (9.1) que

$$E(\langle\sigma_{N+1}\rangle'^2) = E\operatorname{th}^2\beta(g\sqrt{q}_N + h) + o(1) \tag{9.3}$$

où g est normale standard. Par symétrie, on a $E(\langle\sigma_{N+1}\rangle')^2 = q_{N+1}(\beta'h')$ et donc (9.3) donne

$$q_{N+1}(\beta',h') \simeq E\operatorname{th}^2\beta(g\sqrt{q_N(\beta,h)} + h)$$

d'où il n'est pas bien difficile de déduire que, pour $\beta\le\beta_0$, on a $q_N(\beta,h)\to q(\beta,h)$ où $q = q(\beta,h)$ vérifie (7.1).

Comment alors calculer l'énergie libre ? La quantité h n'intervient que par le produit $\tilde{h} = \beta h$. Il est pratique de considérer $\beta,\tilde{h}$ comme les nouveaux paramètres. On a alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\beta}(p_N(\beta,\tilde{h})) &= \frac{1}{N}\,E\langle -H_N(\sigma)\rangle\\ &= \frac{1}{N}E\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i<j} g_{ij}\langle\sigma_i\sigma_j\rangle.\end{aligned}$$

On fait appel à la formule d'intégration par parties $E(g\varphi(g)) = E\varphi'(g)$ si g est $N(0,1)$, formule qui se révèle extrêmement utile, et qui donne ici après un petit calcul

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\beta}(p_N(\beta,\tilde{h})) &= \frac{\beta}{N^2}E\sum_{i<j}(1-\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^2)\\ &= \frac{\beta(N-1)}{2N} - \frac{\beta}{N^2}E\sum_{i<j}\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^2.\end{aligned}$$

Or, en faisant intervenir les répliques, $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^2 = \langle\sigma_i^1\sigma_j^1\sigma_i^2\sigma_j^2\rangle$, et donc

$$E\frac{1}{N^2}\sum_{i<j}\langle\sigma_i\sigma_j\rangle^2 = E\frac{1}{2}\Big(\Big\langle\Big(\frac{1}{N}\sum_{i\le N}\sigma_i^1\sigma_i^2\Big)^2\Big\rangle - \frac{1}{N}\Big)$$

et utilisant (9.2) et $q_N \to q$ cela donne

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\partial}{\partial\beta}(p_N(\beta,\tilde{h})) = \frac{\beta}{2}(1-q^2)$$

et, puisque (7.3) est correcte à $\beta = 0$, il suffit alors pour la vérifier de montrer que la dérivée de son membre de droite par rapport à β est $\beta(1-q^2)/2$.

Quelle sera la structure de la mesure de Gibbs ? Le point un peu subtil est que globalement (même dans le cas $h = 0$) G_N est très différente d'une mesure produit (et ceci quoique certaines de ces propriétés globales rappellent les mesures produit, comme le fait que le recouvrement de deux configurations soit essentiellement indépendant de ces configurations), mais que "localement" (c'est-à-dire si l'on ne regarde qu'un nombre fini de spins) elle ressemble à une mesure produit. Pour étudier ce phénomène, retournons vers la relation (8.6). Celle-ci est mal commode à cause du terme $\overline{q}_N$. On la transforme à l'aide de l'idée connue en probabilités sous le nom de symétrisation, pour en déduire (par différence), en considérant maintenant trois répliques $\boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{\sigma}^3$, que

$$\lim_{N\to\infty} E\Big\langle\Big(\frac{1}{N}\sum_{i\le N}(\sigma_i^1-\sigma_i^2)\sigma_i^3\Big)^2\Big\rangle = 0 \tag{9.4}$$

puis que

$$\lim_{N\to\infty} E\Big\langle\Big(\frac{1}{N}\sum_{i\le N}(\sigma_i^1-\sigma_i^2)(\sigma_i^3-\sigma_i^4)\Big)^2\Big\rangle = 0. \tag{9.5}$$

(Il n'est pas difficile en fait de montrer que (8.6), (9.4), (9.5) sont équivalentes.) Si l'on écrit $c_i = (\sigma_i^1 - \sigma_i^2)(\sigma_i^3 - \sigma_i^4)$ et que l'on développe le produit $(\sum_{i\le N} c_i)^2$, on voit par symétrie sur les coordonnées que (9.5) équivaut à $E\langle c_1 c_2\rangle \to 0$, ou encore à $E(\langle\sigma_1\sigma_2\rangle - \langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle)^2 \to 0$, c'est-à-dire au fait que deux spins différents ne sont pas asymtotiquement corrélés pour la mesure de Gibbs. (Le lecteur ne manquera pas d'observer que cette même méthode appliquée à (9.4) est moins intéressante !) En remarquant que $|\sum_{i\le N} c_i| \le 2N$, et donc que d'après (9.4) on a $\lim_{N\to\infty} E\langle(N^{-1}\sum_{i\le N} c_i)^n\rangle \to 0$ pour chaque n, on obtient avec un peu plus de travail la proposition suivante, valable en toute généralité et pas seulement pour le modèle SK.

PROPOSITION 9.1.— *La condition* (8.4) *est équivalente au fait suivant : Pour chaque p, quand $N \to \infty$, la projection $G_{N,p}$ de G_N sur $\{-1,1\}^p$ (c'est-à-dire la loi sous G_N de $\boldsymbol{\sigma} \to (\sigma_1, ..., \sigma_p)$) est asymptotiquement une mesure produit, au sens que l'espérance de sa distance (en quelque sens raisonnable que l'on choisisse) à une mesure produit tend vers zéro.*

Bien sûr $G_{N,p}$ est aléatoire. Comment dépend-elle du désordre ? Une mesure sur $\{-1,1\}$ est déterminée par son barycentre, et donc $G_{N,p}$ est (asymptotiquement) déterminée par $(\langle\sigma_i\rangle)_{i\le p}$. Quelle est la structure de cette suite de v.a. ? Une fois encore, la réponse est en un sens la plus simple possible. En utilisant non pas seulement (8.4) mais aussi (9.2) et le fait que $q_N^{-1} \to q$, et en exprimant les spins $\sigma_1, ..., \sigma_p$ en fonction des autres (par une généralisation de la méthode de la cavité), on obtient par un schéma de preuve qui s'avère très général le résultat suivant, qui donne une bonne compréhension "d'un nombre fini de spins".

PROPOSITION 9.2.— *Pour le modèle SK, si $\beta < \beta_0$, h quelconque, si on fixe p, les variables $(\langle\sigma_i\rangle)_{i\le p}$ sont, lorsque $N \to \infty$, asymptotiquement indépendantes de même loi, et cette loi est celle de* $\operatorname{th}\beta(g\sqrt{q}+h)$ *où g est $N(0,1)$ et où q est donné par* (7.1).

10. MONTRER QUE LE SYSTÈME EST DANS UN ÉTAT PUR ET LE PROBLÈME CENTRAL DE LA HAUTE TEMPÉRATURE

Il existe un argument assez simple [T1, théorème 3.1] montrant que le modèle SK est dans un état pur à haute témperature. Cet argument semble difficile à étendre à d'autres modèles, et nous préférons esquisser une approche plus générale. Intéressons-nous à la quantité $D_N = D_N(\beta, h)$ dont (9.4) considère la limite. On va tenter de relier $D_{N+1} = D_{N+1}(\beta', h')$ à $D_N(\beta, h)$, où l'on utilise les notations de la section 8.

Une bonne façon de commencer le calcul est d'écrire

$$\begin{aligned} D_{N+1} &= E\Big\langle \Big(\frac{1}{N+1}\sum_{i\le N+1}(\sigma_i^1-\sigma_i^2)\sigma_i^3\Big)^2\Big\rangle' \\ &= E\Big\langle (\sigma_{N+1}^1-\sigma_{N+1}^2)\sigma_{N+1}^3\sum_{i\le N+1}(\sigma_i^1-\sigma_i^2)\sigma_i^3\Big\rangle' \end{aligned}$$

en utilisant la symétrie entre les coordonnées, d'où

$$\begin{aligned} D_{N+1} &= \frac{1}{N+1}E\big\langle((\sigma_{N+1}^1-\sigma_{N+1}^2)\sigma_{N+1}^3)^2\big\rangle' \\ &\quad + \frac{N}{N+1}E\big\langle(\sigma_{N+1}^1-\sigma_{N+1}^2)\sigma_{N+1}^3 f\big\rangle' \end{aligned} \tag{10.1}$$

et

$$D_{N+1} \le \frac{4}{N+1} + \frac{N}{N+1}E\big\langle(\sigma_{N+1}^1-\sigma_{N+1}^2)\sigma_{N+1}^3 f\big\rangle' \tag{10.2}$$

où $f = N^{-1}\sum_{i\le N}(\sigma_i^1-\sigma_i^2)\sigma_i^3$. On relie alors $\langle\cdot\rangle'$ à $\langle\cdot\rangle$ dans le dernier terme, comme dans (8.2).

La difficulté consiste à trouver une méthode pour estimer ce terme, qui fait intervenir G_N, sur laquelle on sait très peu de choses. Il n'est malheureusement pas possible de donner des détails sur ce point très technique. On effectue une sorte de développement limité, qui peut se faire avec différents niveaux de précision, mais dans lequel il convient bien sûr de contrôler les termes d'erreur. On peut contrôler ceux-ci, pour $\beta \le 1$, par $L\beta D_{N,2}$, où L est un nombre, et où

$$D_{N,n} = E\Big\langle\Big(\frac{1}{N}\sum_{i\le N}(\sigma_i^1-\sigma_i^2)\sigma_i^3\Big)^{2n}\Big\rangle. \tag{10.3}$$

On a bien sûr $D_{N,n} \le 2^{n-1}D_N$. Si β est petit, le premier objectif étant de montrer à l'aide de (10.2) que

$$D_{N+1} \le \frac{4}{N+1} + BD_N \tag{10.4}$$

ou $B < 1$ (ce qui permet de conclure que $D_N \to 0$ par itération, et même de montrer que ND_N reste borné), ces termes d'erreurs ne seront pas trop génants. Mais, si l'on veut aller plus loin, par exemple calculer $\lim_{N\to\infty} ND_N$, il faut alors montrer

que $D_{N,2} \ll D_N$. Or, il n'est pas évident que c'est le cas, même si $D_N \ll 1$. Il est même possible de montrer que pour certains modèles (et en particulier le modèle à "p spins" que nous considérerons plus tard) il se peut très bien que $D_N \ll 1$ mais que $D_{N,2}$ et D_N soient du même ordre. Cela oblige à contrôler $D_{N,2}$ par induction sur N, et de proche en proche chaque $D_{N,n}$. En suivant cette philosophie, on peut alors (pour β petit) obtenir une description très précise (par exemple calculer chaque $\lim_{N\to\infty} N^r D_{N,r}$) et en fait la précision que l'on peut obtenir ne semble plus limitée que par l'énergie que l'on veut bien y consacrer.

Une approche assez différente des formules (7.1), (7.3) a été proposée par M. Shcherbina [Sh2]. Cette approche ne s'applique qu'à l'hamiltonien (7.4), car elle repose sur les techniques spéciales permises par cet hamiltonien qui ont été évoquées à la fin de la section 8. Shcherbina ne dégage pas la notion d'état pur, mais à la place de D_N utilise la quantité $\Delta_N = \operatorname{Var} \overline{q}_N$. Son but est de montrer que $\lim \Delta_N = 0$, car les formules réplique-symétrique résulteront alors de [Sh1]. L'aspect remarquable du travail de Shcherbina est que celle-ci dégage sans information a priori sur la mesure de Gibbs, une relation compliquée mais *exacte* sur Δ_N dont on peut extraire dans certaines conditions le fait que $\Delta_N \to 0$. Cette information est obtenue par un véritable tour de force, à l'aide de certaines intégrations par parties choisies judicieusement parmi beaucoup de choix possibles. Il serait évidemment très intéressant de comprendre s'il y a là une sorte de coïncidence fortuite ou plutôt l'amorce d'une méthode générale. Il faut également signaler que la méthode de [Sh2] semble incapable d'obtenir des résultats très précis tels par exemple que le calcul de $\lim_{N\to 0} N D_N$.

Comment les physiciens justifient-ils la prédiction que la zone à haute température correspond à $\theta < 1$ (ou θ est donné par (7.2)) ? Si $C_N = E(\langle\sigma_1,\sigma_2\rangle - \langle\sigma_1\rangle\langle\sigma_2\rangle)^2$, ils arrivent, semble-t-il en supposant

$$E\Big\langle\Big(\frac{1}{N}\sum_{i\le N}\sigma_i^1\sigma_i^2 - q\Big)^2\Big\rangle \to 0 \tag{10.5}$$

où q vérifie (7.1), et sans contrôle de certains termes d'erreurs à la relation

$$C_N = \theta C_N + A \tag{10.6}$$

où $A = E(4/\mathrm{ch}^2\beta(g\sqrt{q}+h))$ est positif, et en concluent donc que la condition cherchée est $\theta < 1$. Cet argument paraît plus "solide" dans le cas $\theta > 1$ que dans le cas $\theta < 1$, où il est au plus une vérification du type "consistance interne". Mais dans tous les cas, le problème des termes d'erreur indûment négligés dans (10.6) est crucial, puisque

nous avons vu (dans le cas de $D_{N,2}$ et D_N) que des termes qui semblent "d'ordre supérieur" ne le sont pas nécessairement.

L'argument précédent a néanmoins pu être mis sous forme rigoureuse si $\theta > 1$ dans [T5, Th.3.3] où il est montré que dans ce cas le système manifeste des instabilités frappantes ("des causes microscopiques ayant des effets macroscopiques") qui peuvent s'interpréter comme une violation d'une version forte de (8.5).

Le problème ouvert central semble maintenant de démontrer la validité des formules réplique-symétrique dans toute la zone $\theta < 1$. Cela n'a pas une importance considérable en soi en ce qui concerne le modèle SK. Mais celui-ci est (à haute température) de loin le plus simple des modèles que nous considérerons et il n'y a pas d'espoir de contrôler toute la zone à haute température pour les autres modèles si nous ne savons pas le faire pour SK. Or, pour certains de ces modèles, il y a un enjeu réel à contrôler toute cette zone, qui dans quelques cas pourrait (comme le conjecturent les physiciens) s'étendre jusqu'à la température zéro et permettre ainsi une information précise sur les problèmes d'optimisation combinatoire dont ces modèles sont issus par la démarche de la section 4. La difficulté principale peut se résumer approximativement ainsi. Il semble impossible de contrôler D_N sans contrôler tous les $D_{N,n}$. Tout calcul de $D_{N,n}$ semble nécessiter des termes d'erreur du type $BD_{N,n+1}$ (ou B est indépendant de N et borné inférieurement si β ne s'approche pas de zéro) alors qu'il ne faudrait pas des termes d'erreur plus grands que $(1-\theta)D_{N,n}$ (ce qui peut se comprendre au vu de la situation semblable de (10.6)). Mais si n est d'ordre $N, D_{N,n+1}$ et $D_{N,n}$ doivent être du même ordre (par analogie avec les moments des variables gaussiennes) et donc $BD_{N,n+1}$ est plus grand que $(1-\theta)D_{N,n}$.

11. INTERSECTIONS D'ENSEMBLES ALÉATOIRES

11.1. Généralités

Nous avons acquis sur le modèle SK une philosophie d'attaque : Montrer successivement (8.6) (ou plutôt (9.4)), puis (9.2), et enfin déterminer la limite de q_N. (Un physicien par contre considérera que (10.4) va de soi et n'aura donc pour toute tâche que de déterminer q.) Il est donc temps d'étudier d'autres modèles. Dans cette section, nous considérerons deux problèmes de même structure. Nous aurons une famille $(A_k)_{k\le M}$ aléatoire indépendante équidistribuée de sous-ensembles de Σ_N, et il faudra étudier $\lambda_N(\cap_{k\le M}A_k)$, où λ_N dénote la mesure uniforme de Σ_N. La difficulté sera que M est de l'ordre N, et donc que si $a = E\lambda_N(A_k) < 1$, on a $E\lambda_N(\cap_{k\le M}A_k) = a^M$, ce qui est extrêmement petit et rend donc difficile de déterminer si $\cap_{k\le M}A_k$ est ou non

vide. Le problème est bien sûr que typiquement $\lambda_N(\cap_{k\leq M} A_k)$ est bien plus petit que son espérance. Une difficulté supplémentaire est que $\lambda_N(\cap_{k\leq M} A_k)$ peut en principe dépendre essentiellement de chacun des ensembles A_k. Il est donc naturel d'essayer d'abord un problème plus facile, et de considérer l'hamiltonien

$$H_{N,M}(\boldsymbol{\sigma}) = -\sum_{k\leq M} 1_{A_M}(\boldsymbol{\sigma}) \tag{11.1}$$

qui compte le nombre d'ensembles A_k auxquels appartient $\boldsymbol{\sigma}$. L'hamiltonien (11.1) "favorise" les configurations qui appartiennent à beaucoup d'ensembles A_k. Après introduction d'une température, il permet l'utilisation des idées de la mécanique statistique, et l'on peut, comme en section 4, espérer que le calcul de l'énergie libre à β grand permettra (après un travail supplémentaire) de résoudre le problème initial. On se fixe un nouveau paramètre α, et l'on considère dans la suite le cas où $M = \lfloor \alpha N \rfloor$.

11.2. La capacité du perceptron binaire

Dans ce problème [G2], d'intérêt considérable en théorie des réseaux de neurones, les ensembles A_k sont des demi-espaces à direction aléatoire, à distance fixe de l'origine, c'est-à-dire

$$A_k = \{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_N ; \sum_{i\leq N} \xi_i^k \sigma_i \geq b\sqrt{N}\}$$

où b est un nombre, et où les variables ξ_i^k sont indépendantes et $P(\xi_i^k = \pm 1) = 1/2$. (Ce qui est le modèle naturel de direction aléatoire pour les applications aux réseaux de neurones.) Étant donnés α, β, on va chercher à calculer l'énergie libre correspondant à l'hamiltonien (11.1), suivant le schéma évoqué au début de ce paragraphe. Apparaissent dès l'abord des difficultés qui n'étaient pas présentes dans le cas du modèle SK. Tout d'abord, afin de relier le système à $N+1$ spins au système à N spins, et afin de faire des développements limités, il semble indispensable de remplacer dans (11.1) la quantité $1_{A_k}(\boldsymbol{\sigma})$ par $u(N^{-1}\sum_{i\leq N} \xi_i^k \sigma_i)$ où u est une fonction suffisamment différentiable. Les termes principaux de ces développements limités (c'est-à-dire ceux qui ne tendent pas vers zéro avec N) dépendent de u', u'', mais afin de pouvoir, par un argument limite, retrouver la valeur de l'énergie libre correspondant à l'hamiltonien (11.1), il est indispensable de contrôler les termes d'erreur en fonction seulement de $\sup|u|$ et non de $\sup|u'|, \sup|u''|$. Une autre difficulté qui apparaît, semble-t-il, dans tous les modèles autres que le modèle SK est que, lorsque l'on essaye de calculer D_{N+1} en fonction de D_N, on voit apparaître de nouvelles quantités qui ne semblent pas reliées simplement à D_N, et qui doivent à leur tour être contrôlées. Il est très

utile, suivant une idée de Mézard [M], d'utiliser non seulement l'induction sur N mais également l'induction sur M. L'énergie libre est maintenant rigoureusement connue si $L\alpha \exp L\beta \leq 1$, où L est un nombre [T6].

11.3. Le problème du p-sat

On veut étudier ici un modèle aléatoire d'un célèbre problème d'informatique théorique. On se fixe un entier p, et les ensembles (A_k) sont alors des sous-cubes aléatoires de Σ_N, c'est-à-dire du type

$$\{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_N; \forall \ i \in I, \sigma_i = \eta_i\}, \tag{11.2}$$

où $\operatorname{card} I = p, \eta_i = \pm 1$, tous les choix possibles de I et de η_i' étant équiprobables. Il y a une différence fondamentale entre ce modèle et les autres modèles considérés ici. Il n'y a typiquement qu'un nombre borné indépendamment de N (en probabilité) d'ensembles I_k contenant un individu donné i, où bien sûr I_k correspond à A_k par (11.2). Cela signifie qu'un spin "n'interagit qu'avec un nombre fini d'autres spins" et qu'il ne faut donc plus s'attendre à des effets type théorème limite central qui expliquent l'apparition des variables gaussiennes dans des formules telles que (7.3). Le modèle est alors intrinsèquement compliqué. Les physiciens décrivent cela en disant que le "paramètre du modèle SK est un nombre" (c'est-à-dire q, qui est calculé par (7.1)) mais "que le paramètre du modèle du p-sat est une fonction" (la loi limite de $\langle \sigma_1 \rangle$, qui obéit alors à une équation fonctionnelle compliquée). Il est intéressant que malgré cela le schéma d'approche de 11.1 soit encore approprié. Il faut toutefois inventer une nouvelle méthode pour conduire les calculs. Pour expliquer de façon imagée la difficulté, disons que les termes d'erreur ont une forte tendance, si l'on n'est pas très prudent, à être du type $\sqrt{D_N}$, ce qui conduit à des relations de forme $D_{N+1} \leq A\sqrt{D_N} + o(1)$, lesquelles ne permettent pas de conclure que $D_N \to 0$. Quelle que soit la valeur de α, l'énergie libre est maintenant rigoureusement connue si β est assez petit [T6].

12. LE MODÈLE DE HOPFIELD ; LES TRAVAUX DE BOVIER, GAYRARD, PICCO

Ce modèle est devenu célèbre en tant que modèle de mémoire. Le désordre y est représenté par une suite ξ_i^k définie comme en 11.2, et l'hamiltonien est donné par

$$H_{N,M}(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2N} \sum_{k \leq M} \Big(\sum_{i \leq N} \xi_i^k \sigma_i \Big)^2. \tag{12.1}$$

Une façon de comprendre cette formule est d'observer que le second membre est un bon candidat à être une fonction de $\boldsymbol{\sigma}$ prenant une valeur fortement négative dès que $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\xi}^k = (\xi_i^k)_{i \le N}$, puisque la contribution du terme correspondant est alors $-N/2$. L'idée est que le système "garde en mémoire" chaque configuration $\boldsymbol{\xi}^k$. Celles-ci seront appelées prototypes. Le cas le plus intéressant, le seul qui sera considéré ici, est celui où $M = \lfloor \alpha N \rfloor$, une proportion fixe de N. L'étude du "paysage" d'énergie donnée par (12.1) est alors difficile, pour les raisons exposées avant l'énoncé du problème 3.1. Il est toutefois connu que si $\alpha \le 0,05$, il existe pour N grand un minimum local de $H_{N,M}$ au voisinage (au sens de la distance de Hamming) de chaque prototype [N], et de beaux travaux de D. Loukianova [L] précisent ce résultat. Un problème ouvert particulièrement simple est la conjecture suivante. Si $\alpha = 0,1$, pour N grand, il existe au voisinage de chaque prototype un minimum local, mais le minimum global de H_N est plus profond. La difficulté tient bien sûr au fait que nous savons très mal estimer ce dernier.

La fonction $H_{N,M}(\boldsymbol{\sigma})$ est relativement bien comprise pour α petit. Non seulement elle présente un "puits" au voisinage de chaque prototype, mais son minimum global se trouve dans l'un de ces puits. Par contraste, la situation est beaucoup plus compliquée pour le modèle SK où les simulations numériques indiquent la présence d'un grand nombre de "puits" étroits et profonds, dont la position est très mal comprise. Il est donc naturel de penser a priori que le modèle de Hopfield doit être particulièrement simple à étudier. Il se trouve que ce n'est pas le cas, mais c'est sans doute cela (et son rôle de modèle de mémoire) qui a poussé Bovier et Gayrard (parfois en collaboration avec Picco) à lui consacrer de nombreux travaux. (Voir [B-G] et les références incluses.) Nous ne discuterons que le cas $\beta > 1$ (*basse* température), le plus intéressant. Dans ce cas, la mesure de Gibbs a tendance à se concentrer dans les puits de basse énergie autour des prototypes. Afin d'éviter qu'elle "n'hésite" entre ces puits, il est avantageux de favoriser l'un deux, d'introduire un nouveau paramètre $h > 0$ et de considérer l'hamiltonien

$$H_{N,M}(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2N} \sum_{k \le M} \Big(\sum_{i \le M} \xi_i^k \sigma_i \Big)^2 - h \sum_{i \le N} \xi_i^1 \sigma_i. \tag{12.2}$$

Les auteurs de [B-G], [B-G-P] observent que $H_{N,M}(\boldsymbol{\sigma})$ étant défini en fonction des quantités $m_k(\boldsymbol{\sigma}) = N^{-1} \sum_{i \le N} \xi_i^k \sigma_i$, il est naturel de considérer l'image $\overline{G}_N$ dans $\mathbb{R}^M$ de la mesure de Gibbs par l'application $\boldsymbol{\sigma} \to (m_k(\boldsymbol{\sigma}))_{k \in M}$. Ils montrent alors que si $\alpha \le L^{-1} \min(1, (\beta - 1)^2), \overline{G}_N$ est (avec une probabilité écrasante) essentiellement concentrée sur une petite boule centrée au point $m^* \boldsymbol{e}_1$, où $e_1 = (1, 0, ...)$ et où m^* est

donné par $\operatorname{th}\beta(m^* + h) = m^*$. Leurs résultats sont qualitativement exacts, tant en ce qui concerne les valeurs de α que le rayon de la petite boule, et nécessitent un travail considérable. Il est possible que cette approche, cherchant à obtenir des résultats qualitatifs plutôt que des formules exactes, soit promise à beaucoup d'avenir, car il ne faut pas s'attendre à toujours disposer de formules exactes, et les raisons réelles de l'existence de celles-ci dans les modèles que nous considérons sont à vrai dire quelque peu mystérieuses.

La méthode de la cavité a maintenant permis une compréhension très précise du modèle de Hopfield dans le domaine de paramètre $\beta < 1, \alpha \leq L^{-1}\min(1/\log\beta, (\beta - 1)^2)$. Les arguments reprennent une fois encore l'approche de 11.1, mais nécessitent à nouveau de multiples développements techniques, et sont rendus extrêmement longs par la nécessité de contrôler simultanément de nombreuses quantités. Le travail remarquable de Bovier et Gayrard [B-G], utilisant en particulier un argument géométrique de convexité, et les inégalités de Brascamp-Lieb, permet toutefois de façon plus simple le calcul de l'énergie libre dans le sous-domaine des paramètres $\alpha \leq L^{-1}\min(\beta, (\beta - 1)^2)$.

Il faut souligner que les estimations "a priori" de [B-G-P] sur la "localisation" de $\overline{G}_N$, qui ont été évoquées plus haut, jouent un rôle essentiel dans les arguments de cavité. La méthode de la cavité peut être comparée à une induction : les arguments a priori permettent de l'amorcer. Si l'on préfère une autre analogie (moins superficielle qu'il n'y paraît) on voudrait montrer qu'une certaine application T d'un espace métrique compliqué X dans lui-même possède un unique point fixe. Les estimations a priori montrent qu'il suffit d'étudier un petit sous-ensemble de X, fixé par T. La méthode de la cavité montre que T est une contraction sur ce sous-ensemble (alors qu'elle ne l'est pas partout) et produit le point fixe par itération.

13. LE REM DE DERRIDA

Nous allons maintenant tenter de donner une (toute petite) idée des structures inventées par les physiciens à basse température, et des difficultés formidables auxquelles se heurte l'étude rigoureuse de cette phase. Nous commençons par un modèle très simple, mais très instructif, le "Random Energy Model" (REM) introduit par Derrida. L'idée en est aussi simple qu'efficace. Puisqu'une difficulté essentielle du modèle SK est que les énergies de deux configurations différentes sont corrélées de façon compliquée, considérons donc le modèle où les énergies $H_N(\boldsymbol{\sigma})$ sont des gaussiennes indépendantes, avec $EH_N^2(\boldsymbol{\sigma}) = N$ (pour avoir la bonne normalisation). Cela n'a

bien sûr pas de prétention d'être un modèle réaliste, mais il est remarquablement intéressant. Il n'est pas très difficile de montrer que $\lim_{N\to\infty} p_N$ vaut $\log 2 + \beta^2/2$ si $\beta \le \sqrt{2\log 2}$ et vaut $\beta\sqrt{2\log 2}$ si $\beta \ge \sqrt{2\log 2}$.

Le plus intéressant est toutefois la structure de la mesure de Gibbs lorsque $\beta > \sqrt{2\log 2}$. Expliquons ce qui se passe, sans donner de détails techniques. Puisqu'à $\boldsymbol{\sigma}$ donné, $H_N(\boldsymbol{\sigma})$ est normale centrée de variance N, l'espérance du nombre d'énergies $H_N(\boldsymbol{\sigma})$ qui se trouvent dans un petit intervalle de longueur dx autour de $x - N\sqrt{2\log 2}$ vaut asymptotiquement

$$\frac{2^N dx}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(x - N\sqrt{2\log 2})^2}{2N} \approx \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \exp x\sqrt{2\log 2}.$$

Il y a d'autre part indépendance aux voisinages de deux points différents. Puisque cela ne change rien à la mesure de Gibbs d'ajouter la constante $N\sqrt{2\log 2}$ à chaque énergie, on peut visualiser les plus basses de ces énergies $H_N(\boldsymbol{\sigma})$ comme provenant d'un processus de Poisson ponctuel dont la mesure d'intensité a une densité $(2\pi)^{-1/2} \exp x\sqrt{2\log 2}$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Un calcul simple (changement de variable) montre alors que les plus grands des "poids" $\exp(-\beta H_N(\boldsymbol{\sigma}))$ peuvent asymtotiquement être vus comme réalisation d'un processus de Poisson ponctuel dont la mesure d'intensité a cette fois une densité $(1/\beta\sqrt{2\pi})x^{-m-1}$, où $m = \sqrt{2\log 2}/\beta$.

Cette représentation permet de visualiser très clairement la différence de comportement entre haute température ($\beta < \sqrt{2\log 2}, m > 1$) et basse température ($\beta > \sqrt{2\log 2}, m < 1$). Désignons par $(x_\alpha)_{\alpha\ge 1}$ (où $x_1 \ge x_2 \ge \ldots$) les points produits par une réalisation du processus précédent. A haute température l'intégrale $\int_{0+} x^{-m} dx$ est infinie, et la somme $S = \sum_{\alpha\ge 1} x_\alpha$ est infinie p.s. ce qui signifie que même les plus grands des poids $\exp(-\beta H_N(\boldsymbol{\sigma}))$ sont négligeables devant la somme Z_N de tous ces poids, et donc que la mesure de Gibbs ne charge asymptotiquement aucune configuration. Au contraire à basse température $m < 1$ et S est finie p.s. La mesure de Gibbs charge alors des configurations. Si l'on ordonne celles-ci par ordre décroissant de leurs poids pour cette mesure, la distribution de ces poids converge vers celle de la suite $(x_\alpha/S)_{\alpha\ge 1}$ lorsque $N \to \infty$. Cette dernière distribution (dépendant du seul paramètre m) est tout à fait naturelle en probabilité [P-Y]. Les physiciens prédisent que cette famille de distributions possède un caractère universel dans les problèmes à basse température.

14. LE MODÈLE DES INTERACTIONS À p-SPINS

Ce modèle (également inventé par Derrida) peut être présenté comme une généralisation du modèle SK. Les interactions de chaque paire sont remplacées par les interactions de chaque p-uples, et l'hamiltonien est donné par

$$H_N(\boldsymbol{\sigma}) = -\left(\frac{p!}{2N^{p-1}}\right)^{1/2} \sum g_{i_1 \dots i_p} \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_p}. \tag{14.1}$$

La sommation est effectuée sur tous les choix de $i_1 < \dots < i_p$, et les v.a. $g_{i_1 \dots i_p}$ sont indépendantes gaussiennes standard. Pour $p = 2$, c'est le modèle SK, mais pour $p > 2$ le comportement est très différent. L'idée essentielle de (14.1) est que (par un calcul facile)

$$EH_N(\boldsymbol{\sigma})H_N(\boldsymbol{\sigma}') \simeq \frac{N}{2}\Big(\frac{1}{N}\sum_{i \le N} \sigma_i \sigma_i'\Big)^p$$

et donc que, plus p est grand, moins les énergies de configurations différentes sont corrélées, et donc plus le modèle "approche" le REM de Derrida.

Il existe une valeur critique β_p telle que $\lim_{N\to\infty} p_N(\beta) = \beta^2/4$ si $\beta \le \beta_p$, mais $\limsup_{N\to\infty} p_N(\beta) < \beta^2/4$ si $\beta > \beta_p$. Pour $\beta > \beta_p$ (mais pas trop grand car apparaissent alors des phénomènes compliqués) les physiciens prédisent une situation simple et remarquable : le système se décompose en "états" (il n'est malheureusement semble-t-il jamais donné de définition mathématiquement précise de ce que cela signifie...) et la distribution des poids relatifs de ceux-ci pour la mesure de Gibbs est gouvernée (à la limite) par la distribution décrite en section 14, où le paramètre m dépend bien sûr de β et p. Le caractère remarquable de cette "décomposition en états" est que l'hamiltonien ne semble avantager aucune configuration, et l'on voit mal comment ces états émergent de celui-ci. (Par contraste, l'hamiltonien du modèle de Hopfield avantage clairement les prototypes). Nous proposerons plus tard une interprétation de ce phénomène. La décomposition en états a été partiellement justifiée rigoureusement, mais un énoncé précis nous entraînerait dans une discussion trop longue [T6]. Cette justification utilise une méthode indirecte, qui ne donne pas d'information sur les poids respectifs des "états" pour la mesure de Gibbs. Il semble qu'obtenir des informations rigoureuses sur ceux-ci soit maintenant la clef de progrès ultérieurs sur la phase à basse température. L'une des difficultés est que la valeur du paramètre m prévue par les physiciens n'est pas donnée par une condition simple obtenue par cavité (telle la condition (7.1) qui détermine q) mais au contraire est déduite du principe physique général suivant "si la structure d'un système dépend d'un paramètre, celui-ci prend la valeur qui maximise l'énergie libre". (Il est intéressant de remarquer que la

valeur de q fournie par (7.1) est précisément celle qui minimise le membre de droite de (7.2), comme on doit s'y attendre d'après le principe précédent). Il sera bien évidemment plus difficile de faire apparaître le paramètre m, qui est "déterminé par un principe faible" que s'il était déterminé par une condition plus forte. On peut aussi remarquer que même si l'on savait que, pour chaque N, la distribution des poids des états ressemble à la distribution prévue pour une valeur $m(N)$ du paramètre m, la méthode de la cavité, à cause des petites erreurs qu'elle crée et qui s'accumulent à chaque étape, est intrinsèquement impuissante à démontrer l'existence d'une limite à $m(N)$ lorsque $N \to \infty$.

Pour terminer essayons de décrire (de façon très conjoncturelle) ce qui semble se produire dans le modèle à p spins, par rapport à la situation du REM. Dans ce dernier, la fonction d'énergie $H_N(\boldsymbol{\sigma})$ est "totalement discontinue" et ses plus petites valeurs ont asymptotiquement une distribution que nous avons étudiée. Dans le modèle à p-spins la fonction d'énergie est maintenant "continue" mais elle présente néanmoins des minimums locaux. Les plus petits d'entre eux sont situés sur des configurations essentiellement orthogonales et leurs valeurs, en un certain sens, s'organisent comme dans le cas du REM (et les "états" se forment dans leurs voisinages).

15. CONCLUSION

Ce bref exposé a tenté de donner un aperçu de quelques progrès récents, mais aussi de montrer la variété et le caractère naturel, sinon fondamental, de plusieurs questions sur lesquelles tout ou presque reste à faire, et qui, espérons-le, attireront dans le futur les efforts de nombreux chercheurs.

Il a fallu, faute de place, limiter le sujet à "la statique du champ moyen", et en particulier il n'a pas été possible d'aborder les remarquables travaux récents de Guionnet et Ben Arous sur la "dynamique", qui constitue un sujet relié mais très différent de celui traité ici, et pour lequel le lecteur devra se référer aux articles de ces auteurs [G], [BA-G].

BIBLIOGRAPHIE

[A-L-R] M. AIZENMAN, J.L. LEBOWITZ, D. RUELLE - *Some rigorous results on the Sherrington-Kirkpatrick model*, Commun Math. Phys. **112** (1987), 3-20.

[A-G-S] D.J. AMIT, H. GUTFREUND, H. SOMPOLINSKY - *Statistical Mechanics of Neural Networks near Saturation*, Annals of Physics **173** (1987), 30-67.

[BA-G] G. BEN AROUS, A. GUIONNET - *Langevin spin glass dynamic*, A. Bovier et P. Picco editors, Progress in Probability, vol. **41**, Birkhäuser, Boston (1998).

[B-S] E. BOLTHAUSEN, A.S. SZNITMAN - *On Ruelle's probability casades and an astract cavity method*, Comm. Math. Phys. **197** (1997), 247-276.

[B-G] A. BOVIER, V. GAYRARD - *Hopfield models as generalized random mean field models*, Mathematical aspects of spin glasses and neural networks, A. Bovier and P. Picco editors, Progress in Probability, vol **41**, Birkhäuser, Boston (1997).

[B-G-P] A. BOVIER, V. GAYRARD, P. PICCO - *Gibbs states of the Hopfield model with extensively many patterns*, J. Stat. Phys. **79** (1995), 395-414.

[B-P] A. BOVIER, P. PICCO (editors), - *Mathematical aspects of Spin Glasses and Neural Networks*, Progress in Probability, vol. **41**, Birkhäuser, Boston (1997).

[C] F. COMETS - *A spherical bound for the Sherrington-Kirkpatrick model*, in "Hommage à P.-A. Meyer et J. Neveu", Astérisque **236** (1996), 103-108.

[C-N] F. COMETS, J. NEVEU - *Sherrington-Kirkpatrick model of spin glasses and stochastic calculus : the high temperature case*, Commun Math. Phys. **166** (1995), 549-564.

[D] B. DERRIDA - *Random energy model : An exactly solvable model of disordered systems*, Phy. Rev. B, **24** ♯ 5 (1981), 2613-2626.

[D-G] B. DERRIDA, E. GARDNER - *Optimal storage properties of Neural Network models*, J. Phy. A. **21** (1988), 271-284.

[F-Z1] J. FRÖHLICH, B. ZEGARLINSKI - *The high-temperature phase of long-range spin glasses*, Comm. Math. Phys. **110** (1987), 121-155.

[F-Z2] J. FRÖHLICH, B. ZEGARLINSKI - *Some comments on the Sherrington-Kirkpatrick model of spin glasses*, Comm. Math. Phy. **112** (1987), 553-566.

[F] F. FERNIQUE - *Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes*, École d'été des Probabilités de Saint-Flour IV, Lecture Notes in Math., **480** (1975), 1-96, Springer-Verlag.

[G1] E. GARDNER - *Spin glasses with p-spin interactions*, Nuclear Phys. B **257**, ♯ 6 (1985), 747-765.

[G2] E. GARDNER - *The space of interactions in neural network models*, J. Phys. A. **21** (1988), 257-270.

[G] A. GUIONNET - *Averaged and quenched propagation of chaos for spin glass dynamics*, Probab. Theor. relat. fields **109** (1997), 183-215.

[H] J.J. HOPFIELD - *Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **79** (1982), 1554-2558.

[H-K-P] J. HERTZ, A. KROGH, R.C. PALMER - *Introduction to the theory of Neural computation*, Addison Wesley (1991).

[K-T-J] J.M. KOSTERLITZ, D.J. THOULESS, K.C. JONES - *Spherical model of a Spin-Glass*, Phys. Rev. letters **36** (1976), 1217-1220.

[Lou] D. LOUKIANOVA - *Lower bounds on the restitution error of the Hopfield model*, Probab. Th. Relat. Fields **107** (1997), 161-176.

[M] M. MEZARD - *The space of interactions in neural networks : Gardner's computation with the cavity method*, J. Phys. A. **22** (1988), 2281-2190.

[M-P-V] M. MEZARD, G. PARISI, M. VIRASIRO - *Spin glass theory and beyond*, World Scientific, Singapore (1987).

[M-Z] R. MONASSON, R. ZECCHINA - *Statistical Mechanics of the Random K-Sat Model*, Phys. Rev. E (1997), 1357-1370.

[N] C. NEWMAN - *Memory capacity in neural network models : Rigorous lower bounds*, Neural Networks, **I** (1988), 223-238.

[N-S] C. NEWMAN, D. STEIN - *Thermodynamic chaos and the structure of short-range spin glasses, Mathematical aspects of Spin Glass and Neural networks*, A. Bovier and P. Picco editors, Progress in Probability, vol. **41**, Birkhäuser, Boston (1998), 243-287.

[P-S] L. PASTUR, M. SHCHERBINA - *Absence of Self-Averaging of the order parameter in the Sherrington-Kirkpatrick model*, J. Stat. Phys. **62** (1991), 1-19.

[P-Y] J. PITMAN, M. YOR - *The two-parameter Poisson-Dirichlet distribution derived from a stable subordinator*, Ann. Probab. **25** (1997), 855-900.

[R] D. RUELLE - *A mathematical reformulation of Derrida's REM and GREM*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), 225-239.

[Sh1] M. SHCHERBINA -*More about absence of self averaging of the order parameter in the Sherrington-Kirkpatrick model*, CARR Reports in Mathematical Physics, n° **3/91**, Department of Mathematics, University of Rome "la Sapienza", (1991).

[Sh2] M. SHCHERBINA - *On the Replica-Symmetric Solution for the Sherrington-Kirkpatrick Model*, Helv. Phys. Acta **70** (1997), 838-853.

[S-K] D. SHERRINGTON, S. KIRKPATRICK - *Solvable model of a spin glass*, Phys. Rev. Lett. **35** (1972), 1792-1796.

[T1] M. TALAGRAND - *Regularity of Gaussian processes*, Acta Math. **159** (1987), 99-149.

[T2] M. TALAGRAND - *Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces*, Publ. Math. I.H.E.S. **81** (1995), 73-205.

[T3] M. TALAGRAND - *The Sherrington-Kirkpatrick model: A challenge for mathematicians*, Probab. Theor. Relat. Fields **110** (1998), 109-176.

[T4] M. TALAGRAND - *Rigorous results for the Hopfield model with many patterns*, Probab. Theory Relat. Fields **110** (1998), 177-276.

[T5] M. TALAGRAND - *Huge random structures and mean field models for spin glasses*, Proceedings of the Berlin international congress of mathematicians, Documenta Math. (1998).

[T6] M. TALAGRAND - *La page de Michel Talagrand*, http : // www.proba.jussieu.fr.

Michel TALAGRAND

Université de Paris 6
URA 7064 du CNRS
4 place Jussieu
F–75252 PARIS CEDEX

E–mail : mit@ccr.jussieu.fr