Astérisque

PIERRE CARTIER

La théorie des blocs et les groupes génériques

Astérisque, tome 227 (1995), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 781, p. 171-208

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1993-1994__36__171_0>

Séminaire BOURBAKI Mars 1994
46ème année, 1993-94, n° 781

LA THÉORIE DES BLOCS ET LES GROUPES GÉNÉRIQUES

par **Pierre CARTIER**[1][2]

> Historiquement, ceux de ces groupes qui se sont introduits d'abord sont relatifs au cas où le "corps de base"... est le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes... Mais l'Algèbre moderne entend aborder la question de plus haut... [avec] des méthodes purement algébriques, dégagées de tout recours à l'idée de continuité.
>
> Jean DIEUDONNÉ

INTRODUCTION

L'admonestation ci-dessus est tirée de l'introduction à l'ouvrage "Sur les groupes classiques". Elle n'a pas empêché la théorie des groupes de se développer sur le modèle des groupes de Lie et de bénéficier de l'héritage d'Élie Cartan. Le recours à l'idée de continuité, bien que souvent non explicité, est resté l'un des moteurs, même si les méthodes purement algébriques occupent le devant de la scène.

La première étape du développement a été la construction des groupes généralisant les groupes classiques, et l'étude de leur structure. La notion unificatrice est celle de *groupe algébrique*, introduite par Chevalley et Borel dans les années 50, et développée par ces auteurs en collaboration avec Bruhat, Springer, Steinberg et

(1) Je remercie les membres de l'Équipe des Groupes Finis, qui sont le terreau naturel des recherches décrites ici, et plus particulièrement Anne-Marie Aubert pour sa collaboration efficace à la préparation de cet exposé.
(2) Texte remanié en octobre 1994.

Tits en particulier. On sait que la classification des groupes algébriques simples est le même que celle découverte par Killing et Cartan (vers 1895) dans le cas du corps des nombres complexes.

Grothendieck et Demazure [A7] ont dégagé la notion de *donnée radicielle* qui code de manière combinatoire la structure des *groupes réductifs* (un peu plus généraux que les groupes semi-simples). A une telle donnée radicielle $(X, X^\vee, R, R^\vee)$ est associé un *groupe de Weyl* W. Un tel groupe est un groupe fini de transformations linéaires dans un espace vectoriel euclidien (réel) E de dimension finie qui possède deux propriétés :

— il est engendré par des réflexions s_H par rapport à des hyperplans H ;

— il laisse invariant un réseau X de E.

On peut considérer diverses généralisations de ces groupes de Weyl : par exemple, les groupes finis de transformations linéaires *complexes* engendrés par des *pseudo-réflexions*. Ces groupes ont été classés par Shephard et Todd [C5] ; la plupart des propriétés des groupes de Weyl s'étendent à eux.

La notion de donnée radicielle a subi plusieurs généralisations. Le groupe de Weyl est devenu infini dans certains cas, et le réseau X (un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini) est devenu un module sur $\mathbf{Z}(\sqrt{p})$ (p premier) entre les mains de J.-Y. Hée[1]. Ces généralisations ont été motivées par les développements explosifs de la théorie des groupes de Lie survenus récemment : algèbres de Kač-Moody, et en particulier algèbres de Lie affines, (k-σ)-groupes de Hée, groupes quantiques...

Dans un groupe réductif G, on considère de nombreux types de sous-groupes : tores, tores maximaux, sous-groupes de Levi, sous-groupes de Borel, sous-groupes paraboliques et leurs radicaux unipotents, normalisateurs des tores... Un dictionnaire précis permet de traduire chacune de ces notions dans le cadre des données radicielles. Si le corps de base K n'est pas algébriquement clos, il y a lieu de considérer aussi les *formes tordues* de ces groupes. Supposons K parfait pour simplifier ; notons $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, et Γ le groupe de Galois de $\overline{K}$ sur K. Notons aussi $W(R)$ le groupe de Weyl du système de racines R, et $A(R)$ le groupe des automorphismes de la donnée radicielle $(X, X^\vee, R, R^\vee)$. Les formes tordues sont classifiées par les homomorphismes continus de Γ dans $A(R)/W(R)$.

[1] Voir en particulier J.-Y. Hée, Systèmes de racines sur un anneau commutatif totalement ordonné, *Geom. Dedicata* **37** (1991), 65-102.

Cela s'applique en particulier lorsque K est le corps réel $\mathbf{R}$, un corps p-adique, ou un corps fini.

Arrêtons-nous au cas des corps finis. Considérons d'abord un groupe non tordu (ou "déployé") G sur le corps $\mathbf{F}_q$, correspondant à une donnée radicielle $(X, X^\vee, R, R^\vee)$. Le groupe $G(\mathbf{F}_q)$ des points rationnels (noté aussi G^F) a un ordre qui s'exprime comme un *polynôme en* q ; par exemple, l'ordre de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_q)$ est $q^N \prod_{i=1}^n (q^i - 1)$ où $N = \frac{n(n-1)}{2}$. De manière générale, *ce polynôme en* q *ne dépend que de l'action du groupe de Weyl* $W = W(R)$ *dans l'espace vectoriel complexe* $X_{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} X$. Par exemple, les groupes orthogonaux $SO_{2m+1}(\mathbf{F}_q)$ et symplectiques $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbf{F}_q)$ ont le même ordre car ils correspondent à des groupes de Weyl isomorphes, bien que les données radicielles soient distinctes. Pour l'ordre des groupes tordus, on a une formule analogue, mais où interviennent l'action du groupe de Weyl W dans $X_{\mathbf{C}}$ et l'image Φ dans $A(R)/W$ de l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^q$ de $\overline{\mathbf{F}}_q$ sur $\mathbf{F}_q$ (rappelons que c'est un générateur topologique du groupe de Galois de $\overline{\mathbf{F}}_q$ sur $\mathbf{F}_q$). En fait, $A(R)$ est contenu dans le normalisateur $\widehat{W}$ de W dans $\mathrm{GL}(X_{\mathbf{C}})$ et lui est presque toujours égal (dans le cas d'un groupe semi-simple). Pour couvrir le cas des groupes de Suzuki et Ree, il faut permettre à Φ d'appartenir à $\widehat{W}/W$ et simultanément d'admettre que q est de la forme $p^{m+1/2}$ avec m entier positif, et p égal à 2 ou 3.

Nous renvoyons à notre exposé précédent [B3] pour la description détaillée des caractères irréductibles des groupes réductifs finis de la forme $G(\mathbf{F}_q)$. Retenons simplement que le plus difficile est la détermination des *caractères unipotents.* Ceux-ci s'obtiennent par décomposition des caractères de Deligne-Lusztig $R_{w\phi}^{G^F}$, y compris la série principale obtenue par décomposition de la représentation de permutation naturelle de $G(\mathbf{F}_q)$ sur $G(\mathbf{F}_q)/B(\mathbf{F}_q)$ (on a noté B un sous-groupe de Borel de G). La théorie de l'*induction à la Harish-Chandra* [B6] permet de classer ces caractères unipotents en *familles correspondant aux sous-groupes de Levi* L *dont le centre connexe est un tore déployé.* La description complète des caractères unipotents, de leur répartition en familles, se fait au moyen d'une combinatoire qui ne dépend que de la donnée radicielle $(X, X^\vee, R, R^\vee)$. En fait, comme le montre une coïncidence inattendue entre caractères unipotents des groupes $SO_{2m+1}(\mathbf{F}_q)$ et $\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbf{F}_q)$, pour l'essentiel, *tout ne dépend que du groupe de Weyl* W (accessoirement de l'élément Φ de $\widehat{W}/W$ dans le cas tordu). Ceci s'étend aux degrés de

ces caractères, qui sont des polynômes en q ne dépendant aussi que du groupe de Weyl W. Il en est de même des algèbres de Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(W,q)$ qui interviennent dans l'étude de la décomposition des caractères $R_{w\phi}^{G^F}$.

On est donc conduit à penser à la donnée radicielle $(X, X^\vee, R, R^\vee)$ comme définissant un "*groupe générique*" $\mathbf{G}(x)$ où x est une indéterminée. Il s'agit d'une machine qui, lorsque l'on fournit un corps $\mathbf{F}$ algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et une puissance entière[1] q de p (qui n'intervient que par l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^q$ de $\mathbf{F}$), fabrique par la substitution $x \leftarrow q$ un groupe fini $\mathbf{G}(q)$, ses caractères unipotents, etc.

La constatation la plus étonnante concerne la *théorie des blocs*. Lorsque G est un groupe fini, à tout nombre premier ℓ divisant l'ordre $|G|$ du groupe, on associe une partition en ℓ-blocs des caractères irréductibles de G. L'étude des blocs pour les groupes linéaires $\mathrm{GL}_n(q)$[2] et unitaires $U_n(q^2)$ finis a été entreprise par Fong et Srinivasan [D11] en 1982, puis reformulée par Broué et Puig dans un exposé [D2] du Séminaire Bourbaki. Les progrès ont été ensuite rapides, et l'on connaît aujourd'hui l'essentiel de la répartition en blocs des caractères unipotents pour les groupes réductifs finis (voir [D8] à [D15] et [D19]).

Reprenons l'exemple des groupes $\mathrm{GL}_n(q)$. Le "groupe générique" correspondant $\mathbf{G}(x) = \mathrm{GL}_n(x)$ a pour ordre

$$x^N \prod_{i=1}^{n} (x^i - 1) = x^N \prod_{d|n} \Phi_d(x)^{[\frac{n}{d}]}$$

(qui redonne l'ordre connu de $\mathrm{GL}_n(q)$ par la substitution $x \leftarrow q$). On a noté $\Phi_d(x)$ le polynôme cyclotomique[3] de degré d ; tout comme $\Phi_1(x) = x - 1$, c'est un polynôme irréductible dans $\mathbf{Q}[x]$. La décomposition précédente apparaît donc comme une décomposition en facteurs premiers de l'ordre de $\mathbf{G}(x)$. Soit ℓ un

[1] Dans le cas des groupes de Suzuki et Ree, on a $q = p^{m+1/2}$, et pour définir x^q, il faut disposer d'une puissance $x^{\sqrt{p}}$, c'est-à-dire d'un automorphisme θ de $\mathbf{F}'$ tel que $\theta(\theta(x)) = x^p$. On a noté $\mathbf{F}'$ la réunion des extensions finies de degré impair de $\mathbf{F}_p$. Hée a beaucoup développé ce point de vue (voir la note précédente).

[2] Autre nom du groupe $GL_n(\mathbf{F}_q)$!

[3] On rappelle la définition par récurrence de ces polynômes : $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$.

nombre premier distinct de la caractéristique p, tel que $\ell > n$ (c'est-à-dire ne divisant pas l'ordre $n!$ du groupe de Weyl $W = S_n$), et divisant $|\mathrm{GL}_n(q)|$ pour un q fixé. Il existe un unique polynôme cyclotomique $\Phi_d(x)$ tel que ℓ divise $\Phi_d(q)$. *La répartition des caractères unipotents de* $\mathrm{GL}_n(q)$ *selon les ℓ-blocs ne dépend que du polynôme cyclotomique $\Phi_d(x)$ tel que ℓ divise $\Phi_d(q)$.* Il est donc légitime de parler des *Φ_d-blocs de caractères unipotents.*

Mais la notion de ℓ-bloc dans un groupe fini n'est qu'un des aspects de la théorie locale (voir la première partie) ; cette théorie s'occupe aussi des ℓ-sous-groupes, des sous-groupes de Sylow, des groupes de défaut des blocs. En fait, toute la théorie ℓ-locale du groupe $\mathrm{GL}_n(q)$ ne dépend que du polynôme cyclotomique Φ_d attaché à ℓ (c'est-à-dire de l'ordre d de q dans le groupe cyclique $(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})^\times$). Le fait que les ℓ-sous-groupes de $\mathrm{GL}_n(q)$ soient commutatifs simplifie beaucoup les choses.

Depuis une quinzaine d'années, M. Broué poursuit, avec Ll. Puig et leurs collaborateurs, le développement d'une théorie locale des groupes finis, reformulant les résultats de Brauer. Il a peu à peu dégagé d'ambitieuses conjectures sur les blocs à groupe de défaut abélien : à un ℓ-bloc b est associée une algèbre $B = \mathcal{O}Ge_b$ sur un anneau d'entiers ℓ-adiques $\mathcal{O}$ et l'objet essentiel est la catégorie ${}_B\mathbf{mod}$ des B-modules (à gauche, de type fini), et même mieux la catégorie dérivée bornée $\mathcal{D}^b({}_B\mathbf{mod})$. Une partie importante de la théorie consiste en des équivalences entre de telles catégories dérivées, généralisant l'équivalence de Morita[1] ; Broué [E3,E4] et Rickard ([E13] à [E16]) ont étudié à fond ces aspects.

Par ailleurs, l'induction à la Deligne-Lusztig, utilisant la cohomologie ℓ-adique d'une certaine variété, peut être étendue en un foncteur entre catégories dérivées. Les conjectures générales de Broué suggèrent donc toute une série d'énoncés sur les blocs des caractères unipotents des groupes réductifs finis. Tous ces énoncés ont une version "générique" en termes de combinatoire des données radicielles. Le volume 212 d'Astérisque[2], paru récemment, contient les résultats de Broué, Malle, Michel (et Lusztig) sur les blocs "génériques". De nouvelles algèbres apparaissent : les *algèbres de Hecke cyclotomiques* ; elles jouent par rapport aux groupes

(1) Inventée précisément par Morita pour des problèmes liés à la théorie de Brauer des caractères.

(2) Intitulé "Représentations unipotentes génériques et blocs des groupes réductifs finis".

engendrés par des pseudo-réflexions le rôle joué par les algèbres d'Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(W,q)$ pour les groupes de Weyl. Deux faits frappants :

— La plupart des énoncés gardent un sens pour des groupes qui ne sont plus cristallographiques ; ils ont été testés (souvent avec l'aide d'ordinateurs).

— La spécialisation $q \leftarrow 1$ dans $\mathcal{H}(W,q)$ redonne l'algèbre du groupe de Weyl $\mathbf{Q}W$. Ici, *il faut spécialiser q en une racine de l'unité ζ.*

Il existe donc des objets plus généraux que les groupes génériques, associés aux groupes de pseudo-réflexions et baptisés provisoirement "spetsoïdes" (??). Par ailleurs, la spécialisation $q \leftarrow \zeta$ rappelle les groupes quantiques. A quand et comment la synthèse ?

PREMIÈRE PARTIE :
THÉORIE LOCALE DES GROUPES FINIS

1.1. Résumé de la théorie des caractères

On note G un groupe fini et $|G|$ son ordre. L'*exposant* de G est le plus petit entier $m > 0$ tel que l'on ait $g^m = 1$ pour tout élément g de G. On considère un corps K de caractéristique 0, dans lequel le polynôme $X^m - 1$ se décompose en produit de facteurs linéaires.

Une *représentation linéaire* du groupe G dans un espace vectoriel V, de dimension finie sur K, est un homomorphisme $g \mapsto g_V$ de G dans le groupe $GL(V)$ des automorphismes de V. Introduisons l'*algèbre du groupe* KG, qui a pour base les éléments de G, et dont la multiplication bilinéaire étend celle de G. Il revient au même de considérer les représentations de G, ou les KG-modules (à gauche, de dimension finie sur K). Le *caractère* χ_V d'une représentation linéaire de G dans l'espace V est la fonction $g \mapsto \mathrm{Tr}(g_V)$ sur G. Deux représentations sont isomorphes si et seulement si elles ont même caractère. On note $\mathrm{Irr}_K(G)$ l'ensemble des *caractères irréductibles* de G, c'est-à-dire ceux des représentations irréductibles de G.

On note ZKG le *centre* de l'algèbre KG ; comme espace vectoriel sur K, il admet la base formée des éléments $z_C = \sum_{g \in C} g$ où C parcourt l'ensemble des classes de conjugaison du groupe G. L'algèbre commutative ZKG est *diagonalisable* au sens de Bourbaki, Algèbre 5, page V.28, c'est-à-dire isomorphe à K^h, où

h est le nombre de classes de conjugaison de G.

Pour tout caractère irréductible χ, on pose :

$$e_\chi = \frac{\chi(1)}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) \cdot g. \tag{1}$$

Ces éléments e_χ forment une base de ZKG et satisfont aux propriétés suivantes :

a) on a $e_\chi^2 = e_\chi$, autrement dit, e_χ est *idempotent* ;

b) pour $\chi \neq \chi'$, on a $e_\chi e_{\chi'} = 0$, et donc e_χ et $e_{\chi'}$ sont *orthogonaux* ;

c) on ne peut pas décomposer e_χ en somme de deux idempotents orthogonaux, et donc e_χ est *primitif* ;

d) on a $\Sigma_\chi e_\chi = 1$ (décomposition de l'unité).

Tout élément z de ZKG se développe dans la base précédente sous la forme :

$$z = \sum_\chi u_\chi(z) \cdot e_\chi \ ; \tag{2}$$

l'application $\chi \mapsto u_\chi$ est une bijection de $\mathrm{Irr}_K(G)$ sur l'ensemble des homomorphismes d'algèbres de ZKG dans K. En particulier, on a :

$$u_\chi(z_C) = |C|\, \chi(g)/\chi(1) \tag{3}$$

pour toute classe de conjugaison C, et tout élément g de C. L'application $\chi \mapsto \mathrm{Ker}\,(u_\chi)$ est une bijection de $\mathrm{Irr}_K(G)$ sur le *spectre*[1] $\mathrm{Spec}(ZKG)$ de l'algèbre ZKG.

Pour tout χ dans $\mathrm{Irr}_K(G)$, choisissons une représentation irréductible de G dans un espace V_χ, de caractère χ. L'homomorphisme naturel de KG dans $\mathrm{End}(V_\chi)$ définit un isomorphisme d'algèbres de $KG\,e_\chi$ sur $\mathrm{End}(V_\chi)$. De plus, on a $KG = \bigoplus_\chi KG\,e_\chi$, d'où un isomorphisme d'algèbres de KG avec $\prod_\chi \mathrm{End}(V_\chi)$.

Le *groupe de Grothendieck* $R_K(G)$ est le $\mathbf{Z}$-module libre ayant pour base l'ensemble des caractères irréductibles de G. Ses éléments s'appellent parfois "caractères virtuels", ou simplement "caractères". On le munit du produit scalaire usuel :

$$\langle \chi, \chi' \rangle = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi(g)\, \chi'(g^{-1}) \ ; \tag{4}$$

[1] Le spectre $\mathrm{Spec}(A)$ d'un anneau commutatif A est l'ensemble de ses idéaux premiers.

si V et V' sont deux KG-modules, on a :

$$\langle \chi_V, \chi_{V'} \rangle = \dim_K \mathrm{Hom}_{KG}(V, V'), \tag{5}$$

et en particulier $\mathrm{Irr}_K(G)$ est une base orthonormale de $R_K(G)$. Pour qu'un élément χ de $R_K(G)$ satisfasse à $\langle \chi, \chi \rangle = 1$, il faut et il suffit que χ ou $-\chi$ appartienne à $\mathrm{Irr}_K(G)$.

1.2. Définition des p-blocs

On choisit un anneau de valuation discrète $\mathcal{O}$ ayant K pour corps des fractions, et dont le corps des restes $k = \mathcal{O}/\mathfrak{p}$ est de caractéristique $p > 0$. Voici les deux cas les plus importants :

1) K est le corps cyclotomique $\mathbf{Q}(\zeta)$ avec $\zeta = e^{2\pi i/m}$ (où m est l'exposant de G), A est l'anneau des entiers $\mathbf{Z}[\zeta]$, $\mathcal{O}$ est le localisé de A en un idéal premier contenant le nombre premier p.

2) K est une extension finie du corps p-adique $\mathbf{Q}_p$ et $\mathcal{O}$ est la fermeture intégrale de $\mathbf{Z}_p$ dans K.

Le sous-$\mathcal{O}$-module de KG engendré par G est l'algèbre $\mathcal{O}G$ du groupe G sur $\mathcal{O}$; son centre $Z\mathcal{O}G$ a pour base sur $\mathcal{O}$ la famille des z_C. Comme $Z\mathcal{O}G$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}$, et que $\mathcal{O}$ est intégralement clos, on a $u_\chi(Z\mathcal{O}G) \subset \mathcal{O}$ pour tout caractère irréductible χ. On déduit de là diverses propriétés arithmétiques des caractères irréductibles :

a) *pour tout g dans G, $\chi(g)$ est somme de racines m-ièmes de l'unité et appartient donc à $\mathcal{O}$* ;

b) *si C est la classe de conjugaison d'un élément g de G, $|C|\,\chi(g)/\chi(1)$ appartient à $\mathcal{O}$ d'après la formule* (3) ;

c) *le degré $\chi(1)$ du caractère χ divise l'ordre $|G|$ du groupe G.*

On dispose d'homomorphismes canoniques

$$K \xleftarrow{j} \mathcal{O} \xrightarrow{\varphi} k,$$

où j est l'inclusion et φ la réduction modulo $\mathfrak{p}$. On en déduit des homomorphismes[(1)] :

$$KG \xleftarrow{j} \mathcal{O}G \xrightarrow{\varphi} kG \quad \text{et} \quad ZKG \xleftarrow{j} Z\mathcal{O}G \xrightarrow{\varphi} ZkG.$$

[(1)] Bien entendu, kG désigne l'algèbre du groupe G sur le corps k, et ZkG son centre.

A tout homomorphisme d'anneaux commutatifs $u : A \to B$ est associée une application $\mathfrak{q} \mapsto u^{-1}(\mathfrak{q})$ de $\mathrm{Spec}(B)$ dans $\mathrm{Spec}(A)$. De ce qui précède, on déduit une *application de* $\mathrm{Spec}(ZKG) \amalg \mathrm{Spec}(ZkG)$ *dans* $\mathrm{Spec}(Z\mathcal{O}G)$,dont on prouve que *c'est une bijection.* De manière plus précise, appelons *bloc* (ou p-bloc) un idéal premier b de ZkG ; ces blocs correspondent bijectivement aux homomorphismes de k-algèbres $u_b : ZkG \to k$ par $b = \mathrm{Ker}\, u_b$. On énumère alors les idéaux premiers de $Z\mathcal{O}G$ sous la forme :

$$\mathfrak{p}_\chi = \mathrm{Ker}\,(u_\chi \circ j) \quad , \quad \mathfrak{m}_b = \mathrm{Ker}\,(u_b \circ \varphi)$$

pour χ parcourant $\mathrm{Irr}_K(G)$ et b parcourant le spectre de ZkG. Les idéaux premiers $\mathfrak{p}_\chi$ sont minimaux et les $\mathfrak{m}_b$ maximaux. Si χ est un caractère irréductible, $\mathfrak{p}_\chi$ est contenu dans un unique idéal $\mathfrak{m}_b$ caractérisé par $u_b = \varphi \circ u_\chi$, et l'on dit que χ *appartient au bloc* b ; on définit ainsi une partition de $\mathrm{Irr}_K(G)$ en blocs $\mathrm{Irr}_K(G, b)$. De la relation (3), on déduit le critère suivant : *deux caractères* χ *et* χ' *appartiennent au même bloc si et seulement si les éléments* $|C|\chi(g)/\chi(1)$ *et* $|C|\chi'(g)/\chi'(1)$ *de* $\mathcal{O}$ *sont congrus modulo* $\mathfrak{p}$ *pour toute classe de conjugaison* C *et tout élément* g *de* C.

Pour indexer de manière canonique les caractères, il faut raisonner dans le corps $K_m = \mathbf{Q}(e^{2\pi i/m})$. D'après nos hypothèses, il existe un isomorphisme θ de K_m sur un sous-corps de K ; l'application $\chi \mapsto \theta \circ \chi$ est alors une bijection $\widehat{\theta}$ de $\mathrm{Irr}_{K_m}(G)$ sur $\mathrm{Irr}_K(G)$. Un argument simple de théorie de Galois montre qu'il existe une décomposition en blocs de $\mathrm{Irr}_{K_m}(G)$, *ne dépendant que de* p, et que $\widehat{\theta}$ transporte en la décomposition en blocs décrite pour $\mathrm{Irr}_K(G)$.

Les idempotents de ZKG correspondent aux parties S de $\mathrm{Irr}_K(G)$ par la formule $e_S = \sum_{\chi \in S} e_\chi$. Les idempotents de $Z\mathcal{O}G$ sont les e_S appartenant à $Z\mathcal{O}G$, c'est-à-dire dont les coordonnées dans la base des z_C appartiennent à $\mathcal{O}$. En particulier, pour chaque bloc b, la somme e_b des e_χ, pour χ parcourant $\mathrm{Irr}_K(G, b)$, est un idempotent primitif de $Z\mathcal{O}G$; ces idempotents sont deux à deux orthogonaux, de somme 1, et tout idempotent de $Z\mathcal{O}G$ est somme de certains des e_b.

La décomposition de l'unité $1 = \sum_b e_b$ correspond à des décompositions d'anneaux en produit direct

$$Z\mathcal{O}G = \bigoplus_b Z\mathcal{O}G\, e_b \quad , \quad \mathcal{O}G = \bigoplus_b \mathcal{O}G\, e_b.$$

Si M est un $\mathcal{O}G$-module, on a $M = \bigoplus_b e_b M$; on dit que M appartient au bloc b si l'on a $e_b M = M$. La catégorie des $\mathcal{O}G$-modules se décompose ainsi en produit de catégories correspondant aux divers blocs.

1.3. Représentations en caractéristique p et matrice de décomposition

Nous étudions maintenant les représentations de G sur le corps k de caractéristique p, c'est-à-dire les kG-modules (de dimension finie sur k). Notons $\overline{e}_b$ la réduction modulo $\mathfrak{p}$ de l'idempotent e_b de $Z\mathcal{O}G$ associé au bloc b. On prouve que les $\overline{e}_b$ sont des idempotents primitifs de ZkG, deux à deux orthogonaux, de somme 1. Par suite, on a des décompositions en blocs des anneaux ZkG et kG et de la catégorie des kG-modules. Cependant, les $\overline{e}_b$ ne forment pas une base de ZkG sur k.

Notons $\mathrm{Irr}_k(G)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de kG-modules simples, et $R_k(G)$ le $\mathbf{Z}$-module libre de base $\mathrm{Irr}_k(G)$. On note $[S]$ la classe d'isomorphisme d'un kG-module simple S ; si M est un kG-module, on lui associe l'élément $[M] = \sum_{i=1}^{r} [M_{i-1}/M_i]$ de $R_k(G)$, qui ne dépend pas de la suite de Jordan-Hölder choisie $M = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_{r-1} \supset M_r = 0$. Soit S un kG-module simple ; l'*enveloppe projective* P_S de S est un kG-module projectif indécomposable qui possède un kG-homomorphisme non nul dans S ; ces propriétés caractérisent P_S à un isomorphisme près. *L'endomorphisme de Cartan* est l'endomorphisme c de $R_k(G)$ qui applique $[S]$ sur $[P_S]$ pour tout kG-module simple S ; dans la base naturelle de $R_k(G)$, il se traduit par la *matrice de Cartan* $C = (c_{S,T})$ caractérisée par :

$$[P_S] = \sum_T c_{ST}\,[T]. \tag{6}$$

On peut comparer les représentations en caractéristique 0 et en caractéristique p. En effet, soit V un KG-module. Dans V, on peut trouver un réseau[(1)] invariant par G ; c'est donc un $\mathcal{O}G$-module M et $M/\mathfrak{p}M$ est un kG-module. L'élément $[M/\mathfrak{p}M]$ de $R_k(G)$ ne dépend que de V et non de M ; l'*homomorphisme de décomposition* $d : R_K(G) \to R_k(G)$ transforme χ_V en $[M/\mathfrak{p}M]$ et il correspond à

(1) Autrement dit, un $\mathcal{O}$-module de la forme $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{O}e_i$ où $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de V sur K.

une *matrice de décomposition* $(d_{\chi,S})$ par

$$d(\chi) = \sum_S d_{\chi,S}[S] \tag{7}$$

pour χ dans $\mathrm{Irr}_K(G)$.

Il est important de connaître la matrice de décomposition associée au nombre premier p ; voir Serre [A18, page 165] pour des exemples. Elle détermine la matrice de Cartan par la formule :

$$c_{S,T} = \sum_\chi d_{\chi,S}\, d_{\chi,T}. \tag{8}$$

Elle détermine aussi la décomposition en blocs. Un kG-module simple S appartient à un bloc b unique caractérisé par la relation $\overline{e}_b S = S$. On définit ainsi une partition de $\mathrm{Irr}_k(G)$ en blocs $\mathrm{Irr}_k(G,b)$. Introduisons un graphe Γ ayant $\mathrm{Irr}_K(G) \amalg \mathrm{Irr}_k(G)$ comme ensemble de sommets et une arête pour chaque couple (χ, S) tel que $d_{\chi,S} \neq 0$. Alors les composantes connexes de Γ sont les ensembles $\Gamma_b = \mathrm{Irr}_K(G,b) \amalg \mathrm{Irr}_k(G,b)$ correspondant aux blocs b.

1.4. Caractères projectifs

Soit S un kG-module simple. Le kG-module projectif indécomposable P_S se relève à $\mathcal{O}$; de manière précise, il existe un $\mathcal{O}G$-module projectif indécomposable M_S tel que $M_S/\mathfrak{p}M_S$ soit isomorphe à P_S. À isomorphisme près, M_S ne dépend que de la classe d'isomorphie de S, et tout $\mathcal{O}$-module projectif indécomposable est isomorphe à l'un des M_S. On note Φ_S le caractère du KG-module $K \otimes_{\mathcal{O}} M_S$. La matrice de décomposition reparaît dans les deux formules équivalentes :

$$d_{\chi,S} = \langle \chi, \Phi_S \rangle, \tag{9}$$

$$\Phi_S = \sum_\chi d_{\chi,S}\, \chi \tag{10}$$

(où χ parcourt $\mathrm{Irr}_K(G)$ et S parcourt $\mathrm{Irr}_k(G)$). Quant à la matrice de Cartan, on traduit la formule (8) comme suit :

$$c_{S,T} = \langle \Phi_S, \Phi_T \rangle. \tag{11}$$

On dit qu'un élément de G est *p-régulier* si son ordre n'est pas divisible par p ; on note $G_{p'}$ l'ensemble de ces éléments et les éléments restants de G sont dits *p-singuliers*. Soit S un kG-module simple ; on définit comme suit le *caractère de Brauer* φ_S de S. C'est une fonction sur G à valeurs dans $\mathcal{O}$, nulle sur l'ensemble des éléments p-singuliers ; si g est p-régulier, l'application linéaire $g_S : S \to S$ est diagonalisable et ses valeurs propres $\varpi_1, \cdots, \varpi_r$ sont des racines de l'unité d'ordre non divisible par p. Chacune de ces racines ϖ_j se relève de manière unique en une racine de l'unité ω_j de même ordre dans $\mathcal{O}$, et l'on pose :

$$\varphi_S(g) = \omega_1 + \cdots + \omega_r \tag{12}$$

(*cf.* Serre [A18, page 139]). On a la relation d'orthogonalité :

$$\langle \Phi_S, \varphi_T \rangle = \delta_{ST} \ ; \tag{13}$$

on retrouve la matrice de Cartan par la relation :

$$\Phi_S = \sum_T c_{S,T}\, \varphi_T. \tag{14}$$

Les éléments Φ_S appartiennent à $R_K(G)$ d'après la formule (10), puisque les $d_{\chi,S}$ sont entiers. En général, φ_S n'appartient pas à $R_K(G)$; cependant, si p^e est la plus grande puissance de p divisant $|G|$, $p^e\varphi_S$ appartient à $R_K(G)$ pour tout S.

On dit qu'une fonction $f : G \to K$ est *centrale* si elle est constante sur chaque classe de conjugaison de G ; il revient au même de supposer que l'on a $f(gg') = f(g'g)$ pour g, g' dans G. Ces fonctions forment un espace vectoriel $FC(G)$ sur K, ayant pour base l'ensemble $\mathrm{Irr}_K(G)$ des caractères irréductibles. On note $FC_{p'}(G)$ le sous-espace formé des fonctions centrales nulles en dehors de $G_{p'}$. Alors les deux familles (Φ_S) et (φ_S) (où S parcourt $\mathrm{Irr}_k(G)$) sont des bases de $FC_{p'}(G)$; le cardinal de $\mathrm{Irr}_k(G)$ est donc égal au nombre des classes de conjugaison d'éléments p-réguliers.

Soit χ dans $R_K(G)$; les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *on a* $\chi(g) = 0$ *pour tout élément p-singulier* g ;

(ii) *il existe des entiers* m_S *tels que* $\chi = \sum_S m_S\, \Phi_S$.

Supposons de plus que les entiers m_S soient positifs, c'est-à-dire que χ soit le caractère d'un KG-module V. Alors, on a une troisième condition équivalente :

(iii) *il existe un réseau M dans V, invariant par G, qui soit un $\mathcal{O}G$-module projectif.*

On note $P(G)$ (ou $P_{\mathcal{O}}(G)$) le $\mathbf{Z}$-module ayant pour base les Φ_S ; vu la condition (iii), les éléments de $P(G)$ s'appellent aussi "caractères projectifs".

On note Λ_G le $\mathcal{O}$-module ayant pour base les φ_S. Ses éléments sont les fonctions centrales sur G, à valeurs dans $\mathcal{O}$, et nulles sur l'ensemble des éléments p-singuliers. On note aussi Λ_G^* le $\mathcal{O}$-module ayant pour base les Φ_S ; c'est l'ensemble des fonctions centrales f sur G, nulles sur les éléments p-singuliers et telles que[1] $f(g)/|C_G(g)|$ soit dans $\mathcal{O}$ pour tout g dans $G_{p'}$.

1.5. Groupes de défaut d'un bloc

Soit b un bloc. On appelle *défaut de b* le plus grand des entiers $d \geq 0$ tels que p^d divise les entiers $|G|/\chi(1)$ pour tous les caractères χ du bloc b. Soit $C(b)$ la sous-matrice de la matrice de Cartan $C = (c_{S,T})$ correspondant aux indices S, T dans $\mathrm{Irr}_k(G, b)$. On a alors $p^d = \det C(b)$.

Examinons le cas (trivial) des *blocs b de défaut* 0. Par hypothèse, il existe dans b un caractère χ tel que p ne divise pas l'entier $|G|/\chi(1)$. D'après la formule (1), e_χ appartient alors à $Z\mathcal{O}G$, d'où $e_b = e_\chi$ et $b = \{\chi\}$. Soit V un KG-module simple de caractère χ et soit M un réseau invariant par G dans V. On prouve alors (Serre [A18, page 147]) que M est un $\mathcal{O}G$-module projectif, que $M/\mathfrak{p}M$ est un kG-module simple et projectif, et qu'on a un isomorphisme de $\mathcal{O}$-algèbres de $\mathcal{O}G\,e_\chi$ sur $\mathrm{End}_{\mathcal{O}}M$.

Lorsque p ne divise pas l'ordre de G, *tous les blocs sont de défaut* 0, et contiennent un seul caractère. De plus, la réduction modulo $\mathfrak{p}$ définit une bijection J de $\mathrm{Irr}_K(G)$ sur $\mathrm{Irr}_k(G)$ telle que $\chi = \Phi_{J(\chi)}$ et la matrice de Cartan est la matrice unité. Enfin, l'algèbre $\mathcal{O}G$ est isomorphe à un produit d'algèbres de matrices $M_r(\mathcal{O})$ et l'algèbre $Z\mathcal{O}G$ a pour base sur $\mathcal{O}$ les e_χ. Tous les $\mathcal{O}G$-modules qui sont libres comme $\mathcal{O}$-modules sont donc projectifs.

Soit b un bloc de défaut d ; nous allons définir une classe de conjugaison (sous G) de sous-groupes de G, d'ordre p^d, appelés "*groupes de défaut de b*". Nous aurons besoin pour cela d'une notion de *projectivité relative*. Tous les $\mathcal{O}G$-modules considérés sont libres de type fini comme $\mathcal{O}$-modules. Si H est un sous-groupe de

[1] On note $C_G(g)$ le centralisateur de g dans G.

G, on dit qu'un $\mathcal{O}G$-module est (G,H)-*projectif* s'il est isomorphe à un facteur direct d'un $\mathcal{O}G$-module de la forme $\mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}H} N$, où N est un $\mathcal{O}H$-module (libre de type fini sur $\mathcal{O}$). Bien sûr, tout $\mathcal{O}G$-module est (G,G)-projectif, et $(G,1)$-projectif est synonyme de projectif. Le *critère de Higman* affirme que M *est* (G,H)*-projectif si et seulement s'il existe un* $\mathcal{O}H$*-endomorphisme* u *de* M *tel que* $1_M = \sum_{g\in G/H} g\cdot u\cdot g^{-1}$ (noter que $g\cdot u\cdot g^{-1}$ ne change pas si l'on remplace g par gh, avec h dans H, d'où la sommation sur G/H).

Si M est un $\mathcal{O}G$-module indécomposable, on appelle "*vortex*" de M tout sous-groupe H de G minimal parmi ceux pour lesquels M est (G,H)-projectif. Ces sous-groupes forment une classe de conjugaison de p-sous-groupes de G.

Soit b un bloc. Un *groupe de défaut de* b est un sous-groupe minimal dans l'ensemble des sous-groupes de G qui sont vortex d'un $\mathcal{O}G$-module indécomposable du bloc b (i.e. tel que $e_b M = M$). Ces groupes de défaut ont tous l'ordre p^d et forment une classe de conjugaison de sous-groupes de G.

Par utilisation du critère de Higman, on obtient la caractérisation suivante :

Pour qu'un sous-groupe H *de* G *contienne un sous-groupe de défaut de* b*, il faut et il suffit qu'il existe un élément* u *de* $\mathcal{O}G$*, commutant à* H*, et tel que* $e_b = \sum_{g\in G/H} gug^{-1}$.

1.6. Structure locale sur un bloc [E1,E2,E5]

Nous résumons la théorie d'Alperin-Broué-Puig.

Les trois notions de base sont :

a) *L'homomorphisme de troncation de Brauer.* Soit P un p-sous-groupe de G. On note C son centralisateur dans G et $(kG)^P$ la sous-algèbre de kG formée des éléments commutant à P. L'application Br_P^G de $(kG)^P$ dans kC définie par

$$\mathrm{Br}_P^G\Big(\sum_{g\in G} a(g)\,g\Big) = \sum_{c\in C} a(c)\,c \tag{15}$$

est un homomorphisme d'algèbres.

b) *Sous-paire* : elle est de la forme (P,b) où P est un p-sous-groupe de G, et b un bloc du centralisateur $C_G(P)$ de P dans G.

c) *Domination* : soient (P,b) et (P',b') deux sous-paires telles que $P\subset P'$. On note C le centralisateur de P dans G et C' celui de P'. Soient i un idempotent

primitif dans kC et i' dans kC' ; on dira que i et i' sont *liés* s'il existe un idempotent primitif j de l'algèbre $(kG)^{P'}$ (contenue dans $(kG)^P$) tel que $i = \mathrm{Br}_P^G(j)$ et $i' = \mathrm{Br}_{P'}^G(j)$. On dira que (P', b') *domine* (P, b), et l'on écrira $(P, b) \leq (P', b')$ si chaque fois que i et i' sont liés et que l'on a $i'\overline{e}_{b'} = i'$, on a $i\overline{e}_b = i$. Cette relation détermine b de manière unique en fonction de b', mais non l'inverse.

Soit b un bloc de G. Considérons l'ensemble des sous-paires (P, b_P) dominant $(1, b)$; c'est un ensemble $\mathcal{X}_G(b)$ ordonné par la relation de domination, sur lequel G opère par automorphismes intérieurs. On dira que c'est la *structure locale sur* b. Supposons que b soit le bloc principal $b_0(G)$ de G, contenant le caractère unité ; alors $\mathcal{X}_G(b_0(G))$ se compose des sous-paires $(P, b_{0,P})$ où $b_{0,P}$ est le bloc principal du centralisateur du p-sous-groupe P. Autrement dit, dans le cas du bloc unité $b_0(G)$, la structure locale est isomorphe, comme ensemble ordonné avec action de G, à l'ensemble des p-sous-groupes de G. L'étude de la structure locale des blocs est donc une extension de la théorie de Sylow.

Le *premier théorème principal de Brauer* a été reformulé comme suit :

a) *Le groupe G opère transitivement sur l'ensemble des sous-paires maximales dans $\mathcal{X}_G(b)$.*

b) *Les sous-groupes de défaut de b sont les p-sous-groupes D pour lesquels il existe une sous-paire (D, b_D) maximale dans $\mathcal{X}_G(b)$. En particulier, on a $|D| = p^d$, où d est le défaut de b.*

c) *Fixons une sous-paire maximale (D, b_D) ; notons C le centralisateur de D dans G, et $N = N_G(D, b_D)$ le stabilisateur dans G de l'élément (D, b_D) de $\mathcal{X}_G(b)$. L'idempotent primitif e_{b_D} de $Z\mathcal{O}C$ associé à b_D est un idempotent primitif dans $Z\mathcal{O}N$. Il définit un bloc dans N, qu'on note b_N. Alors (D, b_D) est l'unique sous-paire maximale dans $\mathcal{X}_N(b_N)$. Comme ensemble ordonné avec action de N, $\mathcal{X}_N(b_N)$ est isomorphe à l'ensemble des sous-groupes de D.*

DEUXIÈME PARTIE :
ÉQUIVALENCE DE BLOCS

2.1. Isométries parfaites

On peut mettre en correspondance les caractères de groupes distincts, en utilisant par exemple l'induction et la restriction. Les isométries parfaites de

Broué permettent de conserver la trace des structures locales.

Soient donc G et H deux groupes finis ; on suppose désormais que l'entier m est l'exposant du groupe $G \times H$, et l'on garde les notations $K, \mathcal{O}, \cdots$. On peut identifier les $\mathbf{Z}$-modules $R_K(G \times H)$ et $R_K(G) \otimes_{\mathbf{Z}} R_K(H)$; de plus, le produit scalaire sur $R_K(G)$ et $R_K(H)$ permet d'identifier chacun de ces $\mathbf{Z}$-modules à son dual. Par suite, on a des isomorphismes naturels des $\mathbf{Z}$-modules suivants :

$$R_K(G \times H) \quad , \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R_K(H), R_K(G)) \quad , \quad \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(R_K(G), R_K(H)).$$

De manière explicite, à un élément μ de $R_K(G \times H)$ correspondent deux applications $\mathbf{Z}$-linéaires :

$$I_\mu : R_K(H) \longrightarrow R_K(G) \quad , \quad R_\mu : R_K(G) \longrightarrow R_K(H)$$

caractérisées par les formules :

$$(1) \qquad (I_\mu\, \lambda)(g) = |H|^{-1} \sum_{h \in H} \mu(g, h^{-1})\, \lambda(h)$$

$$(2) \qquad (R_\mu\, \chi)(h) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} \chi(g)\, \mu(g^{-1}, h).$$

Ces deux applications linéaires sont adjointes l'une de l'autre par rapport aux produits scalaires sur $R_K(G)$ et $R_K(H)$. On définit par ailleurs un isomorphisme $\mu \mapsto \mu^*$ de $R_K(G \times H)$ sur $R_K(H \times G)$ par $\mu^*(h, g) = \mu(g, h)$; on a alors $R_\mu = I_{\mu^*}$ et $I_\mu = R_{\mu^*}$. Enfin, on reconstitue μ au moyen des applications I_μ et R_μ :

$$(3) \qquad \mu = \sum_\chi \chi \otimes R_\mu(\chi) = \sum_\lambda I_\mu(\lambda) \otimes \lambda.$$

On dit que μ est *parfait* s'il satisfait aux deux conditions suivantes :

(P_1) *Pour (g, h) dans $G \times H$, les éléments $\mu(g, h)/|C_G(g)|$ et $\mu(g, h)/|C_H(h)|$ appartiennent à $\mathcal{O}$.*

(P_2) *Si $\mu(g, h)$ n'est pas nul, alors g et h sont tous deux p-réguliers, ou tous deux p-singuliers.*

Les formules (1) et (2) gardent un sens lorsqu'on remplace λ et χ par des fonctions centrales sur les groupes correspondants. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes[1] :

(i) le caractère μ de $G \times H$ est parfait ;

(ii) on a $I_\mu(\Lambda_H) \subset \Lambda_G$ et $R_\mu(\Lambda_G) \subset \Lambda_H$;

(iii) on a $I_\mu(\Lambda_H^*) \subset \Lambda_G^*$ et $R_\mu(\Lambda_G^*) \subset \Lambda_H^*$;

(iv) on a $I_\mu(P(H)) \subset P(G)$ et $R_\mu(P(G)) \subset P(H)$.

Les caractères parfaits forment un sous-module de $R_K(G \times H)$. Supposons que μ soit le caractère d'une représentation de $G \times H$ dans un espace vectoriel T sur K ; s'il existe un réseau M dans T, stable pour $G \times H$ et qui soit projectif comme $\mathcal{O}G$-module, et comme $\mathcal{O}H$-module (mais pas nécessairement comme module sur $\mathcal{O}(G \times H)$), alors μ est parfait.

Définissons les *isométries* entre blocs de caractères. Soient $J(G)$ et $J(H)$ des ensembles de caractères irréductibles de G et H respectivement. On suppose que l'idempotent $e = \sum_{\chi \in J(G)} e_\chi$ appartient à $Z\mathcal{O}G$, c'est-à-dire que $J(G)$ est réunion de blocs ; hypothèse analogue pour $f = \sum_{\lambda \in J(H)} e_\lambda$. On note $R_K(G, e)$ le $\mathbf{Z}$-module de base $J(G)$, et $R_K(H, f)$ est défini de manière analogue. Considérons une isométrie I de $R_K(H, f)$ sur $R_K(G, e)$; elle définit une bijection r de $J(H)$ sur $J(G)$ telle que $I(\lambda) = \pm r(\lambda)$. Elle définit aussi un caractère μ dans $R_K(G \times H)$ par

$$\mu = \sum_{\lambda \in J(H)} I(\lambda) \otimes \lambda \tag{4}$$

et l'on a $I = I_\mu$. De plus, R_μ induit l'isométrie inverse de $R_K(G, e)$ sur $R_K(H, f)$.

On dit que l'isométrie I est *parfaite* si μ est un caractère parfait. On montre alors facilement que I *induit une bijection de l'ensemble des blocs contenus dans* $J(H)$ *sur l'ensemble des blocs contenus dans* $J(G)$. *De plus, si deux blocs* b_H *et* b_G *se correspondent ainsi,* I *induit une bijection* (au signe près) *de l'ensemble des caractères de* b_H *sur ceux de* b_G, b_H *et* b_G *ont même défaut, et* I *induit une isométrie entre les* $\mathbf{Z}$*-modules de caractères projectifs des blocs ; ainsi les matrices de Cartan pour* b_H *et* b_G *ont même invariants de similitude.*

[1] Voir le n° 1.4 pour les notations Λ_G, Λ_G^* et $P(G)$; on définit Λ_H, Λ_H^* et $P(H)$ de manière analogue.

Broué définit une notion plus précise d'*isotypie* entre blocs b_H de H et blocs b_G de G. On impose en plus que I induise des isométries parfaites pour les centralisateurs des éléments des groupes de défaut, et que les catégories de Brauer de b_H et b_G soient équivalentes (notion plus faible que l'isomorphie des structures locales $\mathcal{X}_H(b_H)$ et $\mathcal{X}_G(b_G)$).

2.2. Équivalences de Morita

Les isométries introduites au n° 2.1 sont expliquées et précisées au moyen de la *notion d'équivalence de catégories.* On désigne par Λ l'un des anneaux K, $\mathcal{O}$ ou k ; les modules et algèbres considérés sont tous libres et de type fini sur Λ. On dit que la Λ-algèbre A est *symétrique* s'il existe une forme linéaire $t_A : A \to \Lambda$ telle que $t_A(aa') = t_A(a'a)$ et que l'application $a \mapsto a \cdot t_A = (a' \mapsto t_A(a'a))$ soit un isomorphisme de A sur $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$. Dans ces conditions, pour tout A-module M, l'application $\varphi \mapsto t_A \circ \varphi$ est une bijection de $\mathrm{Hom}_A(M, A)$ sur $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda)$. Par exemple, si e est un idempotent du centre de l'algèbre de groupe ΛG, l'algèbre ΛGe est symétrique (poser $t_A(\sum_{g \in G} a(g)g) = a(1)$).

On note ${}_A\mathbf{mod}$ (resp. $\mathbf{mod}_B$, resp. ${}_A\mathbf{mod}_B$) la catégorie des A-modules à gauche (resp. B-modules à droite, resp. (A, B)-bimodules). Remarquons que tout (A, B)-bimodule M définit un foncteur $F \mapsto M \otimes_B F$ de ${}_B\mathbf{mod}$ dans ${}_A\mathbf{mod}$. Par exemple, si H est un sous-groupe de G et $A = \Lambda G$, $B = \Lambda H$, le foncteur d'induction Ind_H^G est défini par le (A, B)-bimodule A (multiplication à gauche par A et à droite par B) ; en considérant de même A comme (B, A)-bimodule, le foncteur $E \mapsto A \otimes_A E$ est le foncteur de restriction Res_H^G des ΛG-modules aux ΛH-modules.

Soit I un foncteur de ${}_B\mathbf{mod}$ dans ${}_A\mathbf{mod}$; si I est une équivalence de catégories, il existe un (A, B)-bimodule M tel que $I(F) = M \otimes_B F$. Réciproquement, supposons que I soit ainsi défini par M ; pour que I soit une équivalence, il faut et il suffit qu'il existe un (B, A)-bimodule N tel que $M \otimes_B N$ soit isomorphe à A dans ${}_A\mathbf{mod}_A$, et que $N \otimes_A M$ soit isomorphe à B dans ${}_B\mathbf{mod}_B$. Alors le foncteur R de ${}_A\mathbf{mod}$ dans ${}_B\mathbf{mod}$ défini par $R(E) = N \otimes_A E$ est un quasi-inverse de I. De plus, M et N sont projectifs comme A-modules et comme B-modules.

Si les Λ-algèbres A et B sont symétriques, on peut donner la construction suivante de N. Considérons un (A, B)-bimodule M qui est projectif comme A-module et comme B-module. Définissons N comme le Λ-module dual de M, et

munissons-le de la structure de (B, A)-bimodule caractérisée par :

$$\langle bna, m\rangle = \langle n, amb\rangle \tag{5}$$

(pour $m \in M$, $n \in N$, $a \in A$, $b \in B$). Il existe alors deux homomorphismes de bimodules :

$$\Phi : M \otimes_B N \longrightarrow A \quad , \quad \Psi : N \otimes_A M \longrightarrow B$$

caractérisés par :

$$t_A(\Phi(m \otimes n)) = t_B(\Psi(n \otimes m)) = \langle n, m\rangle. \tag{6}$$

Pour que le foncteur I défini par $I(F) = M \otimes_B F$ soit une équivalence de ${}_B\mathbf{mod}$ avec ${}_A\mathbf{mod}$, il faut et il suffit que Φ et Ψ soient des isomorphismes.

Nous examinons d'abord le cas $\Lambda = K$, $A = KGe$, $B = KHf$; ici, G et H sont deux groupes finis, e (resp. f) est un idempotent central de KG (resp. KH). Soit V un (A, B)-bimodule ; c'est donc un (KG, KH)-bimodule vérifiant $evf = v$ pour tout $v \in V$. On le transforme en module sur $K(G \times H)$ par la règle $(g, h) \cdot v = g \cdot v \cdot h^{-1}$, et l'on note μ son caractère. Pour que le foncteur $F \mapsto V \otimes_B F$ définisse une équivalence de ${}_B\,\mathbf{mod}$ avec ${}_A\,\mathbf{mod}$, il faut et il suffit que l'application I_μ de $R_K(H, f)$ dans $R_K(G, e)$ soit une isométrie, c'est-à-dire corresponde à une bijection φ de $\mathrm{Irr}_K(H, f)$ sur $\mathrm{Irr}_K(G, e)$.

On suppose maintenant qu'on a $\Lambda = \mathcal{O}$, $e \in Z\mathcal{O}G$ et $f \in Z\mathcal{O}H$; on pose $A = \mathcal{O}Ge$ et $B = \mathcal{O}Hf$. Soit M un (A, B)-bimodule qui est projectif comme A-module, et comme B-module. On pose $V = K \otimes_{\mathcal{O}} M$, considéré comme bimodule sur KGe, KHf. Pour que le foncteur $F \mapsto M \otimes_B F$ de ${}_B\,\mathbf{mod}$ dans ${}_A\,\mathbf{mod}$ soit une équivalence, il faut et il suffit que le foncteur défini par V soit une équivalence de ${}_{KHf}\,\mathbf{mod}$ dans ${}_{KGe}\,\mathbf{mod}$ (*cf.* ci-dessus). Le caractère μ de V est alors parfait au sens du n° 2.1.

Une équivalence de ${}_{\mathcal{O}Hf}\,\mathbf{mod}$ avec ${}_{\mathcal{O}Ge}\,\mathbf{mod}$ définit des équivalences de catégories de ${}_{KHf}\,\mathbf{mod}$ avec ${}_{KGe}\,\mathbf{mod}$, et de ${}_{kHf}\,\mathbf{mod}$ avec ${}_{kGe}\,\mathbf{mod}$. Par suite, on a des bijections de $\mathrm{Irr}_K(H, f)$ sur $\mathrm{Irr}_K(G, e)$ et de $\mathrm{Irr}_k(H, f)$ sur $\mathrm{Irr}_k(G, e)$. De plus, la matrice de décomposition et la matrice de Cartan sont préservées. Bien entendu, on a une isométrie parfaite, avec conservation des blocs, de leur défaut...

Supposons plus particulièrement que l'on ait $e = e_b$, $f = e_c$, où b est un bloc de G et c un bloc de H. Une équivalence de la catégorie ${}_{\mathcal{O}Hf}\mathbf{mod}$ avec la catégorie

$_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{mod}$ s'appelle une *équivalence de Morita* des blocs c et b. Cette notion explique un grand nombre de phénomènes liés aux p-groupes, ou plus généralement aux groupes p-nilpotents et p-résolubles.

2.3. Équivalences dérivées

Dans l'étude des blocs des groupes simples, il faut une notion plus générale, due à Rickard et Broué ; elle repose sur la notion de *catégorie dérivée*, due à Grothendieck et Verdier.

Soit A une Λ-algèbre comme précédemment. La catégorie dérivée bornée $_A\mathbf{deb}$ (notée aussi $\mathcal{D}^b(_A\mathbf{mod})$ se décrit ainsi :

— *objets* : complexes de A-modules $\mathbf{X} = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} X^n$, avec différentielle de degré $+1$, $X^n = 0$ pour n assez grand, $H^n(\mathbf{X}) = 0$ pour $|n|$ assez grand, et chaque composante X^n projective dans $_A\,\mathbf{mod}$.

— *morphismes* : classes d'homotopie de morphismes $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ compatibles à la graduation et à la différentielle.

Un complexe $\mathbf{X}$ est *parfait* s'il est isomorphe, dans la catégorie $_A\mathbf{deb}$, à un complexe $\mathbf{Y}$ tel que $Y^n = 0$ pour $|n|$ assez grand.

Le théorème de Morita sur les équivalences de catégories a été généralisé par Rickard ([E13] à [E16]) au cas des catégories dérivées. On peut introduire la catégorie dérivée $_A\mathbf{deb}_B = \mathcal{D}^b(_A\mathbf{mod}_B)$ par analogie avec ce qui précède ; seul changement : les composantes X^n des complexes sont des (A, B)-bimodules projectifs, donc projectifs comme A-modules, et comme B-modules.

Le produit tensoriel permet d'associer à tout objet $\mathbf{M}$ de $_A\mathbf{deb}_B$ un foncteur $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{M} \otimes_B \mathbf{F}$ de $_B\mathbf{deb}$ dans $_A\mathbf{deb}$. *Pour que* $_A\mathbf{deb}$ *et* $_B\mathbf{deb}$ *soient équivalentes comme catégories triangulées* (au sens de Grothendieck-Verdier), *il faut et il suffit qu'il existe un objet* $\mathbf{M}$ *de* $_A\mathbf{deb}_B$ *et un objet* $\mathbf{N}$ *de* $_B\mathbf{deb}_A$ *tels que l'on ait les isomorphismes* :

$$\mathbf{M} \otimes_B \mathbf{N} \simeq A \text{ dans } {}_A\mathbf{deb}_A$$
$$\mathbf{N} \otimes_A \mathbf{M} \simeq B \text{ dans } {}_B\mathbf{deb}_B.$$

Toute équivalence dérivée, c'est-à-dire toute équivalence entre les catégories dérivées $I : {}_B\mathbf{deb} \to {}_A\mathbf{deb}$ est donnée par un objet $\mathbf{M}$ de $_A\mathbf{deb}_B$, sous la forme $I(\mathbf{F}) = \mathbf{M} \otimes_B \mathbf{F}$.

Revenons au cas des algèbres de groupes $A = \mathcal{O}Ge$ et $B = \mathcal{O}Hf$ comme précédemment. Soit $\mathbf{M}$ un objet de ${}_A\mathbf{deb}_B$. Pour tout entier i, introduisons le (KGe, KHf)-bimodule $K \otimes_{\mathcal{O}} H^i(\mathbf{M})$; on peut le considérer comme un module sur $K(G \times H)$ et il possède un caractère $\mu_i \in R_K(G \times H)$. On pose :

$$\mu = \sum_{i \in \mathbf{Z}} (-1)^i \mu_i \, ; \tag{7}$$

cette définition est légitime car on a $H^i(\mathbf{M}) = 0$ pour $|i|$ assez grand. Dans ces conditions, *si le foncteur* $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{M} \otimes_B \mathbf{F}$ *est une équivalence de* ${}_B\mathbf{deb}$ *avec* ${}_A\mathbf{deb}$, *le caractère* μ *de* $G \times H$ *définit une isométrie parfaite.*

On trouvera dans Broué [E4] de nombreuses variations sur ce thème.

2.4. Une conjecture

La forme la plus générale de la conjecture de Broué est la suivante :

Soient G *un groupe fini,* b *un bloc de* G, *et* (D, b_D) *une sous-paire maximale dominant* $(1, b)$. *Supposons* D *abélien. Introduisons* N *et* b_N *comme dans le premier théorème principal de Brauer. Notons* e *l'idempotent de* $Z\mathcal{O}G$ *associé à* b *et* f *celui de* $Z\mathcal{O}N$ *associé à* b_N. *Alors les catégories dérivées* ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{deb}$ *et* ${}_{\mathcal{O}Nf}\mathbf{deb}$ *sont équivalentes. En particulier, on a une isométrie parfaite entre le bloc* b *de* G *et le bloc* b_N *de* N.

Plus particulièrement, supposons que les p-sous-groupes de Sylow de G soient abéliens, et soit N le normalisateur d'un de ces sous-groupes. Soit $e \in Z\mathcal{O}G$ l'idempotent associé au bloc principal de G et de même $f \in Z\mathcal{O}N$. Alors on devrait avoir une équivalence des catégories dérivées ${}_{\mathcal{O}Ge}\mathbf{deb}$ et ${}_{\mathcal{O}Nf}\mathbf{deb}$, et en particulier une isométrie parfaite des blocs principaux de G et de N.

Une preuve générale apparaît très lointaine. Cependant, on connaît déjà de nombreux cas particuliers :

a) Si D est cyclique, la conjecture est vraie d'après des résultats de Rickard et Linckelmann [E9].

b) Si G est p-résoluble, et D abélien, on a une équivalence (au sens de Morita) des catégories de modules sur $\mathcal{O}Ge$ et sur $\mathcal{O}Nf$. Cela résulte des théorèmes de Dade, Fong et Puig.

c) Si le bloc b est nilpotent au sens de Broué et Puig [E7], on a en tout cas une isotypie entre les blocs b de G et b_N de N.

d) Broué donne dans [E3] un certain nombre d'exemples explicites, dont le bloc principal du groupe $\mathrm{GL}_2(p^n)$.

e) Dans sa thèse [E17], Rouquier démontre l'isotypie des blocs b de G et b_N de N lorsque G est un groupe symétrique ; il élucide aussi le cas du bloc principal des groupes sporadiques.

On étudiera les groupes réductifs finis dans la troisième partie.

TROISIÈME PARTIE :
GROUPES GÉNÉRIQUES

3.1. Rappels sur la structure des groupes réductifs

Soit L un corps. Un *schéma affine en groupes* G est défini par une algèbre commutative $\mathcal{O}(G)$ (sur L) et des homomorphismes d'algèbres

$$\Delta : \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathcal{O}(G) \otimes \mathcal{O}(G) \quad , \quad S : \mathcal{O}(G) \longrightarrow \mathcal{O}(G) \quad , \quad \varepsilon : \mathcal{O}(G) \longrightarrow L$$

satisfaisant à la propriété suivante : si A est une algèbre commutative, l'ensemble $G(A)$ des homomorphismes de $\mathcal{O}(G)$ dans A est un groupe pour la multiplication donnée par[1] $u * v = m_A \circ (u \otimes v) \circ \Delta$, l'inverse de u étant $u \circ S$ et l'unité étant ε (L est plongé dans A).

On fait les hypothèses restrictives suivantes :

a) *le corps L est algébriquement clos* ;

b) *l'algèbre $\mathcal{O}(G)$ a un nombre fini de générateurs* ;

c) *dans $\mathcal{O}(G)$, la relation $f^m = 0$ (pour $m \geq 1$) entraîne $f = 0$.*

On peut se contenter du groupe $G(L)$, noté G par abus, et identifier $\mathcal{O}(G)$ à une algèbre de fonctions sur $G(L)$ à valeurs dans L. On parle alors de *groupe algébrique.*

Exemples : le groupe linéaire GL_n et son sous-groupe SL_n, le groupe additif G_a, le groupe multiplicatif G_m (ou tore à une dimension).

Avec nos conventions, tout groupe algébrique est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(L)$ algébrique au sens élémentaire.

---

[1] On définit $m_A : A \otimes A \to A$ par $m_A(a \otimes a') = aa'$.

Quelques classes de groupes :

a) Soit X un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini. On définit[1] le *tore* T par $T(L) = \mathrm{Hom}(X, L^\times)$, $\mathcal{O}(T)$ étant l'algèbre de groupe LX avec le coproduit $\Delta(\chi) = \chi \otimes \chi$ pour $\chi \in X$. De plus, X s'interprète comme l'ensemble des homomorphismes de groupes algébriques de T dans G_m.

b) Un groupe algébrique est *résoluble* (resp. *unipotent*) s'il est isomorphe à un sous-groupe algébrique du groupe des matrices triangulaires supérieures dans $\mathrm{GL}_n(L)$ (resp. avec éléments diagonaux égaux à 1).

c) Un groupe algébrique G est dit *réductif* s'il ne possède aucun sous-groupe algébrique invariant unipotent.

Soit alors G un groupe algébrique réductif et *connexe* (i.e. l'algèbre $\mathcal{O}(G)$ est intègre). Il existe des tores maximaux dans G, et ils sont tous conjugués par $\mathrm{G}(L)$. Soit T un tel tore, correspondant à un $\mathbf{Z}$-module X. On dit qu'un élément α de X est une *racine* s'il existe un homomorphisme φ_α de SL_2 dans G avec la propriété $t\,\varphi_\alpha(h)\,t^{-1} = \varphi_\alpha(u_\alpha(t)\,h u_\alpha(t)^{-1})$ pour h dans SL_2, t dans T et $u_\alpha(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il existe alors un élément $\alpha^\vee$ du dual $X^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(X, \mathbf{Z})$ de X tel que $\chi\Big(\varphi_\alpha\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}\Big) = x^{\langle \alpha^\vee, \chi \rangle}$ pour tout $x \in L^\times$ et tout $\chi \in X$ (l'élément $\varphi_\alpha\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}$ appartient à T).

On obtient ainsi la *donnée radicielle* $(X, X^\vee, R, R^\vee)$ satisfaisant aux axiomes suivants (*cf.* Demazure dans [A7]) :

(DR_1) *X est un $\mathbf{Z}$-module libre de type fini, et $X^\vee$ son dual.*

(DR_2) *R est une partie finie de X et $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ est une bijection de R sur une partie $R^\vee$ de $X^\vee$. De plus, deux éléments de R ne sont pas proportionnels, sauf dans le cas de α et $-\alpha$.*

(DR_3) *Pour α dans R, on a $\langle \alpha^\vee, \alpha \rangle = 2$. L'automorphisme s_α de X qui transforme χ en $\chi - \langle \alpha^\vee, \chi \rangle \alpha$ applique R dans R, et le contragrédient de s_α transforme $R^\vee$ en lui-même.*

Les s_α engendrent le *groupe de Weyl* $W(R)$ qui agit sur X et $X^\vee$. Dans notre exemple, R est l'ensemble des racines, s_α est induit par l'automorphisme $t \mapsto w_\alpha\, t\, w_\alpha^{-1}$ de T, avec $w_\alpha = \varphi_\alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; le normalisateur N de T est engendré

[1] On note $L^\times$ le groupe multiplicatif du corps L, d'où $L^\times = G_m(L)$.

par T et les w_α, d'où un isomorphisme de $W(R)$ avec N/T.

Le théorème de structure de Chevalley affirme que la *classification des groupes réductifs est équivalente à celle des données radicielles.*

3.2. Groupes génériques

Soit $\mathbf{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$. Si q est une puissance de p, il existe un unique sous-corps $\mathbf{F}_q$ de $\mathbf{F}$ ayant q éléments, l'ensemble des solutions de l'équation $x^q = x$. Soit G un groupe algébrique sur $\mathbf{F}$. Une *transformation de Frobenius* F de G (pour le nombre q) est un endomorphisme du groupe algébrique G, correspondant à un endomorphisme $f \mapsto f^F$ de l'algèbre $\mathcal{O}(G)$, pourvu que l'axiome suivant soit satisfait :

(Frob) *L'anneau $\mathcal{O}(G)$ est engendré par $\mathbf{F}$ et par l'ensemble A des solutions de l'équation $f^F = f^q$.*

Dans ces conditions, A est une algèbre sur le corps $\mathbf{F}_q$, et l'on a un isomorphisme naturel $\mathcal{O}(G) \simeq \mathbf{F} \otimes_{\mathbf{F}_q} A$; autrement dit, A définit un schéma affine en groupes Γ sur le corps $\mathbf{F}_q$ et G se déduit de Γ par extension des scalaires.

Si H est un sous-groupe algébrique de G, on note $F(H)$ son image par F et H^F l'ensemble des éléments h de H tels que $F(h) = h$; c'est un sous-groupe du groupe fini G^F.

Revenons au cas d'un groupe algébrique réductif et connexe G. Il existe un tore maximal T de G stable par F. Notons $(X, X^\vee, R, R^\vee)$ la donnée radicielle correspondante. Comme T est stable par F, la restriction de F à T correspond à un endomorphisme de X qui est de la forme $q\phi$, où ϕ est un automorphisme d'ordre fini de X qui conserve R et $R^\vee$ et normalise donc le groupe de Weyl $W(R) = W$.

Considérons un autre tore maximal T' stable par F, et les données X', $X'^\vee$, R', $R'^\vee$ et ϕ' correspondantes. Il existe un élément g de G tel que $gTg^{-1} = T'$; le choix d'un tel g définit un isomorphisme γ de la donnée radicielle $(X', X'^\vee, R', R'^\vee)$ sur $(X, X^\vee, R, R^\vee)$, mais elle ne transporte pas nécessairement ϕ' en ϕ. En fait, l'élément $g^{-1}F(g)$ appartient au normalisateur N de T et définit donc un élément w de W ; alors γ transporte ϕ' sur ϕw^{-1}. En faisant varier le tore T', on obtient tous les éléments w de W.

On est donc conduit à appeler *groupe générique* $\mathbf{G}$ une donnée radicielle $(X, X^\vee, R, R^\vee)$ munie d'un élément Φ du groupe quotient $A(R)/W(R)$, où $A(R)$ est le groupe des automorphismes de la donnée radicielle et $W(R)$ le groupe de

Weyl correspondant.

Voici le *mode d'emploi* de cette notion. On se donne un groupe générique $\mathbf{G} = (X, X^\vee, R, R^\vee, \Phi)$.

a) Choisissons un corps $\mathbf{F}$ algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, et une puissance entière $q = p^m$ de p. Il existe alors pour chaque élément ϕ de Φ un système (G, T, F) où G est un groupe algébrique réductif et connexe sur le corps $\mathbf{F}$, où T est un tore maximal de G, et F un endomorphisme de Frobenius de G, envoyant T dans T ; ce système doit déterminer une donnée radicielle isomorphe à $(X, X^\vee, R, R^\vee)$ où l'action de F sur T correspond à $q\phi$. De plus, le choix d'un isomorphisme de données radicielles définit (G, T, F) à un automorphisme intérieur près par un élément du groupe fini T^F, et le choix d'un autre représentant ϕ' de Φ ne laisse la place qu'à un automorphisme intérieur par un élément de G^F. Le groupe G^F, défini ainsi à un automorphisme intérieur près, sera noté $\mathbf{G}(q)$, et appelé un *groupe réductif fini.*

b) Nous allons définir un polynôme $P(x)$ avec la propriété que l'on ait $P(q) = |\mathbf{G}(q)|$ pour chaque $q = p^m$. Ce polynôme pourra s'appeler l'*ordre générique* de $\mathbf{G}$; une bonne notation est $|\mathbf{G}(x)|$.

Soit E l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} X$ et soit ℓ sa dimension ; le groupe W agit sur E et c'est un groupe fini engendré par des réflexions. Cette action se prolonge à l'algèbre symétrique S construite sur E ; les invariants de W dans S forment une algèbre graduée S^W sur laquelle agit le groupe $A(R)/W(R)$, d'où une action de Φ. D'après un théorème classique de Chevalley (*cf.* Bourbaki [A3, page 107]), on peut trouver des générateurs algébriquement indépendants $P_1, \cdots, P_\ell$ de S^W, homogènes de degrés respectifs $d_1, \cdots, d_\ell$. On peut aussi supposer que les P_i sont des fonctions propres de Φ, d'où des racines de l'unité $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_\ell$ telles que $\Phi \cdot P_i = \varepsilon_i P_i$. On pose alors :

$$(1) \qquad \varepsilon_{\mathbf{G}} = (-1)^\ell \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\ell \qquad |\mathbf{G}(x)| = x^N \prod_{i=1}^{\ell} (x^{d_i} - \varepsilon_i^{-1}),$$

où $2N$ est le nombre des racines. Le nombre $\varepsilon_{\mathbf{G}}$ est égal à 1 ou -1, et le polynôme $|\mathbf{G}(x)|$ est à coefficients entiers.

Exemple : on prend $X = \mathbf{Z}^n$, qu'on identifie à $X^\vee$, avec sa base canonique $e_1, \cdots, e_n$. On identifie α et $\alpha^\vee$ pour les racines $\alpha = e_i - e_j$, d'où $\ell = n$, $N = \frac{n(n-1)}{2}$

et $d_i = i$ pour $1 \leq i \leq n$. Considérons deux cas :

$$\Phi = 1,\ \varepsilon_1 = \cdots = \varepsilon_n = 1, \qquad |\mathbf{G}(x)| = x^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} (x^i - 1)$$

$$\Phi = -1, \varepsilon_i = (-1)^i, \qquad |\mathbf{G}^-(x)| = x^{n(n-1)/2} \prod_{i=1}^{n} (x^i - (-1)^i).$$

Les deux groupes génériques correspondant à $\Phi = 1$ et $\Phi = -1$ peuvent se noter $\mathbf{GL}_n$ et $\mathbf{GL}_n^-$. Par spécialisation, on obtient respectivement les groupes finis $\mathrm{GL}_n(q)$ et $\mathrm{U}_n(q^2)$; on a de bonnes raisons de noter ce dernier $\mathrm{GL}_n(-q)$.

Voir Carter [A6, page 75], pour une table des ordres génériques.

c) Un *tore générique* $\mathbf{T}$ correspond au cas où R est vide, d'où $W = \{1\}$; il est donc donné par un réseau X et un automorphisme ϕ d'ordre fini de X ; son ordre générique est $|\mathbf{T}(x)| = \det(x1_X - \phi^{-1})$. Un sous-tore $\mathbf{T}_1$ du tore générique $\mathbf{T}$ est de la forme $(X/X_1, \phi_1)$, où X_1 est un sous-groupe facteur direct de X, stable par ϕ, et ϕ_1 est l'automorphisme induit par ϕ sur le quotient.

Si $\mathbf{G}$ est un groupe générique, ses tores maximaux correspondent au choix d'un représentant ϕ de $\Phi \in A(R)/W(R)$. On peut parler d'un sous-tore générique non maximal d'après ce qui précède.

d) Dans la théorie des groupes réductifs, on introduit les *sous-groupes de Levi* de G comme étant les sous-groupes réductifs et connexes de G qui sont les centralisateurs des tores (non nécessairement maximaux). On traduit facilement ceci en termes génériques, en tenant compte de la transformation de Frobenius. On peut ainsi, dans chaque incarnation $G^F = \mathbf{G}(q)$ mettre en correspondance les G^F-classes de conjugaison de tores, ou de sous-groupes de Levi de G, avec les W-classes de conjugaison de sous-groupes de Levi génériques $\mathbf{L}$. On peut aussi définir la version générique $W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})$ de $N_{G^F}(L)/L^F$ (groupe de Weyl relatif).

3.3. Théorèmes de Sylow génériques

L'ordre $|\mathbf{G}(x)|$ d'un groupe générique $\mathbf{G}$ est un polynôme à coefficients entiers dont les racines non nulles sont des racines de l'unité. Il s'écrit donc sous la forme :

$$|\mathbf{G}(x)| = x^N \prod_d \Phi_d(x)^{a(d)} \tag{2}$$

de produits de puissances de polynômes cyclotomiques (et de x). Si q est une puissance d'un nombre premier p, et si ℓ est un nombre premier distinct de p, divisant $|\mathbf{G}(q)|$ mais non $|W|$, il existe un unique entier d tel que $a(d) \neq 0$ et $\ell \mid \Phi_d(q)$.

Ceci s'applique au cas des tores ; l'ordre d'un tore générique $\mathbf{T}$ s'écrit :

$$|\mathbf{T}(x)| = \prod_{d \in D} \Phi_d(x)^{a(d)} \tag{3}$$

avec $a(d) > 0$ pour $d \in D$. On dit que $\mathbf{T}$ est un *Φ_d-tore* si D est réduit à un élément d ; il revient au même de supposer qu'on a $\Phi_d(\phi) = 0$ si $\mathbf{T} = (X, \phi)$. Le cas $d = 1$ correspond à $\Phi_1(x) = x - 1$, d'où $\phi = 1$; autrement dit, un Φ_1-tore générique correspond, dans ses incarnations, à ce qu'on appelle un *tore déployé*.

Voici l'analogue du théorème de Sylow [D4] :

THÉORÈME (Broué-Malle).— *Soit $\mathbf{G}$ un groupe générique.*

a) *Si le polynôme cyclotomique $\Phi_d(x)$ divise $|\mathbf{G}(x)|$, il existe des Φ_d-tores dans $\mathbf{G}$.*

b) *Soit $\mathbf{S}$ un Φ_d-tore maximal dans $\mathbf{G}$. Alors $|\mathbf{S}(x)|$ est la plus grande puissance de $\Phi_d(x)$ divisant $|\mathbf{G}(x)|$.*

c) *Soit de plus $\mathbf{L}$ le sous-groupe de Levi générique centralisateur de $\mathbf{S}$. Alors le polynôme $|\mathbf{L}(x)|$ divise $|\mathbf{G}(x)|$, et l'on a :*

$$\frac{|\mathbf{G}(x)|}{|W_{\mathbf{G}}(\mathbf{L})| \cdot |\mathbf{L}(x)|} \equiv 1 \qquad \text{mod. } \Phi(x). \tag{4}$$

Pour la démonstration, on se sert des résultats de Springer [C6]. On introduit comme plus haut l'espace vectoriel complexe $E = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} X$, et l'on choisit une racine primitive d-ième de l'unité, soit ζ. Pour ϕ dans Φ, on note $E(\phi, \zeta)$ le noyau de $\phi - \zeta$ dans E. Alors l'exposant $a(d)$ dans la formule (2) est le maximum des dimensions des sous-espaces $E(\phi, \zeta)$ pour ϕ parcourant Φ, et deux de ces sous-espaces de dimension maximale sont conjugués par W.

3.4. Caractères unipotents génériques ; théorie de Harish-Chandra

Nous rappelons d'abord la définition des caractères unipotents du groupe réductif fini G^F. Choisissons un sous-groupe de Borel B de G, stable par F, et

un tore maximal T, stable par F et contenu dans B. Soit ϕ le représentant de Φ correspondant à T. On note $\mathcal{X}$ l'espace homogène G/B (variété des drapeaux). La décomposition de Bruhat $G = \coprod_{w\in W} BwB$ se traduit en une partition de $\mathcal{Y} = \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ en orbites pour G, indexées sous la forme $\mathcal{Y}_w$ avec $w \in W$. Considérons le plongement de $\mathcal{X}$ comme sous-variété algébrique fermée de $\mathcal{Y}$ donné par $r : x \mapsto (x, F(x))$[(1)], et posons $\mathcal{X}_w = r^{-1}(\mathcal{Y}_w)$. On a une partition $\mathcal{X} = \coprod_{w\in W} \mathcal{X}_w$ en sous-variétés algébriques localement fermées, stables pour le groupe fini G^F.

Grâce à Grothendieck, on peut définir les groupes de cohomologie étale $H^i_{\text{et}}(\mathcal{X}_w, \mathbf{Q}_\ell)$ et le groupe fini G^F agit sur ces espaces de cohomologie ; on définit les caractères virtuels :

$$R^G_{w\phi}(g) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i \operatorname{Tr}(g \mid H^i_{\text{et}}(\mathcal{X}_w, \mathbf{Q}_\ell)). \tag{5}$$

Les caractères unipotents de G^F sont les caractères irréductibles intervenant dans la décomposition de ces caractères $R^G_{w\phi}$. Leur ensemble se note $\mathcal{E}(G^F, 1)$.

Le résultat fondamental de Lusztig (*cf.* Carter [A6] et Lusztig [A10]) peut se formuler ainsi :

THÉORÈME.— *Soit* $\mathbf{G} = (X, X^\vee, R, R^\vee, \Phi)$ *un groupe générique. Il existe un ensemble fini, noté* $\mathbf{Uch}(\mathbf{G})$, *et une famille de polynômes* $m_\gamma(\phi, x)$ *(pour* γ *dans* $\mathbf{Uch}(\mathbf{G})$ *et* ϕ *dans* Φ*) avec la propriété suivante :*

Choisissons une incarnation (G, T, F) *de* $\mathbf{G}$, *correspondant au corps* $\mathbf{F}$, *à l'entier* q *et à l'élément* ϕ *de* Φ. *Supposons qu'il existe un sous-groupe de Borel* B *de* G, *stable par* F *et contenant* T. *Il existe une bijection* $\gamma \mapsto \rho_\gamma$ *de* $\mathbf{Uch}(\mathbf{G})$ *sur l'ensemble* $\mathcal{E}(G^F, 1)$ *des caractères unipotents de* G^F *telle que* $m_\gamma(w\phi, q)$ *soit égal à la multiplicité (positive ou négative) du caractère* ρ_γ *dans le caractère virtuel* $R^G_{w\phi}$.

Nous rappelons maintenant la théorie de Harish-Chandra. Nous fixons un groupe réductif fini G^F, un tore maximal T stable par F, et un sous-groupe de Borel B, stable par F et contenant T. On note U le plus grand sous-groupe unipotent invariant de B ; il est stable par F et B est produit semi-direct de T et de U.

(1) Puisque B est stable par F, on a une action de F sur $\mathcal{X} = G/B$.

Soit L un sous-groupe de Levi contenant T et stable par F. On suppose que L est le centralisateur d'un sous-tore S de T, stable par F et déployé (on dira que L est 1-*déployé*). Il existe alors un sous-groupe V de U, stable par F, et normalisé par L, tel que le sous-groupe P engendré par B et L soit produit semi-direct de L et V. Comme L^F normalise V^F, on a sur G^F/V^F une action à gauche de G^F et une action à droite de L^F. Les fonctions sur G^F/V^F à valeurs dans le corps de base K (comme dans les parties 1 et 2) forment un bimodule $H_{G,L}$ sur (KG^F, KL^F). Conformément à ce qu'on a vu au n° 2.2, le produit tensoriel par $H_{G,L}$ définit un foncteur $R_{L^F}^{G^F}$ de la catégorie des KL^F-modules dans celle des KG^F-modules. On a un foncteur adjoint ${}^*R_{L^F}^{G^F}$ de la catégorie des KG^F-modules dans celle des KL^F-modules.

On dit qu'un caractère λ dans $\mathrm{Irr}_K(G^F)$ est *cuspidal* (ou 1-cuspidal) si l'on a ${}^*R_{L^F}^{G^F}\lambda = 0$ pour tout sous-groupe de Levi 1-déployé L distinct de G. Le théorème de Harish-Chandra [B6] affirme l'existence d'*une partition de* $\mathrm{Irr}_K(G^F)$ *en familles* $HC(G^F, (L^F, \lambda))$ *où* L *parcourt l'ensemble des sous-groupes de Levi 1-déployés de* G (y compris G), *et* λ *l'ensemble des caractères 1-cuspidaux de* L^F ; *la famille correspondant à* L *et* λ *s'obtient en décomposant en caractères irréductibles le caractère* $R_{L^F}^{G^F}\lambda$.

En particulier, on a une partition de $\mathcal{E}(G^F, 1)$ en sous-familles $UHC(G^F, (L^F, \lambda))$, où λ parcourt l'ensemble des caractères 1-cuspidaux de $\mathcal{E}(L^F, 1)$. Énonçons les résultats fondamentaux :

A) *Pour tout groupe générique* $\mathbf{G}$, *il existe une partition de* $\mathbf{Uch}(\mathbf{G})$ *en familles* $\mathbf{Uch}(\mathbf{G}, (\mathbf{L}, \lambda))$, *où* $(\mathbf{L}, \lambda)$ *parcourt l'ensemble des classes de conjugaison des paires formées d'un sous-groupe de Levi générique* $\mathbf{L}$ *centralisateur d'un* Φ_1*-tore, et* λ *un élément "cuspidal" de* $\mathbf{Uch}(\mathbf{L})$. *Cette partition correspond par la bijection* $\gamma \mapsto \rho_\gamma$ *précédente à la partition de* $\mathcal{E}(G^F, 1)$ *en famille de Harish-Chandra* $UHC(G^F, (L^F, \lambda))$.

Autrement dit, la répartition en familles de Harish-Chandra est "générique".

B) *Soit* ℓ *un nombre premier, divisant* $q - 1$, *mais non l'ordre du groupe de Weyl* W. *Les familles de Harish-Chandra* $UHC(G^F, (L^F, \lambda))$ *donnent la répartition des caractères de* $\mathcal{E}(G^F, 1)$ *selon les* ℓ*-blocs. Enfin, le groupe de défaut du bloc correspondant à* (L^F, λ) *est le groupe* $Z(L)_\ell^F$ *des éléments* F*-invariants d'ordre* ℓ *dans le centre* $Z(L)$ *de* L ; *le groupe* L *est le centralisateur de ce groupe de défaut*

dans G.

Ce dernier énoncé est à mettre en relation avec la conjecture de Broué énoncée au n° 2.4. En effet, pour un groupe fini G dont les ℓ-groupes de Sylow sont abéliens, la décomposition en blocs doit se faire selon des paires (L, λ) où L est le centralisateur d'un ℓ-groupe et λ un caractère de défaut 0 de $L/Z(L)_\ell$.

3.5. Théorie de Harish-Chandra cyclotomique

Les résultats précédents élucident complètement la répartition des caractères unipotents du groupe réductif fini G^F en ℓ-blocs, pourvu que ℓ divise $q-1$. En particulier, *il y a identité entre caractères unipotents de défaut* 0 (pour ℓ) *et caractères unipotents cuspidaux.* Pour étudier le cas général, il convient de généraliser la théorie de l'induction à la Harish-Chandra.

Clarifions d'abord quelques points. Soit de nouveau G un groupe algébrique réductif et connexe, muni d'un endomorphisme de Frobenius F. On dispose d'une famille infinie de groupes finis, à savoir les groupes G^{F^m} de points fixes de l'itéré F^m de F (pour $m = 1, 2, \cdots$). Il existe alors un polynôme $P(x)$ dans $\mathbf{Z}[x]$ tel que l'ordre de G^{F^m} soit égal à $P(q^m)$ pour tout entier $m \geq 1$; cela caractérise le polynôme $P(x)$, qui n'est autre que l'ordre générique $|\mathbf{G}(x)|$. En particulier, si T est un tore déployé de dimension ℓ, on a $|T^{F^m}| = (q^m - 1)^\ell$. De même, un Φ_d-tore S de dimension ℓ est caractérisé par la formule[1] :

$$|S^{F^m}| = \Phi_d(q^m)^{\ell/\varphi(d)} \qquad \text{pour tout entier } m \geq 1. \tag{6}$$

Il y a une analogie formelle entre le théorème de Brauer rappelé au n° 1.6 et le théorème de Harish-Chandra. Nous considérons des paires (S, λ) où S est un tore stable par F et déployé dans G, de centralisateur L, et λ un caractère irréductible de L^F. On dira que *la paire* (S', λ') *domine la paire* (S, λ) si l'on a $S \subset S'$ et :

$$\langle \lambda\,,\, R^{L^F}_{L'^F}(\lambda') \rangle \neq 0\ ; \tag{7}$$

on notera que l'hypothèse $S \subset S'$ entraîne $L' \subset L$, et le foncteur $R^{L^F}_{L'^F}$ est défini car L et L' sont des sous-groupes de Levi 1-déployés.

[1] L'entier $\varphi(d)$ est le degré du polynôme cyclotomique $\Phi_d(x)$, c'est-à-dire l'indicateur d'Euler.

On a alors les traductions suivantes :

a) *Un caractère irréductible λ de L^F est cuspidal si et seulement si la paire (S, λ) (où L est le centralisateur du tore déployé S) est maximale pour la relation de domination.*

b) *Soit χ un caractère irréductible de G^F. Alors la paire $(1, \chi)$ est dominée par une paire maximale (S, λ).*

c) *Le groupe G^F opère transitivement dans l'ensemble des paires maximales dominant $(1, \chi)$.*

d) *Si (S, λ) est une paire maximale, et si L est le centralisateur de S, alors la famille de Harish-Chandra $HC(G^F, (L^F, \lambda))$ se compose des caractères irréductibles χ de G^F tels que (S, λ) domine la paire $(1, \chi)$.*

Pour établir la version cyclotomique, on définit d'abord la notion de *groupe de Levi d-déployé*[1], à savoir le centralisateur d'un Φ_d-tore. On considère ensuite des *Φ_d-paires* (S, λ) où S est un Φ_d-tore et λ un caractère irréductible de L^F (L est le centralisateur de S). La relation de domination est encore caractérisée par la formule (7), mais il faut remplacer l'induction de Harish-Chandra $R_{L'^F}^{L^F}$ par *l'induction de Deligne-Lusztig* [B4]. Ceci se fait en construisant une variété algébrique convenable $\mathcal{X}_{L,L'}$ sur laquelle on a une action à gauche γ du groupe L^F et une action à droite δ du groupe L'^F. Grâce à la cohomologie étale de la variété $\mathcal{X}_{L,L'}$, on définit un caractère virtuel μ du groupe fini $L^F \times L'^F$ par la formule :

$$\mu(g, g') = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{Tr}(\gamma(g)\, \delta(g'^{-1}) \mid H^i_{\text{et}}(\mathcal{X}_{L,L'}, \mathbf{Q}_\ell)). \tag{8}$$

À ce caractère virtuel μ, on associe par les formules du n° 2.1 une application I_μ de $R_K(L'^F)$ dans $R_K(L^F)$, qu'on notera $R_{L'^F}^{L^F}$ et une application R_μ en sens opposé, qu'on notera ${}^*R_{L'^F}^{L^F}$. La construction $R_{L'^F}^{L^F}$ contient comme cas particuliers celle du caractère $R_{w\phi}^G$ (*cf.* formule (5) du n° 3.4) et l'induction d'Harish-Chandra[2].

Soit L un Φ_d-sous-groupe de Levi de G. On dit qu'un caractère λ dans $\operatorname{Irr}_K(L^F)$ est *d-cuspidal* si l'on a ${}^*R_{L'^F}^{L^F} \lambda = 0$ pour tout Φ_d-sous-groupe de Levi L'

(1) Terminologie de Broué, Malle et Michel. Je préfère parler de Φ_d-groupe de Levi.

(2) Si L est un sous-groupe de Levi 1-déployé de G, la variété $\mathcal{X}_{G,L}$ est l'ensemble fini G^F/V^F avec les notations du n° 3.4.

L' de L, distinct de L. On peut alors généraliser le théorème de Harish-Chandra et répartir les caractères irréductibles de G^F en *Φ_d-familles* $HC_d(G^F,(L^F,\lambda))$. De manière précise, les assertions a) à d) ci-dessus se transposent en remplaçant "cuspidal" par "d-cuspidal", "tore déployé" par "Φ_d-tore" et "paire" par "Φ_d-paire".

On peut résumer les résultats obtenus par une longue chaîne d'auteurs (voir les références [D1] à [D19]) par l'affirmation suivante :

C) *Soit G^F un groupe réductif fini, et soit $d \geq 1$ un entier. On considère un nombre premier ℓ divisant l'ordre du groupe G^F, mais non l'ordre du groupe de Weyl*[1]. *Supposons que ℓ divise $\Phi_d(q)$. Les Φ_d-familles de Harish-Chandra :*

$$UHC_d(G^F,(L^F,\lambda)) = HC_d(G^F,(L^F,\lambda)) \cap \mathcal{E}(G^F,1)$$

donnent la répartition des caractères unipotents selon les ℓ-blocs. Le groupe de défaut du bloc correspondant à (L^F,λ) est égal à $Z(L)^F_\ell$. De plus, un caractère unipotent est de défaut 0 (pour ℓ) si et seulement s'il est d-cuspidal.

Le résultat essentiel de Broué, Malle et Michel dans l'article [D7] est leur théorème 3.2 qui donne une *version générique* des résultats précédents. Il est hors de question de décrire ici la lourde machine nécessaire. On s'appuie sur la définition de l'ensemble $\mathbf{Uch(G)}$ des caractères unipotents génériques du groupe générique $\mathbf{G}$, du degré générique $\deg_\gamma(x)$ de ces caractères, et des multiplicités génériques $m_\gamma(\phi,x)$ (*cf.* le théorème du n° 3.4). En particulier, un caractère unipotent générique γ est d-cuspidal si et seulement s'il est de[2] Φ_d-défaut 0, c'est-à-dire si le polynôme $|\mathbf{G}(x)|/\deg_\gamma(x)$ n'est pas divisible par $\Phi_d(x)$. Un point important est que *les caractères intervenant dans la famille $UHC_d(G^F,(L^F,\lambda))$ sont en correspondance avec ceux d'un groupe de Weyl relatif $W_G(L,\lambda)$ par une isométrie* du style du n° 2.1, et qu'il existe une *version générique de cette isométrie.* Pour le moment, le théorème fondamental de [D7] nécessite une laborieuse vérification cas par cas.

Cet exposé aura atteint son but s'il a préparé le lecteur à une étude attentive du volume 212 d'Astérisque, contenant la description précise de ces résultats de Broué, Malle et Michel, et de bien d'autres.

---

[1] Lorsque le groupe G n'est pas déployé, il faut omettre quelques valeurs de ℓ, telles que 2 ou 3... suivant les cas.

[2] Cette notion a été introduite par Boyce dans [D1].

BIBLIOGRAPHIE RAISONNÉE

A. Ouvrages de référence

Voici une sélection d'ouvrages sur les groupes algébriques, les systèmes de racines et les groupes finis associés.

[A1] A. BOREL - *Linear algebraic groups*, Grad. Texts Math. **126**, Springer, 1991.

[A2] A. BOREL et J. TITS - *Groupes réductifs*, Publ. Math. I.H.E.S. **27** (1965), 55-151.

[A3] N. BOURBAKI - *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 4, 5 et 6, réimpression, Masson, 1981.

[A4] N. BOURBAKI - *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 7 et 8, réimpression, Masson, 1990.

[A5] R.W. CARTER - *Simple Groups of Lie Type*, Wiley, 1972.

[A6] R.W. CARTER - *Finite Groups of Lie Type : Conjugacy Classes and Complex Characters*, Wiley, 1985.

[A7] M. DEMAZURE - *Données radicielles*, Exposé XXI, Schémas en groupes III, un séminaire dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck, Lect. Notes in Math. **153** (1970), Springer.

[A8] F. DIGNE et J. MICHEL - *Representations of finite groups of Lie type*, Cambridge Univ. Press, 1991.

[A9] J. HUMPHREYS - *Linear algebraic groups*, Grad. Texts Math. **21**, Springer, 1975.

[A10] G. LUSZTIG - *Characters of reductive groups over a finite field*, Ann. Math. Studies **107**, Princeton Univ. Press, 1984.

[A11] T.A. SPRINGER - *Linear algebraic groups*, Prog. Math. **9**, Birkhaüser, 1981.

[A12] T.A. SPRINGER et R. STEINBERG - *Conjugacy classes*, in Borel *et al.*, Seminar on algebraic groups and related finite groups, Lect. Notes in Math. **131** (1970), Springer.

[A13] R. STEINBERG - *Endomorphisms of linear algebraic groups*, A.M.S. Memoirs **80** (1968).

[A14] R. STEINBERG - *Lectures on Chevalley groups*, Yale University, 1967.

Passons maintenant aux représentations des groupes finis, leurs caractères et les blocs.

[A15] C. CHEVALLEY - *Théorie des blocs*, Sém. Bourbaki, exp. n° 419, Lect. Notes in Math. **383** (1974), Springer.

[A16] C.W. CURTIS et I. REINER - *Methods in representation theory*, I, II, Wiley, 1981/1987.

[A17] W. FEIT - *The representation theory of finite groups*, North-Holland Publ., 1982.

[A18] J.-P. SERRE - *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, 1978.

B. Classification et construction des caractères

Par ordre chronologique, voici les trois rapports au Séminaire Bourbaki sur les représentations des groupes de Chevalley finis :

[B1] T.A. SPRINGER - *Caractères de groupes de Chevalley finis*, exp. n° 429, Lect. Notes in Math. **383** (1974), Springer.

[B2] J.-P. SERRE - *Représentations linéaires des groupes finis "algébriques" [d'après Deligne-Lusztig]*, exp. n° 487, Lect. Notes in Math. **567** (1977), Springer.

[B3] P. CARTIER - *Détermination des caractères des groupes finis simples : travaux de Lusztig*, exp. n° 658, Astérisque **145-146** (1987), 137-161.

Voici les articles "historiques" sur la construction et la décomposition des caractères de ces mêmes groupes.

[B4] P. DELIGNE et G. LUSZTIG - *Representations of reductive groups over finite fields*, Annals of Math. **103** (1976), 103-161.

[B5] F. DIGNE et J. MICHEL - *Théorie de Deligne-Lusztig et caractères des groupes linéaires et unitaires*, J. of Algebra **107** (1987), 217-255.

[B6] HARISH-CHANDRA - *Eisenstein series over finite fields*, **in** "Functional analysis and related fields" (F.E. Browder, édit.), pages 76 à 88, Springer, 1970.

[B7] P.N. HOEFSMIT - *Representations of Hecke algebras of finite groups with BN-pairs of classical type*, Ph.D. Thesis, Univ. of British Columbia (1974).

[B8] R.B. HOWLETT et G.I. LEHRER - *Induced cuspidal representations and generalized Hecke rings*, Invent. Math. **58** (1980), 37-64.

[B9] R.B. HOWLETT et G.I. LEHRER - *Representations of generic algebras and finite groups of Lie type*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), 753-779.

[B10] G. LUSZTIG - *Irreducible representations of finite classical groups*, Invent. Math. **43** (1977), 125-175.

C. Groupes finis engendrés par des réflexions

[C1] C. CHEVALLEY - *Invariants of finite groups generated by reflections*, Amer. J. Math. **77** (1955), 778-782.

[C2] A.M. COHEN - *Finite complex reflection groups*, Ann. Sci. E.N.S. **9** (1976), 379-436.

[C3] H.S.M. COXETER - *Finite groups generated by unitary reflections*, Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **31** (1967), 125-135.

[C4] L.L. GROVE et C.T. BENSON - *Finite reflection groups*, Grad. Texts Math. **99**, Springer, 1985.

[C5] G.C. SHEPHARD et J.A. TODD - *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math. **6** (1954), 274-304.

[C6] T.A. SPRINGER - *Regular elements of finite reflection groups*, Invent. Math. **25** (1974), 159-198.

D. Blocs des groupes réductifs finis

[D1] R. BOYCE - *Cyclotomic polynomials and irreducible representations of finite groups of Lie type*, manuscrit non publié.

[D2] M. BROUÉ - *Les ℓ-blocs des groupes* $\mathrm{GL}(n,q)$ *et* $U(n,q^2)$ *et leurs structures locales*, Sém. Bourbaki, exp. n° 640, Astérisque **133-134** (1986), 159-188.

[D3] M. BROUÉ et J. MICHEL - *Blocs et séries de Lusztig dans un groupe réductif fini*, J. reine angew. Math. **395** (1989), 56-67.

[D4] M. BROUÉ et G. MALLE - *Théorèmes de Sylow génériques pour les groupes réductifs sur les corps finis*, Math. Ann. **292** (1992), 241-262.

[D5] M. BROUÉ et G. MALLE - *Zyklotomische Hecke Algebren*, Astérisque **212** (1993), 119-189.

[D6] M. BROUÉ et J. MICHEL - *Blocs à groupes de défaut abéliens des groupes réductifs finis*, Astérisque **212** (1993), 93-117.

[D7] M. BROUÉ, G. MALLE et J. MICHEL - *Generic blocks of finite reductive groups*, Astérisque **212** (1993), 7-92.

[D8] M. CABANES et M. ENGUEHARD - *On unipotent blocks of finite reductive groups of a given type*, Math. Z. **213** (1993), 479-490.

[D9] M. CABANES et M. ENGUEHARD - *On unipotent blocks and their ordinary characters*, Invent. Math. **117** (1994), 149-164.

[D10] M. CABANES et M. ENGUEHARD - *On general blocks of finite reductive groups : ordinary characters and defect groups*, Publications du LMENS, **93-13** (1993).

[D11] P. FONG et B. SRINIVASAN - *The blocks of finite general and unitary groups*, Invent. Math. **69** (1982), 109-153.

[D12] P. FONG et B. SRINIVASAN - *The blocks of finite classical groups*, J. reine angew. Math. **396** (1989), 122-191.

[D13] P. FONG et B. SRINIVASAN - *Generalized Harish-Chandra theory for unipotent characters of finite classical groups*, J. of Algebra **104** (1986), 301-309.

[D14] M. GECK - *A classification of ℓ-blocks of finite groups of Lie type*, J. of Algebra **151** (1992), 180-191.

[D15] G. HISS - *Zerlegungszahlen endlicher Gruppen vom Lie-Typ in nicht-definierender Charakteristik*, thèse, 1990.

[D16] G. LUSZTIG - *Coxeter groups and unipotent representations*, Astérisque **212** (1993), 191-203.

[D17] G. LUSZTIG - *Exotic Fourier transform* (with an Appendix by G. Malle), Duke Math. Journ. **73** (1994), 227-248.

[D18] Ll. PUIG - *Algèbres de sources de certains blocs des groupes de Chevalley*, Astérisque **181-182** (1990), 221-236.

[D19] K. SCHEWE - *Blöcke exzeptionneller Chevalley-Gruppen*, Bonner Math. Schriften **165**, Bonn, 1985.

E. Théorie locale des blocs ; équivalence dérivée

[E1] J.L. ALPERIN et M. BROUÉ - *Local Methods in Block Theory*, Annals of Math. **110** (1979), 143-157.

[E2] M. BROUÉ - *Théorie locale des blocs*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley (1986), vol. 1, 360-368.

[E3] M. BROUÉ - *Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées*, Astérisque **181-182** (1990), 61-92.

[E4] M. BROUÉ - *Isométries de caractères et équivalences de Morita ou dérivées*, Publ. Math. I.H.E.S. **71** (1990), 45-63.

[E5] M. BROUÉ - *Equivalence of blocks of group algebras*, dans "Finite dimensional algebras and related topics", (V. Dlab et L. Scott édit.), Kluwer Acad. Publ., 1994.

[E6] M. BROUÉ - *Rickard equivalence and block theory*, Publications du LMENS, **94-1** (1994).

[E7] M. BROUÉ et Ll. PUIG - *A Frobenius theorem for blocks*, Invent. Math. **56** (1980), 117-128.

[E8] D. HAPPEL - *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras*, Cambridge Univ. Press, 1988.

[E9] M. LINCKELMANN - *Derived equivalence for cyclic blocks over a p-adic ring*, Math. Z. **207** (1991), 293-304.

[E10] Ll. PUIG - *Local block theory in p-solvable groups*, B. Cooperstein and G. Mason éd., "The Santa Cruz Conference on Finite Groups", Proc. Symp. Pure Math., vol. XXXVII, Amer. Math. Soc., 1980.

[E11] Ll. PUIG - *Nilpotent blocks and their source algebras*, Invent. Math. **93** (1988), 77-116.

[E12] Ll. PUIG - *Local fusion in block source algebras*, J. of Algebra **104** (1986), 358-369.

[E13] J. RICKARD - *Morita Theory for Derived Categories*, J. London Math. Soc. **39** (1989), 436-456.

[E14] J. RICKARD - *Derived categories and stable equivalences*, J. Pure and Appl. Alg. **61** (1989), 307-317.

[E15] J. RICKARD - *Derived equivalences as derived functors*, J. London Math. Soc. **43** (1991), 37-48.

[E16] J. RICKARD - *Finite group actions and etale cohomology*, prépublication (1992).

[E17] R. ROUQUIER - *Isométries parfaites dans les blocs à défaut abélien des groupes symétriques et sporadiques*, J. of Algebra **168** (1994), 648-694.

Pierre CARTIER

D.M.I.
URA 762 du CNRS
École Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
F-75230 PARIS Cedex 05

et

I.H.E.S.
35, route de Chartres
F-91440 BURES-sur-YVETTE