Astérisque

JOSEPH OESTERLÉ

# Polylogarithmes

*Astérisque*, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki, exp. nº 762, p. 49-67
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__49_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 1992
45ème année, 1992-93, n° 762

# POLYLOGARITHMES

par Joseph OESTERLÉ

Les polylogarithmes sont les fonctions holomorphes multivaluées $Li_k$ que l'on obtient par prolongement analytique des séries entières $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n^k$. Défini par Leibnitz en 1696, le dilogarithme $Li_2$ est étudié en détail par Euler en 1768. La première étude du trilogarithme est due à Landen (1780), et celle des polylogarithmes d'ordre supérieur commence vraiment avec les travaux de Kummer en 1840. Jusque vers 1975, les polylogarithmes sont essentiellement considérés sous leur aspect "fonctions spéciales" (recherche d'équations fonctionnelles, valeurs remarquables, calcul de séries et d'intégrales dans lesquelles ils interviennent, etc.). On dispose pour cette période d'une bibliographie à peu près exhaustive dans le livre de Lewin, Polylogarithms and associated functions ([Le]) ; elle inclut la liste publiée par Nielsen en 1909 des travaux antérieurs au 20ème siècle.

Dans les quinze dernières années, la théorie des polylogarithmes a véritablement explosé. Voici quelques-uns des domaines dans lesquels ils sont apparus :

— volumes de polytopes en géométrie sphérique et hyperbolique
— volumes des variétés hyperboliques de dimension 3
— description combinatoire de classes caractéristiques
— valeurs spéciales des fonctions zêta
— géométrie des configurations de points dans $\mathbf{P}_1$
— cohomologie de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$
— calcul de fonctions de Green
— intégrales itérées de Chen
— régulateurs en $K$-théorie algébrique
— équations différentielles à monodromie nilpotente
— problème de Hilbert sur les polyèdres équidécomposables
— complétion nilpotente de $\pi_1(\mathbf{P}_1 - \{0, 1, \infty\})$

— variation de structures de Hodge mixtes

— cohomologie motivique.

La plupart de ces aspects sont abordés dans le rapport récent de Hain sur les polylogarithmes ([Ha]) et dans le livre édité en 1991 par Lewin, intitulé Structural Properties of Polylogarithms ([POL]). On trouve à la fin de ce livre une bibliographie très complète des articles récents concernant les polylogarithmes ; il m'a paru superflu de la recopier exhaustivement ici.

Cet exposé n'a pas pour but de dresser un panorama de la théorie sous tous ces aspects, mais seulement de fournir au non-spécialiste une introduction élémentaire aux polylogarithmes. Il est souhaitable que d'autres exposés prennent la relève pour présenter les avancées des recherches dans les divers domaines que nous avons mentionnés.

## 1. DÉTERMINATION PRINCIPALE DES POLYLOGARITHMES

### 1.1. Définition

Soit $k$ un entier $\geq 1$. La *détermination principale du $k$-logarithme* est une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} - [1, +\infty[$. Pour $|z| < 1$, elle est donnée par la formule

$$Li_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^k}. \tag{1}$$

L'existence du prolongement holomorphe à $\mathbf{C} - [1, +\infty[$ résulte par récurrence des relations

$$Li_1(z) = -\log(1 - z) \tag{2}$$

$$Li'_k(z) = \frac{1}{z} Li_{k-1}(z) \qquad (k \geq 2) \tag{3}$$

(où log est la détermination principale du logarithme).

### 1.2. Relations de distribution

Pour $k$ et $r$ entiers $\geq 1$, on a, d'après (1)

$$Li_k(z^r) = r^{k-1} \sum_{\omega^r = 1} Li_k(\omega z) \qquad (|z| < 1). \tag{$4_r$}$$

### 1.3. Relation d'inversion

Pour tout $k \geq 1$ et tout $z \in \mathbf{C} - [0, +\infty[$, on a

$$(5) \qquad Li_k(z) + (-1)^k \, Li_k(z^{-1}) = -\frac{(2\pi i)^k}{k!} \, B_k\Big(\frac{\log z}{2\pi i}\Big),$$

où $B_k$ est le polynôme de Bernoulli de degré $k$ et $\log z$ le logarithme de $z$ dont la partie imaginaire appartient à $]0, 2\pi[$. Cela se déduit de (2) et (3) par récurrence sur $k$ en remarquant que la dérivée de $B_k$ est $k\,B_{k-1}$, que la valeur moyenne de $B_k$ sur $[0,1]$ est nulle et que, sur le cercle unité privé du point 1, la fonction $Li_k$ est donnée par la formule (1) et a pour valeur moyenne 0.

La relation d'inversion (5) permet de comparer les valeurs de $Li_k$ des deux côtés de la coupure $[1, +\infty[$ : on déduit de la relation $B_k(t+1) - B_k(t) = k\,t^{k-1}$ que l'on a, pour tout nombre réel $x > 1$,

$$(6) \qquad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(Li_k(x + i\varepsilon) - Li_k(x - i\varepsilon)\right) = 2\pi i \, \log^{k-1} x \,/\, (k-1)!.$$

La relation (5) fournit aussi un développement asymptotique de $Li_k$ à l'infini. On a en particulier

$$(7) \qquad |Li_k(z)| = O(\log^k |z|) \qquad (|z| \to +\infty).$$

### 1.4. Limite en 1

Supposons $k \geq 2$. Lorsque $z \in \mathbf{C} - [1, +\infty[$ tend vers 1, $Li_k(z)$ a une limite : on le déduit de (1) pour $|z| \leq 1$, puis de la relation d'inversion pour $|z| \geq 1$. Cette limite, d'après (1), est $\zeta(k)$, où $\zeta$ est la fonction zêta de Riemann. Par passage à la limite dans (5), on retrouve, pour $k$ pair, la formule classique $2\zeta(k) = -\frac{(2\pi i)^k}{k!} \, b_k$, où $b_k = B_k(0)$ est le nombre de Bernoulli d'indice $k$.

## 2. MONODROMIE DES POLYLOGARITHMES

*Dans ce paragraphe, $(X, x_0)$ désigne le revêtement universel de l'espace pointé $(\mathbf{C} - \{0,1\}, \frac{1}{2})$ et $p : X \to \mathbf{C} - \{0,1\}$ l'application canonique* : les éléments de $X$ sont les classes d'homotopie $[c]$ des chemins $c$ d'origine $\frac{1}{2}$ dans $\mathbf{C} - \{0,1\}$, et l'on

a $p([c]) = c(1)$. *Le groupe fondamental* $G = \pi_1(\mathbf{C} - \{0,1\}, \frac{1}{2})$ *opère à gauche sur* $X$ : si $g \in G$ est la classe d'un lacet $\ell$, $g[c]$ est la classe du chemin composé $\ell c$.

## 2.1. Les polylogarithmes, fonctions multivaluées sur $\mathbf{C} - \{0,1\}$

Pour chaque entier $k \geq 1$, il existe une fonction holomorphe $\mathbf{Li_k}$ sur $X$ dont le germe en $x_0$ est celui de $Li_k \circ p$ : cela résulte par récurrence des relations (2) et (3). On interprète cela en disant que le $k$-logarithme est "*une fonction holomorphe multivaluée sur* $\mathbf{C} - \{0,1\}$". Si $A$ est une partie de $\mathbf{C} - \{0,1\}$, toute fonction sur $A$ de la forme $\mathbf{Li_k} \circ s$, où $s$ est une section continue de $p$ sur $A$, s'appelle *une détermination du $k$-logarithme sur $A$* et, lorsque cela ne prête pas à confusion, se note simplement $Li_k$.

Il est commode, si $c$ est un chemin dans $\mathbf{C} - \{0,1\}$ d'origine $\frac{1}{2}$ et d'extrémité $z$, de noter $Li_k^{[c]}(z)$ le nombre complexe $\mathbf{Li_k}([c])$, et de dire que c'est *la détermination du $k$-logarithme au point $z$ relative au chemin $c$.*

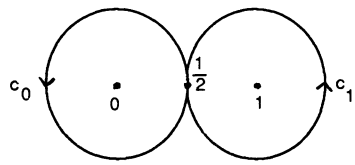
On utilise des conventions analogues en ce qui concerne la fonction logarithme.

*Remarques.*- 1) Pour simplifier, nous avons choisi de privilégier le point-base $\frac{1}{2}$. On peut être plus intrinsèque en faisant jouer le rôle de point-base de $\mathbf{C} - \{0,1\}$ à l'ensemble contractile $]0,1[$, ou au vecteur tangent $\frac{d}{dz}$ à l'origine.

2) L'intégrale itérée $\int_\gamma(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_k)$ le long d'un chemin $\gamma$ de classe $C^1$ dans une variété différentielle d'une suite $(\omega_1, \cdots, \omega_k)$ de formes différentielles de degré 1 est par définition $\int_{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k \leq 1} f_1(t_1) \cdots f_k(t_k)\ dt_1 \cdots dt_k$, où $\gamma^*\omega_j = f_j(t)dt$. Les polylogarithmes sont de telles intégrales (généralisées) : si $\gamma$ est un chemin dans $\mathbf{C}$ reliant 0 à $z$ sans repasser par 0 ni passer par 1, $\int_\gamma \left(\frac{du}{1-u}, \frac{du}{u}, \cdots, \frac{du}{u}\right)$ est une détermination de $Li_k(z)$.

## 2.2. Relations de monodromie

Considérons les lacets $c_0, c_1$ représentés ci-dessous




Leurs classes engendrent le groupe libre $G = \pi_1(\mathbf{C} - \{0,1\}, \frac{1}{2})$.

**PROPOSITION 1.-** *Soient $z$ un point de $\mathbf{C} - \{0,1\}$ et $c$ un chemin reliant $\frac{1}{2}$ à $z$. On a, pour $k \geq 1$, les relations de monodromie*

$$(8) \qquad Li_k^{[c_0 c]}(z) = Li_k^{[c]}(z) \qquad\qquad Li_k^{[c_1 c]}(z) = Li_k^{[c]}(z) - 2\pi i \frac{(\log^{[c]}(z))^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$(9) \qquad log^{[c_0 c]}(z) = \log^{[c]}(z) + 2\pi i \qquad \log^{[c_1 c]}(z) = \log^{[c]}(z).$$

Les relations (8) résultent respectivement de (1) et (6) et les relations (9) sont bien connues.

**COROLLAIRE 1.-** *Soit $A$ un secteur angulaire de $\mathbf{C}$ de sommet 0. Toute détermination du $k$-logarithme définie au voisinage de 0* (resp. *de $\infty$*) *dans $A$ est dominée par $\log^{k-1}|z|$ (resp. $\log^k|z|$) lorsque $|z|$ tend vers 0* (resp. *vers $+\infty$*).

**COROLLAIRE 2.-** *Soit $A$ un secteur angulaire de $\mathbf{C}$ de sommet 1. Toute détermination du $k$-logarithme définie au voisinage de 1 dans $A$ a une limite lorsque $z$ tend vers 1. Cette limite diffère de $\zeta(k)$ par un multiple entier de $(2\pi i)^k/(k-1)!$.*

Ces deux corollaires ont été démontrés au §1 pour la détermination principale du $k$-logarithme. Le cas général s'en déduit par la prop. 1.

*Remarque.-* Les résultats de ce numéro peuvent se déduire directement, par récurrence sur $k$, des relations (2) et (3).

### 2.3. Reformulation des relations de monodromie

Soit $n$ un entier $\geq 0$. Considérons la matrice suivante, dont les lignes et colonnes sont indexées par l'ensemble $\{0, 1, \cdots, n\}$

$$(10) \qquad L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -Li_1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -Li_2 & \log & \ddots & & & \vdots \\ -Li_3 & \frac{\log^2}{2!} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -Li_n & \frac{\log^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{\log^2}{2!} & \log & 1 \end{pmatrix}$$

et posons

$$(11) \qquad A_n = L_n\, \tau(2\pi i)$$

où $\tau(\lambda)$ est la matrice diagonale $\mathrm{diag}(1, \lambda, \cdots, \lambda^n)$. Si $z$ est un point de $\mathbf{C} - \{0,1\}$ et $c$ un chemin dans $\mathbf{C} - \{0,1\}$ reliant $\frac{1}{2}$ à $z$, on note $L_n^{[c]}(z)$ et $A_n^{[c]}(z)$ les déterminations de ces matrices au point $z$, relatives au chemin $c$.

La prop. 1 se reformule en disant que, pour tout élément $g$ de $G = \pi_1(\mathbf{C} - \{0,1\}, \frac{1}{2})$, on a

$$A_n^{g[c]}(z) = A_n^{[c]}(z)\ \rho_n(g) \tag{12}$$

où $\rho_n$ est l'homomorphisme de $G$ dans le groupe opposé de $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{Q})$ caractérisé par

$$\rho_n([c_0]) = \exp e_0 \qquad \rho_n([c_1]) = \exp e_1 \tag{13}$$

avec

$$e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

*Remarque.*- D'après (2) et (3), on a

$$\frac{d}{dz} L_n(z) = \left( \frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1} \right) L_n(z) \tag{15}$$

pour toute détermination de $L_n$ sur un ouvert de $\mathbf{C} - \{0,1\}$. Le même énoncé vaut pour $A_n$. Considérons l'équation différentielle $\frac{d}{dz} v = \left( \frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1} \right) v$ (où $v$ est une matrice-colonne à $n+1$ lignes). Le groupe $G = \pi_1(\mathbf{C} - \{0,1\}, \frac{1}{2})$ opère à droite, par monodromie, sur l'espace vectoriel des germes en $\frac{1}{2}$ de solutions. Une base de cet espace vectoriel est formée par les germes en $\frac{1}{2}$ des colonnes de la détermination principale de $A_n$. La représentation de monodromie dans cette base est $\rho_n$.

## 2.4. Structure du groupe de monodromie

Définissons une suite $(g_i)_{i \geq 0}$ d'éléments de $G$ en posant $g_0 = [c_0]$, $g_1 = [c_1]$ et

$g_{i+1} = (g_0, g_i)$ ($\overset{\text{déf}}{=} g_0^{-1} g_i^{-1} g_0 g_i$) pour $i \geq 1$. Posons $G_n = G/\mathrm{Ker}\,\rho_n$ et notons $\overline{g}_i$ l'image canonique de $g_i$ dans $G_n$. On a $\overline{g}_i = 0$ pour $i > n$. Les éléments $\overline{g}_i$ pour $1 \leq i \leq n$ commutent deux à deux et sont $\mathbf{Z}$-linéairement indépendants.

Supposons $n \geq 2$. Le groupe $G_n$ est produit semi-direct du groupe (isomorphe à $\mathbf{Z}$) engendré par $\overline{g}_0$ par le groupe (isomorphe à $\mathbf{Z}^n$) engendré par $\overline{g}_1, \cdots, \overline{g}_n$. Le noyau de $\rho_n$ est formé des éléments $g \in G$ tels que $\mathbf{Li_n}(gx) = \mathbf{Li_n}(x)$ et $\mathbf{log}(gx) = \mathbf{log}(x)$ pour tout $x \in X$ ; c'est le sous-groupe distingué de $G$ engendré par $g_{n+1}$ et les commutateurs $(g_1, g_i)$, avec $2 \leq i \leq n$. Le groupe $G_n$ est le plus grand quotient de $G$, nilpotent de classe $n$, dans lequel l'image canonique de $g_1$ centralise le groupe dérivé. Soit $(C^i(G_n))_{i \geq 1}$ la suite centrale descendante de $G_n$. On a $C^1(G_n) = G_n$, $C^{n+1}(G_n)$ est réduit à l'élément neutre et $C^i(G_n)$ est le sous-groupe de $G_n$ engendré par $\overline{g}_i, \cdots, \overline{g}_n$ pour $2 \leq i \leq n$.

Les éléments $g \in G$ tels que $\mathbf{Li_n}(gx) = \mathbf{Li_n}(x)$ pour tout $x \in X$ sont ceux dont l'image dans $G_n$ est une puissance de $\overline{g}_0$.

*Remarque.*- Le plus petit revêtement de $\mathbf{C} - \{0, 1\}$ sur lequel "vit" le logarithme est $N_0 \backslash X$, où $N_0$ est le sous-groupe distingué de $G$ engendré par $g_1$. Le plus petit revêtement de $\mathbf{C} - \{0, 1\}$ sur lequel "vivent" le logarithme et tous les polylogarithmes est $N \backslash X$, où $N = \bigcap_{n \geq 1} \mathrm{Ker}(\rho_n)$.

Le revêtement $N \backslash X$ de $\mathbf{C} - \{0, 1\}$ est galoisien, de groupe de Galois $G/N$. Notons $H$ le produit semi-direct $\mathbf{Z}[t, t^{-1}] \rtimes \mathbf{Z}$, où l'action de $\mathbf{Z}$ sur le groupe additif $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ associe à $a \in \mathbf{Z}$ l'homothétie de rapport $t^a$ dans $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$. L'homomorphisme $\varphi : G \to H$ tel que $\varphi(g_0) = (0, 1)$ et $\varphi(g_1) = (1, 0)$ définit par passage au quotient un isomorphisme de $G/N$ sur $H$, et l'on a

$$\mathrm{Ker}\,\rho_n = \varphi^{-1}((1-t)^n \mathbf{Z}[t, t^{-1}] \times \{0\})$$

pour tout $n \geq 2$. On en déduit que $N \backslash X$ est un revêtement abélien maximal de $N_0 \backslash X$.

### 2.5. Variation de Tate mixte sur $\mathbf{C} - \{0, 1\}$ associée

Soit $V$ l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des vecteurs colonnes, à éléments indexés par $\{0, 1, \cdots, n\}$. Il est gradué : on a $V = \bigoplus_{j=0}^{n} V_j$, où $V_j$ est formé des vecteurs colonnes dont les éléments d'indice $\neq j$ sont nuls. Soit $z \in \mathbf{C} - \{0, 1\}$. Le sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel de $V$ engendré par les colonnes de $A(z)$ ne dépend pas de la

détermination de $A(z)$ choisie, puisque $\rho_n$ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_{n+1}(\mathbf{Q})$. C'est une $\mathbf{Q}$-structure sur $V$ que l'on note $V_{\mathbf{Q}}(z)$, pour laquelle chaque sous-espace $\bigoplus_{j=k}^{n} V_j$ est rationnel sur $\mathbf{Q}$. Il existe localement des bases de $V_{\mathbf{Q}}(z)$ holomorphes en $z$. Si $\nabla$ est la connexion pour laquelle elles sont horizontales (à savoir $\frac{\partial}{\partial z} - \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\right)$, et $s$ une fonction holomorphe à valeurs dans $V_k$, avec $k < n$, $\nabla s$ est à valeurs dans $V_k \oplus V_{k+1}$. Deligne [De] résume l'ensemble de ces propriétés en disant que l'on a une $\mathbf{Q}$-variation de Tate mixte sur $\mathbf{C} - \{0,1\}$. Sa philosophie est qu'il y a intérêt à exprimer les propriétés des polylogarithmes en termes de ces structures.

## 3. LA FONCTION DE BLOCH-WIGNER ET SES GÉNÉRALISATIONS

Les fonctions $P_k$ que nous allons introduire ci-dessous jouent pour le $k$-logarithme un rôle analogue à celui que joue la fonction $z \mapsto \log |z|$ pour le logarithme. Elles ont été définies par Zagier ([Za]), qui les exprimait comme combinaisons linéaires de fonctions étudiées auparavant par Ramakrishnan ([Ra]) et Wojtkowiak ([Wo]). La présentation que nous en donnons ici est due à Deligne [De].

### 3.1. Définition des fonctions $P_k$

Soit $z$ un point de $\mathbf{C} - \{0,1\}$. Reprenons les notations de 2.3. La matrice

$$(16) \qquad T_n(z) = A_n^{[c]}(z)\,\overline{A_n^{[c]}(z)^{-1}}\,\tau(-1) \qquad (= L_n^{[c]}(z)\,\tau(-1)\,\overline{L_n^{[c]}(z)^{-1}}\,\tau(-1)),$$

où $c$ est un chemin dans $\mathbf{C}-\{0,1\}$ reliant $\frac{1}{2}$ à $z$, ne dépend pas de $c$ : cela résulte du fait que $\rho_n(G)$ est formé de matrices à éléments réels. La matrice $T_n(z)$ est triangulaire inférieure et unipotente, donc est l'exponentielle d'une matrice triangulaire inférieure nilpotente, notée $\log T_n(z)$. On a $\overline{T_n(z)} = \tau(-1)\,T_n(z)^{-1}\,\tau(-1)$, d'où $\overline{\log T_n(z)} = -\tau(-1)\,\log T_n(z)\,\tau(-1)$ ; cela signifie que l'élément d'indice $(i,j)$ de $\log T_n(z)$ est réel si $i-j$ est impair, imaginaire pur si $i-j$ est pair.

L'exponentielle d'une matrice carrée de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$, où $C$ est une matrice-colonne et $D$ une matrice carrée, est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f(D)C & \exp(D) \end{pmatrix}$, où $f$ est la

fonction entière $u \mapsto \frac{e^u-1}{u}$. On déduit de cela, par un calcul facile, que l'on a

$$\log T_n(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -2\,P_1(z) & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -2\,P_2(z) & \log z\overline{z} & \ddots & & & \vdots \\ -2\,P_3(z) & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -2\,P_n(z) & 0 & \cdots & 0 & \log z\overline{z} & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

les nombres $P_k(z)$ étant donnés par la formule

$$P_k(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{0\le\ell<k} \frac{b_\ell}{\ell!} \log^\ell(z\overline{z})\,\mathrm{Re}(Li^{[c]}_{k-\ell}(z)) & \text{pour } k \text{ impair} \\ \displaystyle i \sum_{0\le\ell<k} \frac{b_\ell}{\ell!} \log^\ell(z\overline{z})\,\mathrm{Im}(Li^{[c]}_{k-\ell}(z)) & \text{pour } k \text{ pair,} \end{cases} \tag{18}$$

où $c$ est un chemin quelconque reliant $\frac{1}{2}$ à $z$ dans $\mathbf{C} - \{0,1\}$.

*Exemples.*- 1) On a $P_1(z) = -\log|1-z|$.

2) On a $P_2(z) = i\,D(z)$ où

$$D(z) = \mathrm{Im}\,(Li^{[c]}_2(z) + \log|z|\,\log^{[c]}(1-z)) \tag{19}$$

est une fonction dont les propriétés remarquables ont été notées pour la première fois par Bloch et Wigner (*cf.* [Bℓ1] et [Bℓ2]).

### 3.2. Propriétés des fonctions $P_k$ $(k \ge 2)$

La fonction $P_k : \mathbf{C} - \{0,1\} \to i^{k-1}\,\mathbf{R}$ est analytique réelle, et l'on a

$$P_k(\overline{z}) = \overline{P_k(z)} = (-1)^{k-1} P_k(z). \tag{20}$$

Elle satisfait pour tout entier $r \ge 1$ la *relation de distribution*

$$P_k(z^r) = r^{k-1} \sum_{\omega^r=1} P_k(\omega z) \tag{21}$$

qui se déduit de $(4_r)$ pour $|z| < 1$, et par prolongement analytique dans le cas général. Pour $k \geq 2$, elle satisfait aussi une *relation d'inversion*

$$P_k(z^{-1}) = (-1)^{k-1} P_k(z). \tag{22}$$

Celle-ci peut se déduire de (5) et (18) par un calcul quelque peu fastidieux ; elle est en fait un cas particulier d'équations fonctionnelles plus générales (*cf.* 4.3).

Il résulte des propriétés de la détermination principale du $k$-logarithme (§1) et de la relation d'inversion que, pour $k \geq 2$, $P_k$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ en posant

$$P_k(0) = P_k(\infty) = 0 \tag{23}$$

$$P_k(1) = \begin{cases} \zeta(k) & \text{pour } k \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } k \text{ pair.} \end{cases} \tag{24}$$

### 3.3. Différentielle des fonctions $P_k$

La relation (15) permet de dériver par rapport à $z$ la matrice $T_n(z)$ définie par la formule (16) ; on a

$$\frac{\partial}{\partial z} T_n(z) = \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\right) T_n(z) \tag{25}$$

et par suite ([LIE], III, p. 202)

$$\frac{\partial}{\partial z} \log T_n(z) = g(\mathrm{ad}(\log T_n(z))) \left(\frac{e_0}{z} + \frac{e_1}{z-1}\right), \tag{26}$$

où $g$ est la fonction $u \mapsto \frac{u}{e^u - 1}$. Cela permet de calculer les dérivées partielles de $P_k$. On a, pour tout $k \geq 1$,

$$\frac{\partial}{\partial z} P_k(z) = -\sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{b\ell}{\ell!} \frac{\log^{\ell-1}(z\overline{z})}{z} P_{k-\ell}(z) + \frac{b_{k-1}}{(k-1)!} \frac{\log^{k-1}(z\overline{z})}{2(1-z)} \tag{27}$$

et, d'après (20),

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} P_k(z) = (-1)^{k-1} \overline{\frac{\partial}{\partial z} P_k(z)}. \tag{28}$$

## 4. ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

### 4.1. Le cas du dilogarithme

Outre les relations de distribution et d'inversion, le dilogarithme satisfait la *relation de réflexion*

$$Li_2(1-z) = -Li_2(z) + \frac{\pi^2}{6} - \log z \log(1-z) \tag{29}$$

et une *équation fonctionnelle à cinq termes*

$$\begin{aligned} &Li_2\left(\frac{x}{1-x}\frac{y}{1-y}\right) \\ &= Li_2\left(\frac{y}{1-x}\right) + Li_2\left(\frac{x}{1-y}\right) - Li_2(x) - Li_2(y) - \log(1-x)\log(1-y), \end{aligned} \tag{30}$$

découverte sous des formes diverses (équivalentes modulo changement de variables, inversions et réflexions) par plusieurs mathématiciens au 19ème siècle (Spence, Abel, Hill, Kummer, Schaeffer, etc.). Il convient de préciser les déterminations de $Li_2$ et log choisies : on prend les déterminations principales pour $z \in \mathbf{C} - (]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[)$ dans (29) et pour $|x| + |y| < 1$ dans (30). Les relations (29) et (30) se déduisent immédiatement de (2) et (3), par dérivation.

La fonction $P_2$ satisfait des relations analogues, dans lesquelles les termes faisant intervenir des logarithmes disparaissent :

$$P_2(1-z) = -P_2(z) \tag{31}$$

pour tout $z \in \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ et

$$P_2\left(\frac{x}{1-x}\frac{y}{1-y}\right) = P_2\left(\frac{y}{1-x}\right) + P_2\left(\frac{x}{1-y}\right) - P_2(x) - P_2(y) \tag{32}$$

pour tout couple $(x, y)$ de points de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ distinct de $(0,1)$, $(1,0)$ et $(\infty, \infty)$. Cela se déduit par prolongement analytique et par continuité de l'expression (19) de $P_2$ en fonction de $Li_2$, de (29) et de (30). Une explication de ce phénomène sera donnée au numéro suivant.

*Remarques.*- 1) En combinant les relations d'inversion et de réflexion, on obtient, pour tout $z \in \mathbf{P}_1(\mathbf{C})$,

$$(33) \quad P_2(z) = P_2\left(\frac{z-1}{z}\right) = P_2\left(\frac{1}{1-z}\right) = -P_2(1-z) = -P_2\left(\frac{1}{z}\right) = -P_2\left(\frac{z}{z-1}\right).$$

Cela permet de récrire (32) (après avoir effectué le changement de variables $y \mapsto 1-y$)

$$(34) \qquad P_2\left(\frac{1-y^{-1}}{1-x^{-1}}\right) - P_2\left(\frac{1-y}{1-x}\right) + P_2\left(\frac{y}{x}\right) - P_2(y) + P_2(x) = 0$$

(pour $(x, y)$ distinct de $(0,0)$, $(1,1)$ et $(\infty,\infty)$).

Rappelons que, si $a$, $b$, $c$, $d$ sont quatre points distincts de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, leur birapport est le nombre complexe $r(a,b,c,d) = (a-c)(b-d)/(a-d)(b-c)$ ; il est invariant lorsqu'on effectue sur $\{a,b,c,d\}$ le produit de deux transpositions à supports disjoints. Posons

$$(35) \qquad \widetilde{P}_2(a,b,c,d) = P_2(r(a,b,c,d)).$$

La relation (33) signifie alors que l'on a

$$(36) \qquad \widetilde{P}_2(\sigma(a),\sigma(b),\sigma(c),\sigma(d)) = \varepsilon(\sigma)\,\widetilde{P}_2(a,b,c,d)$$

pour toute permutation $\sigma$ de $\{a,b,c,d\}$ de signature $\varepsilon(\sigma)$. Vu l'invariance du birapport sous l'action de $\mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$, on a, pour tout $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbf{C})$,

$$(37) \qquad \widetilde{P}_2(ga,gb,gc,gd) = \widetilde{P}_2(a,b,c,d).$$

Enfin, la relation (34) se traduit de la façon suivante : si $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$ sont cinq points distincts de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$, on a

$$(38) \qquad \sum_{i=1}^{5} (-1)^i\, \widetilde{P}_2(a_1,\cdots,\widehat{a_i},\cdots,a_5) = 0.$$

Il suffit en effet, d'après (37), de démontrer cette relation lorsque $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ est de la forme $(\infty,0,1,x,y)$ et on retrouve dans ce cas la formule (34).

2) Bloch [B$\ell$1] a démontré que, à un scalaire multiplicatif près, $P_2$ est l'unique fonction mesurable sur $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ satisfaisant l'équation fonctionnelle (34).

### 4.2. Équations fonctionnelles du $k$-logarithme

Soient $V$ une variété algébrique irréductible sur $\mathbf{C}$, $K$ le corps de ses fonctions rationnelles et $\mathbf{Z}[K-\{0,1\}]$ le groupe des combinaisons linéaires formelles, à coefficients dans $\mathbf{Z}$, d'éléments de $K-\{0,1\}$.

Soit $k$ un entier $\geq 2$. Pour tout élément $\xi = \sum n_f[f]$ de $\mathbf{Z}[K-\{0,1\}]$, on note $\alpha_k(\xi)$ l'élément $\sum n_f \underbrace{f\otimes\cdots\otimes f}_{k-2 \text{ termes}} \otimes (f\wedge(1-f))$ de $\underbrace{K^\times \otimes_{\mathbf{Z}} \cdots \otimes_{\mathbf{Z}} K^\times}_{k-2 \text{ termes}} \otimes_{\mathbf{Z}} (K^\times \wedge K^\times)$ et $\beta_k(\xi)$ son image dans $(K^\times/\mathbf{C}^\times)\otimes_{\mathbf{Z}}\cdots\otimes_{\mathbf{Z}}(K^\times/\mathbf{C}^\times)\otimes_{\mathbf{Z}}((K^\times/\mathbf{C}^\times)\wedge(K^\times/\mathbf{C}^\times))$. On dit que $\xi$ satisfait la condition $(EF_k)$ s'il existe une détermination holomorphe de $\sum n_f\, Li_k \circ f$ sur un ouvert non vide de $V(\mathbf{C})$ qui peut s'exprimer comme un polynôme à coefficients complexes en des fonctions de la forme $Li_j \circ g$, avec $1 \leq j < k$ et $g \in K^\times$. (Au moins localement, cette condition ne dépend pas de la détermination choisie.)

**THÉORÈME 1.**- *Soient $k$ un entier $\geq 2$ et $\xi = \sum n_f[f]$ un élément de $\mathbf{Z}[K-\{0,1\}]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *$\xi$ satisfait la condition $(EF_k)$.*

b) *On a $\beta_k(\xi) = 0$.*

c) *Il existe $\xi' \in \mathbf{Z}[\mathbf{C}-\{0,1\}]$ tel que $2\alpha_k(\xi-\xi') = 0$.*

**THÉORÈME 2.**- *Soient $k$ un entier $\geq 2$ et $\xi = \sum n_f[f]$ un élément de $\mathbf{Z}[K-\{0,1\}]$ satisfaisant les conditions équivalentes du th. 1. Soit $U$ le plus grand ouvert de $V$ tel que toute fonction $f \in \mathrm{Supp}(\xi)$ définisse un morphisme $U \to \mathbf{P}_1$. L'application $x \mapsto \sum n_f\, P_k(f(x))$, et plus généralement chacune des applications $x \mapsto \sum n_f \log^{k-\ell}(|f(x)|)\, P_\ell(f(x))$, avec $2 \leq \ell \leq k$, est constante sur $U$.*

Le th. 1 donne des conditions nécessaires et suffisantes simples à vérifier pour qu'à $\sum n_f[f]$ corresponde une équation fonctionnelle satisfaite par $Li_k$. Le th. 2 explique pourquoi $P_k$ satisfait alors à une équation fonctionnelle analogue, mais sans termes parasites faisant intervenir les $Pj$ pour $j < k$.

Ces énoncés ne semblent pas figurer explicitement dans la littérature. Leur

démonstration est trop longue pour être développée dans cet exposé et sera publiée ailleurs. Indiquons-en les grandes lignes : on se ramène facilement au cas où $V$ est projective et lisse. L'implication a) $\Longrightarrow$ b) se déduit alors d'un théorème de Wojtkowiak ([POL], ch. 10,th. F), dont malheureusement la preuve n'est publiée que pour $V = \mathbf{P}_1$. L'implication b) $\Longrightarrow$ c) se déduit d'un énoncé plus précis (et non trivial) : si l'on a $\beta_k(\xi) = 0$, et si $a$ est un point de l'ouvert $U$ considéré dans le th. 2, alors l'élément $\xi' = \sum^* n_f[f(a)]$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{C} - \{0,1\}]$ (où $\sum^*$ signifie que l'on ne somme que sur les $f$ tels que $f(a) \notin \{0,1,\infty\}$) satisfait la relation $2\alpha_k(\xi - \xi') = 0$. L'implication c) $\Longrightarrow$ a) se déduit facilement de l'expression de $Li_k$ comme intégrale itérée. Le théorème 2 se démontre par récurrence sur $k$, en utilisant l'expression de la différentielle de $P_k$ trouvée au §3, n° 3. Les arguments sont des variantes de ceux de Zagier dans [Za], où est traité le cas $V = \mathbf{P}_1$.

Sous les hypothèses du th. 2, il est commode de noter $P_k(\xi)$ la valeur commune des expressions $\Sigma n_f P_k(f(x))$, pour $x \in U$.

### 4.3. Exemples

Soient $x, y$ des indéterminées.

1) L'élément $[x]+(-1)^k[x^{-1}]$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{C}(x)-\{0,1\}]$ satisfait la condition $(EF_k)$ : en effet son image par $\alpha_k$

$$x \otimes \cdots \otimes x \otimes (x \wedge (1-x)) + (-1)^k x^{-1} \otimes \cdots \otimes x^{-1} \otimes (x^{-1} \wedge (1-x^{-1}))$$

est égale à $x \otimes \cdots \otimes x \otimes (x \wedge (-1))$, donc est annulée par 2. Cela fournit une démonstration de la relation d'inversion (22).

2) L'élément $[x] + [1-x]$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{C}(x) - \{0,1\}]$ satisfait la condition $(EF_2)$.

3) Pour tout entier $r \geq 1$, l'élément $[x^r] - r^{k-1} \sum_{\omega^r=1} [\omega x]$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{C}(x) - \{0,1\}]$ satisfait la condition $(EF_k)$.

4) L'élément $\left[\frac{1-y^{-1}}{1-x^{-1}}\right] - \left[\frac{1-y}{1-x}\right] + \left[\frac{y}{x}\right] - [y] + [x]$ satisfait la condition $(EF_2)$ ; un calcul immédiat montre que son image par $\alpha_2$ est égale à $xy \wedge (-1)$, donc annulée par 2.

5) Kummer en 1840 a découvert une équation fonctionnelle du trilogarithme ; elle correspond à l'élément $\xi = 2[x] + 2[y] + 2\left[\frac{x(1-y)}{x-1}\right] + 2\left[\frac{y(1-x)}{y-1}\right] + 2\left[\frac{1-x}{1-y}\right] + 2\left[\frac{x(1-y)}{y(1-x)}\right] - [xy] - \left[\frac{x}{y}\right] - \left[\frac{x(1-y)^2}{y(1-x)^2}\right]$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{C}(x,y) - \{0,1\}]$. On a $P_3(\xi) = 2\zeta(3)$.

Récemment, Goncharov ([Go1]) a découvert une équation fonctionnelle pour le trilogarithme, faisant intervenir 22 termes en trois indéterminées, et qui implique par spécialisation celle de Kummer.

6) Des éléments $\xi$ non triviaux (*i.e.* ne provenant pas des exemples 1) et 2)) satisfaisant $(EF_k)$ ont été découverts par Kummer pour $k = 4$ et 5 ; des recherches récentes sur ordinateur ont permis à Gangl d'en trouver pour $k = 6$ et 7. Pour plus de détails, on consultera le chapitre 16 et l'appendice A de [POL].

## 5. POLYLOGARITHMES ET VALEURS SPÉCIALES DE FONCTIONS ZÊTA

Dans ce paragraphe, $F$ est un corps de nombres (*i.e.* une extension finie de $\mathbf{Q}$), $d$ son degré, $\Sigma$ l'ensemble de ses plongements complexes, $r_1$ (resp. $2r_2$) le nombre de ses plongements réels (resp. complexes non réels). On note $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$ l'ensemble des combinaisons linéaires formelles, à coefficients dans $\mathbf{Z}$, d'éléments de $\mathbf{P}_1(F)$.

### 5.1. L'homomorphisme $P_k^F$

Soit $k$ un entier $\geq 2$. Soit $(i^{k-1}\mathbf{R})_+^\Sigma$ l'ensemble des familles $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ d'éléments de $i^{k-1}\mathbf{R}$ telles que $x_{\overline{\sigma}} = \overline{x_\sigma}$ pour tout $\sigma \in \Sigma$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension $d_k$, avec $d_k = r_1 + r_2$ si $k$ est impair et $d_k = r_2$ si $k$ est pair. D'après la formule (20), on définit un homomorphisme $P_k^F : \mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)] \to (i^{k-1}\mathbf{R})_+^\Sigma$ en posant

$$P_k^F(\Sigma\, n_x[x]) = (\sum n_x\, P_k(\sigma(x)))_{\sigma\in\Sigma}. \tag{39}$$

### 5.2. Les sous-groupes $\mathcal{R}_k(F)$ et $\mathcal{A}_k(F)$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$

Nous allons définir deux familles $(\mathcal{R}_k(F))_{k\geq 1}$ et $(\mathcal{A}_k(F))_{k\geq 2}$ de sous-groupes de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$. Si $x$ est un élément de $\mathbf{P}_1(F)$, l'image canonique de $[x]$ dans $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]/\mathcal{R}_k(F)$ sera notée $\{x\}_k$. On procède par récurrence :

a) $\mathcal{R}_1(F)$ est le sous-groupe de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$ engendré par $[0]$, $[\infty]$ et les éléments $[xy] - [x] - [y]$, pour $(x, y)$ parcourant $F^\times \times F^\times$. Le groupe $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]/\mathcal{R}_1(F)$ s'identifie canoniquement à $F^\times$.

b) Supposons $k \geq 2$. Notons $u_2 : \mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)] \to F^\times \wedge F^\times$ l'homomorphisme défini par $u_2([x]) = \{x\}_1 \wedge \{1-x\}_1$ et, pour $k \geq 3$, notons $u_k : \mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)] \to F^\times \otimes_{\mathbf{Z}} (\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]/\mathcal{R}_{k-1}(F))$ l'homomorphisme défini par $u_k([x]) = \{x\}_1 \otimes \{x\}_{k-1}$. Alors $\mathcal{A}_k(F)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$ dont l'image par $u_k$ est de torsion, et $\mathcal{R}_k(F)$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{A}_k(F)$ dont l'image par $P_k^F$ est nulle.

*Remarques.*- 1) L'élément [1] appartient à $\mathcal{A}_k(F)$ pour tout $k \geq 2$. Il appartient à $\mathcal{R}_k(F)$ si et seulement si $k$ est pair ou égal à 1 (formule (24)). Les éléments [0] et [$\infty$] appartiennent à $\mathcal{R}_k(F)$ pour tout $k \geq 1$ (formule (23)).

2) Pour tout $x \in F^\times$ et tout $k \geq 2$, $[x] + (-1)^k[x^{-1}]$ appartient à $\mathcal{R}_k(F)$. Cela résulte des définitions et de la formule (22), par récurrence sur $k$.

3) Supposons $k \geq 2$. Pour qu'un élément $\sum n_x[x]$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$ appartienne à $\mathcal{A}_k(F)$ (resp. $\mathcal{R}_k(F)$), il faut et il suffit que, quels que soient les homomorphismes $v_1, \cdots, v_k$ de $F^\times$ dans $\mathbf{Z}$, on ait

$$\sum n_x\, v_1(x) \cdots v_{k-2}(x)\,(v_{k-1}(x)\, v_k(1-x) - v_{k-1}(1-x)\, v_k(x)) = 0 \tag{40}$$

et

$$\sum n_x\, v_1(x) \cdots v_{k-j}(x)\, P_j(\sigma(x)) = 0 \tag{41}$$

pour $2 \leq j < k$ (resp. $2 \leq j \leq k$) et $\sigma \in \Sigma$. Cela résulte par récurrence sur $k$ des définitions.

### 5.3. La conjecture de Zagier (forme initiale)

**Conjecture 1** (Zagier).- *Pour tout $k \geq 2$, l'image de $\mathcal{A}_k(F)$ par l'homomorphisme $P_k^F$ est un réseau de $(i^{k-1}\mathbf{R})_+^\Sigma$, dont le covolume est un multiple rationnel de $|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}\, \zeta_F(k)/\pi^{k(d-d_k)}$, où $\Delta_F$ est le discriminant et $\zeta_F$ la fonction zêta de Dedekind du corps $F$.*

Pour plusieurs choix du corps $F$ et de l'entier $k \geq 2$, Zagier (*cf.* [Za] et [POL], App. A) a exhibé de grandes familles d'éléments de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$ qui numériquement semblent satisfaire les critères (40) et (41) d'appartenance à $\mathcal{A}_k(F)$. Il calcule les images de ces éléments par $P_k^F$ et constate qu'elles semblent numériquement engendrer un réseau de $(i^{k-1}\mathbf{R})_+^\Sigma$, dont le covolume est un multiple de $|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}\, \zeta_F(k)/$

$\pi^{k(d-d_k)}$ par un nombre rationnel de petits numérateur et dénominateur. Cela fournit une évidence très convaincante à la conjecture.

*Remarques.*- 1) En fait, Zagier a énoncé de nombreuses variantes de la conjecture 1 (*loc. cit.*).

2) Dire que $P_k^F(\mathcal{A}_k(F))$ *contient* un réseau de $(i^{k-1}\mathbf{R})_+^\Sigma$ satisfaisant aux conditions de la conjecture 1 équivaut à dire qu'il existe des ensembles $T \subset \mathcal{A}_k(F)$ et $S \subset \Sigma$ de cardinal $d_k$ tels que la valeur absolue du déterminant $\det(P_k(\sigma(x))_{x\in T,\sigma\in S})$ soit un multiple rationnel non nul de $|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}\,\zeta_F(k)/\pi^{k(d-d_k)}$. Dans ce cas, pour que $P_k^F(\mathcal{A}_k(F))$ soit un réseau de $(i^{k-1}\mathbf{R})_+^\Sigma$, il faut et il suffit que tous les déterminants de la forme précédente soient produits de $|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}\,\zeta_F(k)/\pi^{k(d-d_k)}$ par des nombres rationnels à dénominateurs bornés.

3) Certains auteurs remplacent, dans la conjecture 1, $\mathcal{A}_k(F)$ par son intersection avec $\mathbf{Z}[F-\{0,1\}]$. Cela conduit à un énoncé équivalent puisque l'on a $P_k^F(0) = P_k^F(\infty) = 0$ et $P_k^F(1) = 2^{k-1}P_k^F(-1)/(1-2^{k-1})$ (formule (21) pour $r=2$).

### 5.4. La conjecture de Zagier (forme $K$-théorique)

Soit $k$ un entier $\geq 2$. Dans [Bo], Borel définit un homomorphisme (le régulateur) du groupe de $K$-théorie $K_{2k-1}(F)$ dans $(i^{k-1}\mathbf{R})_+^\Sigma$, et prouve que son noyau est fini et que son image est un réseau dont le covolume est un multiple rationnel de $|\Delta_F|^{\frac{1}{2}}\,\zeta_F(k)/\pi^{k(d-d_k)}$. Notons reg le prolongement par linéarité du régulateur à $K_{2k-1}(F)_\mathbf{Q} = K_{2k-1}(F)\otimes_\mathbf{Z}\mathbf{Q}$. Il était évidemment tentant de formuler la conjecture suivante, qui implique la conjecture 1.

**Conjecture 2.**- *L'image de $\mathcal{A}_k(F)$ par l'homomorphisme $P_k^F$ est un réseau (i.e. un sous-$\mathbf{Z}$-module libre de rang maximum) du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel* $\mathrm{reg}(K_{2k-1}(F)_\mathbf{Q})$.

### 5.5. Description conjecturale de $\mathcal{R}_k(F)$

Soient $X$ une indéterminée, $k$ un entier $\geq 2$ et $\sum n_f[f]$ un élément de $\mathbf{Z}[F(X)-\{0,1\}]$ tel que $\sum n_f \underbrace{f\otimes\cdots\otimes f}_{k-2\text{ termes}}\otimes(f\wedge(1-f))$ soit nul dans $\underbrace{F(X)^\times\otimes_\mathbf{Z}\cdots\otimes_\mathbf{Z}F(X)^\times}_{k-2\text{ termes}}\otimes_\mathbf{Z}(F(X)^\times\wedge F(X)^\times)$. On peut alors démontrer que, quels que soient $a,b$ dans $\mathbf{P}_1(F)$, l'élément $\sum n_f([f(a)]-[f(b)])$ appartient à

$\mathcal{R}_k(F)$. Zagier conjecture que, réciproquement, tout élément de $\mathcal{R}_k(F)$ possède un multiple de cette forme.

### 5.6. Les résultats

a) Pour $k = 2$, toutes les conjectures des numéros 3, 4, 5 sont des conséquences des travaux de Bloch et Suslin ([Su]).

b) Pour $k \geq 3$, il n'y a à ma connaissance aucun cas où l'on sache que l'image de $\mathcal{A}_k(F)$ par l'homomorphisme $P_k^F$ est de type fini sur $\mathbf{Z}$ (sauf bien sûr le cas trivial où l'on a $d_k = 0$, c'est-à-dire où $F$ est totalement réel et $k$ pair).

c) L'image par $P_k^F$ de $\mathcal{A}_k(F)$ contient un sous-groupe d'indice fini de $\mathrm{reg}(K_{2k-1}(F))$ pour $k = 3$, d'après Goncharov ([Go2] et [Go3]). Dans ce cas, la remarque 2 du n° 3 s'applique, d'où une expression de $\zeta_F(3)$ en termes de trilogarithmes d'éléments de $F$ et de leurs conjugués.

d) On peut définir des sous-groupes $\mathcal{R}'_k(F)$ et $\mathcal{A}'_k(F)$ de $\mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)]$ de la même façon qu'au numéro 2, à ceci près que $u_2$ est remplacé par $u'_2 : \mathbf{Z}[\mathbf{P}_1(F)] \to F^\times \otimes F^\times$ avec $u'_2([x]) = \{x\}_1 \otimes \{1-x\}_1$. Les groupes ainsi obtenus sont inclus dans $\mathcal{R}_k(F)$ et $\mathcal{A}_k(F)$ respectivement. Beilinson et Deligne ([B,D])ont annoncé que l'on a $P_k^F(\mathcal{A}'_k(F)) \subset \mathrm{reg}(K_{2k-1}(F)_{\mathbf{Q}})$ pour tout $k \geq 2$.

## BIBLIOGRAPHIE


[Bℓ1] S. BLOCH - *Higher regulators, algebraic K-theory and zeta functions of elliptic curves*, Lect. Notes U.C. Irvine, 1977.

[Bℓ2] S. BLOCH - *Applications of the dilogarithm function in algebraic K-theory and algebraic geometry*, International Symposium on Algebraic Geometry, Kyoto, 1977, 103-114.

[B,D] A. BEILINSON et P. DELIGNE - *Motivic Polylogarithm and Zagier conjecture*, preprint.

[Bo] A. BOREL - *Cohomologie de* $\mathrm{SL}_n$ *et valeurs de fonctions zêta aux points entiers*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 4 (1977), 613-636.

[De] P. DELIGNE - *Interprétation motivique de la conjecture de Zagier reliant polylogarithmes et régulateurs*, preprint.

[Go1] A.B. GONCHAROV - *The classical trilogarithm, algebraic $K$-theory of fields and Dedekind zeta functions*, Bull. of the AMS 29 (1991), 155-161.

[Go2] A.B. GONCHAROV - *Geometry of configurations, polylogarithms and motivic cohomology*, preprint.

[Go3] A.B. GONCHAROV - *Polylogarithms and motivic Galois groups*, preprint.

[Ha] R.M. HAIN - *Classical Polylogarithms*, preprint, 1992.

[Le] L. LEWIN - *Polylogarithms and Associated Functions*, Elsevier North-Holland, New York, 1981.

[LIE] N. BOURBAKI - *Groupes et algèbres de Lie*, éd. Hermann, 1972.

[POL] *Structural Properties of Polylogarithms* (L. Lewin editor), Math. Surveys and Monographs, Vol. 37, AMS, 1991.

[Ra] D. RAMAKRISHNAN - *Analogs of the Bloch-Wigner function for higher polylogarithms*, Applications of Algebraic $K$-Theory to Algebraic Geometry and Number Theory, Contemporary Math., Vol. 55 part I, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1986, 371-376.

[Su] A.A. SUSLIN - *Algebraic $K$-theory of fields*, Proc. Internat. Congr. Math. (Berkeley, 1986), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1987, 222-244.

[Wo] Z. WOJTKOWIAK - *A construction of analogs of the Bloch-Wigner function*, Math. Scand. **64**,1989, 140-142.

[Za] D. ZAGIER - *Polylogarithms, Dedekind zeta functions and the algebraic $K$-theory of fields*, in Arithmetic Algebraic Geometry, Progress in Math. 89, 1991.

Joseph OESTERLÉ

Université de Paris VI
Département de Mathématiques
Tour 45-46, 5ème étage
4 place Jussieu
F-75230 PARIS CEDEX 05