Astérisque

PIERRE VOGEL

Invariants de Vassiliev des nœuds [d'après D. Bar-Natan, M. Kontsevich et V.A. Vassiliev]

Astérisque, tome 216 (1993), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 769, p. 213-232

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1992-1993__35__213_0>

© Société mathématique de France, 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
45ème année, 1992-93, n° 769

Mars 1993

INVARIANTS DE VASSILIEV DES NŒUDS
[d'après D. Bar-Natan, M. Kontsevich et V.A. Vassiliev]

par **Pierre VOGEL**

La théorie des invariants de Vassiliev a été introduite par V. A. Vassiliev [V1] en 1989. Considérons l'espace de toutes les applications différentiables du cercle S^1 dans l'espace usuel $\mathbf{R}^3$. On peut voir l'espace des nœuds comme le complémentaire dans cet espace de l'espace des fonctions singulières appelé discriminant. A l'aide d'une technique de désingularisation, Vassiliev transforme ce discriminant en un espace naturellement stratifié où chaque strate a une topologie relativement simple, ce qui produit une suite spectrale (la suite spectrale de Vassiliev) dont l'aboutissement est un certain anneau d'invariants de nœuds appelés invariants de Vassiliev. La convergence de cette suite spectrale est une question largement ouverte, mais Vassiliev donne une description du premier terme de celle-ci en terme de nœuds ayant un certain nombre de singularités.

Reprenant ensuite des idées implicitement contenues dans les papiers de Vassiliev ([V1] [V2]), J. S. Birman et X-S. Lin [BL] proposent une définition directe des invariants de Vassiliev, en terme de nœuds singuliers particuliers, et montrent, entre autre que la plupart des invariants connus comme les polynômes de Jones [J], de Kauffman [KA] et le polynôme HOMFLY [F] s'expriment en termes d'invariants de Vassiliev.

Les invariants de Vassiliev forment une suite croissante d'anneaux commutatifs de type fini, et dualement on obtient une filtration décroissante de l'anneau librement engendré par les nœuds. La question de savoir si cette filtration sépare les nœuds est toujours ouverte. Quoi qu'il en soit, la compréhension de cette filtration ou du gradué associé s'avère fondamentale en théorie des nœuds.

Les travaux de Bar-Natan et de Kontsevich en 1992 sont à cet égard particulièrement riches de résultats que l'on peut schématiser ainsi:

— Construction d'une algèbre de Hopf en terme de certains diagrammes (diagrammes de Feynman). C'est une algèbre graduée, de type fini en chaque degré, définie en terme de générateurs (les diagrammes) et de certaines relations

— Description d'un morphisme naturel surjectif de cette algèbre de Hopf sur

le gradué associé à l'algèbre des nœuds

— Construction d'une intégrale (intégrale de Kontsevich) qui associe à chaque nœud un élément du complété de l'algèbre des diagrammes, montrant ainsi que la $\mathbf{R}$-algèbre des nœuds complétée par la filtration de Vassiliev est isomorphe au complété de l'algèbre sur $\mathbf{R}$ des diagrammes de Feynman. Cette intégrale est en quelque sorte l'invariant de Vassiliev universel.

L'étude des nœuds est donc en très grande partie ramenée à l'étude de cette algèbre de diagrammes.

1. INVARIANTS DE VASSILIEV

1.1. Invariants de nœuds

Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des nœuds orientés, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'isotopie d'applications différentiables injectives du cercle S^1 dans $\mathbf{R}^3$. Les éléments de $\mathcal{N}$ seront dorénavant appelé des nœuds. Un *invariant de nœuds* à valeur dans un groupe abélien E est une application de $\mathcal{N}$ dans E. L'ensemble de ces invariants sera noté $\mathcal{I}(\mathcal{N}, E)$. Si A est un anneau, $\mathcal{I}(\mathcal{N}, A)$ est une A-algèbre.

On appellera *nœud singulier* une application différentiable de S^1 dans $\mathbf{R}^3$ n'ayant ni point singulier ni point triple et n'ayant que des points doubles simples. L'espace des nœuds singuliers ayant p points doubles sera noté $\mathcal{E}_p$.

Soit K un nœud singulier et x un point double de K. On peut modifier légèrement K au voisinage de x pour supprimer ce point double. On obtient de ce fait, suivant la modification faite (dite positive ou négative), deux nouveaux nœuds singulier K_+ et K_- comme l'illustre le dessin suivant:

K :

K_+ :
K_- :

Lemme 1. – *Soit I un invariant de nœuds. Alors I s'étend de façon unique en une fonction définie sur tous les nœuds singuliers et vérifiant la propriété suivante:*

Si K est un nœud singulier, et si K_+ et K_- sont les nœuds singuliers obtenus comme ci-dessus, on a:

$$I(K) = I(K_+) - I(K_-) \tag{1}$$

L'extension de l'application se détermine de la façon suivante:

Si K est un nœud singulier, on pose:

$$I(K) = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}(K)} \varepsilon(\alpha) I(K_\alpha)$$

où la somme se fait sur l'ensemble $\mathcal{F}(K)$ des fonctions qui à chaque point double de K associe un élément de $\{+1, -1\}$. Le symbole K_α désigne le nœud K modifié en chaque point double x de façon positive ou négative suivant le signe de $\alpha(x)$ et $\varepsilon(\alpha)$ est le produit des nombres $\alpha(x)$.

1.2. Définition

Soit I un invariant de nœuds. On dit que I est un *invariant de Vassiliev* de degré inférieur ou égal à n si I est nul sur tout nœud singulier ayant au moins $n+1$ points doubles.

Remarque. – On peut également considérer des invariants sur des entrelacs (objets géométriques formés de plusieurs nœuds disjoint). On définit alors comme plus haut des entrelacs singuliers et une version pour entrelacs du lemme 1 reste valable. On peut ainsi généraliser la notion d'invariant de Vassiliev pour les entrelacs.

Remarque. – Tout invariant de Vassiliev de degré 0 est évidemment constant, la formule (1) devenant pour un tel invariant I:

$$I(K_+) = I(K_-)$$

Il en est de même pour les invariants de Vassiliev de degré 1. Mais ce n'est plus vrai au-delà.

Il y a en fait énormément d'invariants de Vassiliev. Ainsi, tous les invariants polynomiaux de nœuds provenant d'algèbres de Lie, comme le polynôme de Jones [J], le polynôme HOMFLY [F] ou le polynôme de Kauffman [KA], ont, après un changement de variable adéquat, comme coefficients des invariants de Vassiliev [BL]. Considérons, par exemple le cas du polynôme de Conway ∇ qui est une spécialisation particulière du polynôme HOMFLY. Il s'agit d'un polynôme en t associé à tout entrelacs (orienté) possédant la propriété suivante: si E est un entrelacs singulier possédant un seul point double, les modifications positive et négative de E au voisinage de celui-ci produisent deux entrelacs E_+ et E_-, mais on obtient également un autre entrelacs E_0:

E :

E_+ :
E_- :
E_0 :

Le polynôme de Conway vérifie alors la relation suivante:

$$\nabla(E_+) - \nabla(E_-) = t\nabla(E_0) \tag{2}$$

Proposition 2. (Bar-Natan [BN1][BL]) – *Le $n^{\text{ième}}$ cœfficient du polynôme de Conway est un invariant de Vassiliev de degré n.*

En effet la formule (2) implique que si E est un entrelacs singulier avec $n+1$ points doubles, le polynôme $\nabla(E)$ est égal à $t^{n+1}\nabla(E')$ où E' est un entrelacs qui se déduit de E ce qui implique le résultat.

1.3. Définition

Soient $n \geq 0$ un entier et E un ensemble. On notera $V_n(E)$ l'ensemble des invariants de Vassiliev à valeurs dans E, de degré $\leq n$.

Proposition 3. – *Soit A un anneau intègre. Alors les A-module $V_n(A)$ forment une suite croissante de sous-modules libres de type fini de $\mathcal{I}(\mathcal{N}, A)$:*

$$V_0(A) \subset V_1(A) \subset V_2(A) \subset \ldots \subset \mathcal{I}(\mathcal{N}, A)$$

De plus on a pour tout p et q: $V_p(A).V_q(A) \subset V_{p+q}$

Si A n'est pas intègre, $V_n(A)$ n'est pas nécessairement libre de type fini, mais dans tous les cas $V_n(A)$ est isomorphe à un module $\mathrm{Hom}(M, A)$ où M est un $\mathbf{Z}$-module de type fini. Il est clair que l'ensemble $V(A) = \cup V_n(A)$ des invariants de Vassiliev n'est pas l'anneau $\mathcal{I}(\mathcal{N}, A)$ de tous les invariants de nœuds, ne serait-ce que pour des questions de cardinal. On peut cependant poser la conjecture suivante:

Conjecture A . – *Les invariants de Vassiliev distinguent tous les nœuds.*

2. L'ALGÈBRE DES NŒUDS

Soit $\Lambda = \mathbf{Z}[\mathcal{N}]$ le $\mathbf{Z}$-module libre de base $\mathcal{N}$. L'opération de somme connexe qui connecte deux nœuds mis préalablement dans deux demi-espaces disjoints, induit sur $\mathcal{N}$ une structure de monoïde commutatif unitaire et par conséquent sur Λ une structure d'algèbre sur $\mathbf{Z}$. De plus l'application $K \mapsto K \otimes K$ définit une comultiplication Δ de Λ dans $\Lambda \otimes \Lambda$ qui est un morphisme d'algèbre coassociatif et cocommutatif. De ce fait Λ est une algèbre de Hopf (sans toutefois posséder d'antipode).

Un invariant I de nœuds à valeur dans un anneau A est clairement une application linéaire de Λ dans A, et l'extension de I à tous les nœuds peut se voir de la façon suivante:

Soit K un nœud singulier. Alors l'élément $[K] = \sum_{\alpha \in \mathcal{F}(K)} \varepsilon(\alpha) K_\alpha$ est un élément de Λ et $I(K) = I([K])$ est clairement défini.

Notation. – On désignera par I_n le sous-module de Λ engendré par les classes des nœuds singuliers de $\mathcal{E}_n$.

On peut également considérer l'inclusion $i : \mathcal{N} \subset \Lambda$ comme l'invariant de nœuds universel et $[K]$ n'est autre que l'élément $i(K)$. De plus, pour tout entier n, l'application canonique i_n de $\mathcal{N}$ dans Λ/I_{n+1} est l'invariant de Vassiliev de degré $\leq n$ universel. On a donc pour tout $n \geq 0$:

$$V_n(A) = \mathrm{Hom}(\Lambda/I_{n+1}, A)$$

Proposition 4. – *Les sous-modules I_n forment une filtration de Λ compatible avec la structure d'algèbre de Hopf:*

$$\Lambda = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$$

$$\forall\, p, q \qquad I_p\, I_q \subset I_{p+q}$$

$$\forall\, n \quad \Delta(I_n) \subset \bigoplus_{p+q=n} I_p \otimes I_q$$

Soit $G\Lambda = \oplus G_n\Lambda = \oplus I_n/I_{n+1}$ le gradué associé à la filtration $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$. $G\Lambda$ est une algèbre de Hopf graduée sur $\mathbf{Z}$.

Proposition 5. – *$G\Lambda$ est une algèbre de Hopf graduée, de type fini sur $\mathbf{Z}$ en chaque degré, et l'algèbre $G\Lambda \otimes \mathbf{Q}$ est une algèbre de polynômes en des générateurs homogènes.*

Mis à part le fait que $G\Lambda$ est de type fini en chaque degré, et qui sera montré dans la partie suivante, la proposition 5 est clairement conséquence de la proposition 4, et celle-ci se montre en exprimant KK' et $\Delta(K)$ lorsque K et K' sont des nœuds singuliers. Le cas du produit est simple et KK' s'exprime de la même façon que dans le cas des vrai nœuds. Le cas du coproduit est plus technique, mais on a la formule:

$$\Delta(K) = \sum_{\alpha \geq 0} K_\alpha \otimes K_{\alpha-1} \tag{3}$$

où α parcours l'ensemble des fonctions de l'ensemble D des points doubles de K dans $\{0, 1\}$, et où, lorsque β est une fonction de D dans $\{-1, 0, +1\}$, K_β désigne

le nœud K modifié de façon positive là où β vaut $+1$, de façon négative là où β vaut -1 et non modifié ailleurs.

Comme dans toute algèbre de Hopf graduée commutative et cocommutative, on obtient un système de générateurs polynomiaux en prenant une base homogène de l'espace vectoriel des éléments primitifs, c'est-à-dire des éléments x de $G\Lambda \otimes \mathbf{Q}$ vérifiant: $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$.

Les résultats de la partie 1 sont clairement conséquences de ces deux propositions, et la conjecture A est impliquée par la conjecture plus forte suivante:

Conjecture B . – *L'intersection des modules I_n est nulle.*

3. LES DIAGRAMMES DE CORDES

3.1. Définition

On appelle *diagramme de cordes* la figure formée par un cercle orienté et un nombre fini de cordes de ce cercle ne se rencontrant pas sur le cercle. Plus précisément on appellera diagramme de cordes une classe d'isomorphisme de telles figures. L'ensemble des diagrammes de cordes sera noté $\mathcal{D}^c$. Cet ensemble est gradué par le nombre de cordes et l'ensemble $\mathcal{D}^c_n$ des diagrammes de cordes munis de n cordes est un ensemble fini.

Considérons un diagramme de corde $D \in \mathcal{D}^c_n$. Ce diagramme est représenté par des cordes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ du cercle standard. Soient x_i et y_i les extrémités de c_i. Alors il existe une unique classe d'homotopie régulière d'immersion $[f]$ du cercle standard dans $\mathbf{R}^3$ prenant pour chaque i la même valeur en x_i et en y_i. Chaque représentant f de $[f]$ qui est injectif en dehors de ces points et qui définit ainsi un nœud singulier à n points doubles induit un élément K de I_n. On passe d'un tel représentant f à un autre en faisant passer un certain nombre de fois une branche du cercle de part et d'autre d'une autre. L'élément K de I_n est donc bien défini modulo le sous-module engendré par les éléments $L - L'$ où L' est obtenu à partir du nœud singulier à n points doubles L en faisant une modification du type: dessous-dessus $\mapsto$ dessus-dessous, c'est-à-dire modulo I_{n+1}.

Cette construction définit ainsi une application $\varphi : \mathcal{D}_n^c \to G_n\Lambda$, et l'application induite de $\mathbf{Z}[\mathcal{D}_n^c]$ dans $G_n\Lambda$ est clairement surjective, ce qui montre que $G_n\Lambda$ est un $\mathbf{Z}$-module de type fini.

3.2. La relation des quatre termes (4T)

Proposition 5. – *L'application φ vérifie les propriétés suivantes:*

— *Soit δ_1 le seul diagramme à une corde. Alors:*

$$\varphi(\delta_1) = 0 \tag{4}$$

— *Soit D_1, D_2, D_3, D_4 quatre diagrammes de cordes qui ne diffèrent qu'en trois parties du cercle et en deux cordes, et qui ont, en ces trois parties du cercle, les formes suivantes:*

D_1 :

D_2 :

D_3 :

D_4 :

Alors on a:

$$\varphi(D_1) - \varphi(D_2) = \varphi(D_3) - \varphi(D_4) \tag{4T}$$

Soit K_1 un nœud singulier correspondant au diagramme D_1. Les deux parties (1) et (2) du cercle donnent deux parties d'axes orientés sécants en O dans $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^3$. On peut alors choisir des nœuds singuliers K_2, K_3 et K_4 correspondant au diagrammes D_2, D_3, D_4 et qui ne diffèrent de K_1 que par le fait que la partie (3) du cercle traverse le plan $\mathbf{R}^2$ en l'un ou l'autre des axes et d'un côté ou de l'autre de O. La formule (4T) est alors conséquence de (1) appliqué à l'invariant universel $i : \mathcal{N} \to \Lambda$.

D_1 :

D_2 :

D_3 :

D_4 :

3.3. L'algèbre des diagrammes de cordes

On désigne par $\mathcal{A}$ le $\mathbf{Z}$-module gradué, quotient de $\oplus\mathbf{Z}[\mathcal{D}_n^c]$ par les relations de type (4T), c'est-à-dire les relations:

$$D_1 - D_2 - D_3 + D_4 \equiv 0$$

où D_1, D_2, D_3, D_4 sont des diagrammes de cordes considérés dans la proposition 5.

Théorème 6. – *Le module gradué $\mathcal{A}$ est une algèbre de Hopf graduée commutative et cocommutative et l'application φ induit un épimorphisme d'algèbre de Hopf de l'algèbre réduite quotient $\mathcal{A}^r = \mathcal{A}/(\delta_1)$ sur l'algèbre $G\Lambda$.*

La comultiplication $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ est suggérée par la formule (3). Elle est donc définie par:

$$\Delta(D) = \sum D' \otimes D''$$

où D' est obtenu en enlevant un certain nombre de cordes à D, et D'' en enlevant les autres, la somme portant sur toutes ces possibilités.

La multiplication de deux diagrammes de cordes D et D' est obtenue en faisant la somme connexe de D et D' en deux points des cercles non situés sur les cordes. L'ambiguïté de cette multiplication disparait dans le quotient $\mathcal{A}$ de $\oplus\mathbf{Z}[\mathcal{D}_n^c]$.

Remarque. – L'algèbre $\mathcal{A} \otimes \mathbf{Q}$ est une algèbre de polynômes en des variables formant une base de l'espace vectoriel des éléments primitifs. Des calculs fait sur ordinateur donnent pour les nombres d_n de variables de degré n, les valeurs suivantes:

$$d_1 = 1 \quad d_2 = 1 \quad d_3 = 1 \quad d_4 = 2 \quad d_5 = 3 \quad d_6 = 5 \quad d_7 = 8 \quad d_8 = 12 \quad d_9 = 18$$

Ces calculs montrent également qu'en petit degré, $\mathcal{A}$ est libre sur $\mathbf{Z}$.

3.4. Le cas des nœuds parallélisés

On peut développer une théorie semblable à celle-ci pour les nœuds parallélisés. On obtient ainsi une algèbre de nœuds $\tilde{\Lambda}$ qui est une algèbre de Hopf filtrée et un gradué associé $G\tilde{\Lambda}$. Ces algèbres sont en fait des algèbres sur $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$, la multiplication par t désignant le changement de parallélisation qui augmente l'auto-intersection de 1, ou, ce qui revient au même, le produit par le nœud parallélisé trivial d'auto-intersection 1. On vérifie que $G\tilde{\Lambda}$ est une algèbre sur $\mathbf{Z}[t]/t^2$.

En ce qui concerne l'application $\tilde{\varphi}$ qui correspond à φ, on doit la préciser de la façon suivante:

Si D est un diagramme de cordes, on définit $\varphi(D)$ comme un nœud singulier représenté par un diagramme dans le plan possédant des points doubles et des croisements (positifs ou négatifs). Ce nœud singulier est parallélisé en choisissant un des vecteurs normaux normal au plan. On précise alors le choix de $\tilde{\varphi}(D)$ en imposant qu'il y ait autant de croisements positifs que de croisements négatifs.

Il est clair que dans cette nouvelle théorie, la relation (1) n'est plus vérifiée, l'élément $\varphi(\delta_1)$ étant égal à $t - t^{-1}$. La relation (4T) reste par contre valable.

Théorème 7. – *L'application $\tilde{\varphi}$ induit un épimorphisme d'algèbre de Hopf de $\mathcal{A} \otimes \mathbf{Z}[t]/t^2$ sur $G\tilde{\Lambda}$.*

Les applications φ et $\tilde{\varphi}$ sont extrêmement importantes dans l'étude des nœuds à cause du théorème de Kontsevich:

Théorème 8. [BN2] – *Les applications $\varphi' : \mathcal{A}^r \to G\Lambda$ et $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \otimes \mathbf{Z}[t]/t^2 \to G\tilde{\Lambda}$ ont des noyaux finis en chaque degré.*

Conjecture C . – *Les applications $\varphi' : \mathcal{A}^r \to G\Lambda$ et $\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \otimes \mathbf{Z}[t]/t^2 \to G\tilde{\Lambda}$ sont des isomorphismes.*

Le théorème de Kontsevich montre en fait que cette conjecture est impliquée par la conjecture plus forte suivante:

Conjecture D . – *L'algèbre $\mathcal{A}$ est sans torsion.*

4. AUTRES DESCRIPTIONS DE L'ALGÈBRE $\mathcal{A}$

4.1. Diagrammes trivalents

On appelle *diagramme trivalent* ou *diagramme de Feynman* un graphe fini trivalent connexe D muni des données suivantes:

— un sous graphe $\Gamma \subset D$ homéomorphe au cercle et appelé cercle de D.

— une orientation de Γ.

— un ordre cyclique sur l'ensemble des trois arètes issues de chaque sommet de D.

En pratique, on représente un diagramme trivalent à l'aide d'une immersion regulière de D dans le plan, qui soit un plongement direct sur Γ et qui soit compatible en chaque sommet avec les ordres cycliques et l'orientation du plan. Ainsi un diagramme de corde n'est-il rien d'autre qu'un diagramme trivalent dont tous les sommets sont sur le cercle.

On notera $\mathcal{D}^t$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de diagrammes trivalents. L'ensemble $\mathcal{D}^c$ est inclus dans $\mathcal{D}^t$.

Théorème 9. [BN2] – *L'inclusion $\mathcal{D}^c \subset \mathcal{D}^t$ induit un isomorphisme de l'algèbre $\mathcal{A}$ sur le $\mathbf{Z}$-module quotient de $\mathbf{Z}[\mathcal{D}^t]$ par les relations suivantes:*

— Si D' est obtenu à partir d'un diagramme trivalent D en changeant l'ordre cyclique en un sommet, on a la relation d'antisymétrie: $D' \equiv -D$

(AS)

— *Si trois diagrammes trivalents D, D' et D'' ne diffèrent qu'en les sous-graphes suivant:*

D : D' : D'' :

on a:

$$D \equiv D' - D'' \tag{IHX}$$

Le produit sur les diagrammes trivalents se définit comme pour les diagrammes de cordes en faisant la somme connexe de deux diagrammes trivalents en deux points réguliers des cercles. Quant à la comultiplication, on a la formule suivante:

$$\Delta(D) = \sum D' \otimes D''$$

où D' est obtenu à partir du diagramme trivalent D muni de son cercle Γ, en ôtant à D un certain nombre de composantes de $D - \Gamma$, et D'' en enlevant les autres composantes, la somme étant faite sur tous les découpages possibles de ce type.

Il en résulte que si $D - \Gamma$ est connexe, l'élément correspondant au diagramme D dans l'algèbre $\mathcal{A}$ est primitif.

Théorème 10. – *Le module $\mathcal{PA}$ des éléments primitifs de l'algèbre $\mathcal{A}$ est engendré par les classes de diagrammes trivalents dont le complémentaire du cercle est connexe. De plus $\mathcal{PA}$ engendre $\mathcal{A}$ comme algèbre.*

Question. – L'algèbre $\mathcal{A}$ est-elle isomorphe à l'algèbre symétrique $S\mathcal{PA}$? Ceci est vrai rationnellement. C'est donc vrai si $\mathcal{PA}$ est sans torsion.

4.2 Les diagrammes trivalents libres

On appelle *diagramme trivalent libre* un graphe fini dont tous les sommets sont trivalents ou monovalent, muni en chaque sommet trivalent d'un ordre cyclique sur les sommets qui en sont issue, et tel que chaque composante connexe contienne un sommet monovalent.

Comme ci-dessus, on représentera un tel diagramme à l'aide d'une immersion générique dans le plan qui soit compatible avec les ordres cycliques et l'orientation du plan.

On notera $\mathcal{B}$ le $\mathbf{Z}$-module engendré par les diagrammes trivalents libres avec comme relations la relation d'anti-symétrie (AS) et la relation (IHX). Ce module s'envoie dans $\mathcal{A}$ de la façon suivante:

Soit Δ un diagramme trivalent libre. Soit $X = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ ses sommets monovalents. Si α est une bijection de X sur l'ensemble des racines p-ièmes de l'unité, on peut recoller Γ et le cercle unité de $\mathbf{C}$ via α et obtenir un diagramme trivalent D_α. On pose alors:

$$\chi(\Delta) = \sum_\alpha D_\alpha$$

Théorème 11. (Kontsevich, [BN2]) – *L'application χ induit un isomorphisme rationnel de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$. De plus χ induit un isomorphisme rationnel du sous-module de $\mathcal{B}$ engendré par les diagrammes trivalents libres connexes dans le sous-module des éléments primitifs de $\mathcal{A}$.*

On peut définir sur $\mathcal{B}$ une structure d'algèbre de Hopf, le produit étant donné par la somme disjointe et les diagrammes trivalents libres connexes étant les éléments primitifs. On vérifie alors que l'application χ respecte le coproduit, ce qui explique la deuxième partie du théorème.

5. L'INTÉGRALE DE KONTSEVICH

Une méthode standard pour construire des invariants de nœuds est de construire des représentations des groupes de tresses. Or une tresse n'est autre qu'un chemin dans l'espace de configuration des parties finies de $\mathbf{C}$. Un moyen pour obtenir une représentation d'un groupe de tresse est alors de choisir une connexion plate sur cet espace de configuration et de prendre sa monodromie.

La méthode de Kontsevich va être, entre autre, de choisir un fibré et une connexion plate étroitement liés à l'algèbre $\mathcal{A}$, puis de montrer que la forme intégrale de la monodromie s'étend au cas d'un nœud.

5.1. Définition

Soit P et Q deux ensembles finis, chaque élément de P et de Q étant muni d'un signe. Ces deux ensembles peuvent donc être considérés comme des variétés orientées de dimension 0. Soit C un cobordisme orienté de P vers Q. On appellera *C-cobordisme trivalent* un graphe fini D dont tous les sommets sont d'ordre 1 ou 3, contenant une triangulation de C, et muni en chaque sommet

trivalent d'un ordre cyclique sur l'ensemble des arètes qui en sont issues, et tel que:

— l'ensemble des sommets monovalents de D est égal à $P \cup Q$ c'est-à-dire au bord de C

— toute composante connexe de D rencontre C

Notations. — Soit C un cobordisme orienté de dimension 1. On notera $\mathcal{A}(C)$ le $\mathbf{C}$-espace vectoriel engendré par les C-diagrammes trivalents, quotienté par les relations (AS) et (IHX).

On notera $\mathcal{A}^r(C)$ le quotient de $\mathcal{A}(C)$ par la relation suivante:

— Si D est un C-diagramme trivalent contenant deux arètes ayant les mêmes sommets, une seule étant dans C, on a: $D \equiv 0$.

Ces deux espaces vectoriels sont gradués par la moitié du nombre de sommets trivalents. On notera $\overline{\mathcal{A}^r}(C)$ le complété de $\mathcal{A}^r(C)$ correspondant.

Remarques — Il est clair que $\mathcal{A}(S^1)$ est isomorphe à $\mathcal{A} \otimes \mathbf{C}$ et que $\mathcal{A}^r(S^1)$ est isomorphe à $\mathcal{A}^r \otimes \mathbf{C}$.

Soient C' un cobordisme de P vers Q et C'' un cobordisme de Q vers R. On peut recoller C' et C'' le long de Q et obtenir un cobordisme $C = C'.C''$ de P vers R. On a alors un morphisme de recollement μ de $\overline{\mathcal{A}^r}(C') \otimes \overline{\mathcal{A}^r}(C'')$ dans $\overline{\mathcal{A}^r}(C)$. Ce morphisme μ est associatif. On le notera simplement: $x \otimes y \mapsto \mu(x \otimes y) = xy$.

On appellera *cobordisme noué* de P vers Q un cobordisme orienté (de dimension 1) C de P vers Q plongé dans $\mathbf{C} \times I$ (I étant un intervalle [a, b] de $\mathbf{R}$), rencontrant transversalement $\mathbf{C} \times \{a\}$ en P et $\mathbf{C} \times \{b\}$ en Q.

5.2. La connection de Knizhnik-Zamolodchikov

Soit, pour tout p et q, P_{pq} un ensemble fini à $p+q$ éléments, les p premiers étant muni d'un signe $+$ et les autres d'un signe $-$. Soit $\mathcal{E}_{pq}$ l'espace des parties de $\mathbf{C}$ avec signes isomorphes à P_{pq}. La famille des espaces vectoriels $\overline{\mathcal{A}^r}(C)$ où C est un cobordisme trivial de P_{pq} vers un élément $P \in \mathcal{E}_{pq}$ définit un fibré vectoriel sur $\mathcal{E}_{pq}$ d'algèbre structurelle $\overline{\mathcal{A}^r}(P_{pq} \times I)$. Comme ce fibré est naturellement plat, une connection sur $\mathcal{E}_{pq}$ est simplement une forme différentielle sur $\mathcal{E}_{pq}$ qui en chaque $P \in \mathcal{E}_{pq}$ prend ses valeurs dans l'algèbre $\overline{\mathcal{A}^r}(P \times I)$ des endomorphismes de la fibre.

Définition. — La connection de Knizhnik-Zamolodchikov formelle est définie par la formule:

$$\Omega(P) = \sum_{\{x,y\}\subset P} \varepsilon_x \varepsilon_y \Omega_{xy} \omega_{xy}$$

où ε désigne le signe, où Ω_{xy} est l'élément de $\overline{\mathcal{A}^r}(P \times I)$ obtenu en rajoutant à $P \times I$ une arète joignant $x \times I$ et $y \times I$, l'ordre cyclique en chaque sommet trivalent z étant: branche de $P \times I$ arrivant en z, branche de $P \times I$ partant de z, arète rajoutée; et où ω_{xy} est la forme différentielle suivante:

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2i\pi} \frac{dy - dx}{y - x}$$

Proposition 12. — *La connection de Knizhnik-Zamolodchikov formelle est plate.*

On a clairement: $d\Omega = 0$. Le calcul de $\Omega \wedge \Omega$ donne:

$$\Omega \wedge \Omega = \sum_{\{x,y,z\}\subset P} W(x,y,z)$$

avec:

$$W(x,y,z) = \sum \varepsilon_y \varepsilon_z (\Omega_{xy}\Omega_{xz}\omega_{xy} \wedge \omega_{xz} + \Omega_{xz}\Omega_{xy}\omega_{xz} \wedge \omega_{xy})$$

où la somme porte sur les trois permutations cycliques.

Or la formule (IHX) montre que $\Omega_{xy}\Omega_{xz} - \Omega_{xz}\Omega_{xy}$ est égal à l'élément $\varepsilon_x \Omega_{xyz}$, Ω_{xyz}étant représenté par le cobordisme trivalent obtenu en rajoutant à $P \times I$ trois arètes a_x, a_y et a_z connectés à $\{x\} \times I$, $\{y\} \times I$ et $\{z\} \times I$ et connectés ensemble en un sommet trivalent, l'ordre cyclique en ce sommet étant: a_x, a_y puis a_z.

On a alors:

$$W(x,y,z) = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z \Omega_{xyz} \sum \omega_{xy} \wedge \omega_{xz} = 0$$

et la courbure $d\Omega + \Omega \wedge \Omega$ est nulle.

5.3. L'intégrale de Kontsevich

Soit T une tresse munie d'une orientation quelconque. On peut voir T comme un chemin γ de $[0,1]$ dans un espace $\mathcal{E}_{pq}$ et l'on détermine la monodromie de la connection Ω par la formule [CH]:

$$Z(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta_n} \gamma^*(\Omega)(t_1) \wedge \gamma^*(\Omega)(t_2) \wedge \ldots \wedge \gamma^*(\Omega)(t_n)$$

où Δ_n est le simplexe: $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq 1$

Soit $C \subset \mathbf{C} \times I$ un cobordisme noué tel que la fonction cote f soit de Morse sur C. Un tel cobordisme noué sera appelé *cobordisme noué de Morse*. Si t est une valeur régulière de f, la projection de $f^{-1}(t)$ sur $\mathbf{C}$ est un élément $\gamma(t)$ de l'espace $\mathcal{E}_* = \amalg \mathcal{E}_{pq}$. Si maintenant $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n \leq 1$ sont n valeurs régulières, la forme différentielle $\gamma^*(\Omega)(t_1) \wedge \gamma^*(\Omega)(t_2) \wedge \ldots \wedge \gamma^*(\Omega)(t_n)$ a un sens en prenant ses valeurs dans $\overline{\mathcal{A}^r}(P \times I)$ où P est l'union disjointe des ensembles $\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_n)$. Et le plongement standard de $P \times I$ dans le cobordisme C induit une forme différentielle à valeur dans $\overline{\mathcal{A}^r}(C)$ que l'on notera $\Omega_C(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Cette forme est définie sur un ouvert dense $U(C)$ du simplexe Δ_n, complémentaire d'une partie négligeable de Δ_n.

Théorème 13. — *Soit C un cobordisme noué de Morse. Alors chacune des intégrales*

$$\int_{\Delta_n} \Omega_C(t_1, t_2, \ldots t_n) \tag{5}$$

est absolument convergente. De plus l'élément de $\overline{\mathcal{A}^r}(C)$:

$$Z(C) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Delta_n} \Omega_C(t_1, t_2, \ldots, t_n) \tag{6}$$

ne dépend que de la classe d'isotopie de C parmi les cobordismes noués de Morse à bord fixé.

Soit D un C-diagramme trivalent qui n'est pas nul dans $\overline{\mathcal{A}^r}(C)$. Alors le coefficient (potentiel) de D dans l'intégrale (5) est une somme d'expressions de la forme:

$$\int \frac{dz_{i_1} - dz'_{j_1}}{z_{i_1} - z'_{j_1}} \wedge \ldots \frac{dz_{i_n} - dz'_{j_n}}{z_{i_n} - z'_{j_n}}$$

où (z_{i_k}, t_k) et (z'_{j_k}, t_k) sont des points de C à cotes $t_1, \ldots, t_n$ croissantes et non critiques. Pour montrer la convergence d'une telle intégrale, on se ramène, grâce au théorème de Fubini, au cas où toutes les cotes sont dans un intervalle $[a, b]$ dont seule une des extrémités (par exemple a) est critique. Une étude précise dans ce cas montre que le seul cas de divergence possible est lorsque (z_{i_1}, t_1) et (z'_{j_1}, t_1) sont sur la même branche de C avec un point critique au milieu, de valeur critique a. Mais cette situation n'est pas possible car sinon D serait nul dans $\overline{\mathcal{A}^r}(C)$.

Une étude plus précise d'une telle intégrale montre que si une branche de C a un point critique de valeur critique a et que cette branche rencontre $\mathbf{C} \times]a, b]$ en deux courbes proches, l'intégrale est petite. Par conséquent, Z(C) ne dépend dans ce cas que très peu de la cote critique a. Comme il est facile de montrer, comme dans le cas d'une monodromie, que $Z(C)$ ne dépend que de la classe

d'isotopie de C parmi les cobordismes noués de Morse à valeurs critiques fixées et à bord fixé, on en déduit que $Z(C)$ ne dépend pas non plus des cotes critiques.

Le nombre $Z(C)$ n'est malheureusement pas un invariant d'isotopie. Pour avoir un tel tel invariant, il faut le modifier, ce que l'on va faire dans le cas des nœuds où la situation est plus simple.

Soit K un nœud de Morse, c'est à dire un nœud dans $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ dont la cote est de Morse. Le nœud K est un cobordisme noué de Morse à bord vide, et $Z(K)$ est défini dans $\overline{\mathcal{A}^r}(S^1)$ qui n'est autre que le complété $\overline{\mathcal{A}^r}$ de $\mathcal{A}^r \otimes \mathbf{C}$.

Soit K_0 le nœud de Morse trivial dont la fonction cote n'a que 4 points critiques. Alors $Z(K_0)$ est une série dont le terme constant est égal à 1 et est donc inversible dans $\overline{\mathcal{A}^r}$.

Théorème 14. — *Soit K un nœud de Morse dont la fonction cote a $2p$ points critiques. Alors l'élément*

$$\widetilde{Z}(K) = Z(K_0)^{-p+1} Z(K) \tag{7}$$

de $\overline{\mathcal{A}^r}$ ne dépend que de la classe d'isotopie du nœud K et $\widetilde{Z}$ est un morphisme d'algèbre de Hopf de l'algèbre des nœuds Λ dans l'algèbre $\overline{\mathcal{A}^r}$.

De plus, si K est un nœud singulier correspondant à un diagramme de cordes D à n cordes, $\widetilde{Z}(K)$ est de valuation n et sa composante en degré n est égale à la classe de D.

Il est facile de vérifier que si l'on modifie un nœud de Morse K en rajoutant deux points critiques, l'élément $Z(K)$ est multiplié par un certain élément Z de $\overline{\mathcal{A}^r}$, indépendant de K. Cet élément est donc nécessairement égal à $Z(K_0)$.

Ainsi $\widetilde{Z}$ induit un morphisme de l'algèbre des nœuds Λ dans $\overline{\mathcal{A}^r}$ compatible avec les deux opérations d'algèbres de Hopf, comme on peut le voir par un calcul direct.

Soit maintenant K un nœud singulier à n points doubles. On peut supposer que K est inclus dans $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ et que les points doubles ont, par la fonction cote, des images distinctes et différentes des valeurs critiques. De la même façon que l'on a défini des nœuds singuliers, on peut définir des cobordismes noués singuliers et prolonger l'invariant Z sur ces objets. On peut donc considérer K comme un composé de plusieurs cobordismes noués singuliers dont au moins n

d'entre eux ont la forme suivante: toutes les branches sont standards sauf deux qui se coupent de façon standard.

Soit X un tel cobordisme singulier. L'élément $Z(X)$ est la différence de deux séries dont les termes constants sont égaux à 1. Le terme de degré 1 se calcule aisément. Il est représenté par le cobordisme trivalent obtenu en remplaçant le point double de X par une arète. On en déduit que $Z(K)$ est une série de valuation n et que le terme de degré n est le terme voulu.

Ceci montre en particulier que l'application $\widetilde{Z}$ de l'algèbre des nœuds Λ dans $\overline{\mathcal{A}^r}$ est compatible avec les filtrations et induit une application graduée de $G\Lambda$ dans $\overline{\mathcal{A}^r}$ dont la composée par $\varphi' : \mathcal{A}^r \to G\Lambda$ est rationnellement injective.

Remarque. — L'invariant $\widetilde{Z}$ prend en fait des valeurs réelles. Pour montrer cela, on prend l'image d'un nœud K par l'application $(z,t) \mapsto (\overline{z}, -t)$. On obtient un nœud equivalent mais son invariant est conjugué.

Remarque. — L'application qui à un nœud parallélisé K associe l'expression $t^n[K]$, où n est l'auto-enlacement de K et $[K]$ la classe du nœud K dans Λ, induit un isomorphisme d'algèbre de Hopf de $\tilde{\Lambda}$ sur l'algèbre de Hopf $\Lambda[t,t^{-1}]$ (où t est primitif). Comme l'application quotient de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}^r$ se relève de façon unique en un isomorphisme d'algèbre de Hopf gradué de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{A}^r[\delta_1]$ qui envoie δ_1 en δ_1, l'application $\widetilde{Z}$ se relève en un morphisme d'algèbre de Hopf filtré de $\tilde{\Lambda}$ dans l'algèbre $\overline{\mathcal{A}}$ complétée de $\mathcal{A} \otimes \mathbf{C}$. Ce relevé n'est pas unique, il dépend de l'image de t.

Question. — Peut-on décrire explicitement un tel relèvement à l'aide d'une intégrale?

6. CONSTRUCTIONS D'INVARIANTS DE NŒUDS

Le théorème de Kontsevich donne une application de l'algèbre des nœuds Λ dans $\overline{\mathcal{A}^r}$ et toute forme linéaire de $\mathcal{A}^r_n$ dans $\mathbf{R}$ produit un invariant de Vassiliev de degré n. Ainsi toute application de l'ensemble $\mathcal{D}^t_n$ des diagrammes trivalents à $2n$ sommets, dans $\mathbf{R}$, compatible avec les relations (AS) et (IHX) et qui annule tout diagramme trivalent possédant deux arètes de mêmes sommets dont l'une seulement est dans le cercle, donne un invariant de Vassiliev de degré n. Un telle application est appelé *système de poids de degré* n.

6.1. Représentations d'algèbres de Lie

Soit L une algèbre de Lie (réelle ou complexe) de dimension finie, t une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée sur L, invariante par la représentation adjointe (par exemple la forme de Killing si L est semi-simple). Soit E une représentation de L de dimension finie.

Un tel triple (L, t, E) va produire, pour tout entier n un système de poids de degré n.

Le crochet de Lie de L peut être vu comme un élément de $L^* \otimes L^* \otimes L$, et l'isomorphisme de L sur L^* induit par t donne un élément ω de $L^* \otimes L^* \otimes L^*$ qui est totalement antisymétrique.

Le produit scalaire t sur $L \otimes L$ induit, via l'isomorphisme $L \simeq L^*$, un forme bilinéaire t^* sur L^*.

La représentation E de L est donné par un élément ω' de $L^* \otimes E^* \otimes E \simeq \mathrm{Hom}(L \otimes E, E)$.

Soit D un diagramme trivalent. Pour tout sommet x de D, on note w_x le tenseur ω' si x est sur le cercle et ω sinon. De même on note V_x l'espace vectoriel $L^* \otimes E^* \otimes E$ si x est sur le cercle et $L^* \otimes L^* \otimes L^*$ sinon. Ainsi pour tout sommet x de D, w_x est un élément de V_x. Le produit tensoriel w_D de tous ces tenseurs appartient à l'espace vectoriel $V_D = \bigotimes_x V_x$.

D'autre part chaque arète a de D permet de contracter les tenseurs de V_D de la façon suivante:

Choisissons tout d'abord l'ordre cyclique en chaque sommet du cercle de façon à avoir en premier l'arète non contenue dans le cercle. Si l'arète a est sur le cercle, notons x son origine et y son extrémité. On peut évaluer la composante E de V_x avec la composante E^* de V_y. Sinon notons x et y ses extrémités. Soit i (resp. j) le numéro de a dans l'ordre cyclique des arètes issues de x (resp. de y). On peut alors contracter le i-ième facteur L^* de V_x avec le j-ième facteur L^* de V_y par t^*.

Le produit tensoriel de toutes ces contractions définit une forme linéaire T sur V_D, et on pose:

$$I_{(L,t,E)}(D) = T(w_D)$$

Théorème 15. (Bar-Natan [BN1] [BN2]) — *L'application $I_{(L,t,E)}$ induit pour tout n un système de poids de degré n, et produit donc une suite d'invariants de Vassiliev.*

La relation (AS) résulte du fait que le tenseur est totalement antisymétrique et la relation (IHX) se déduit de la relation de Jacobi.

6.2. Surfaces marquées

Définition. — Une *surface marquée* est une surface Σ compacte à bord munie d'un nombre fini de vecteurs tangents en des points distincts de $\partial\Sigma$, chaque composante de Σ ayant au moins un vecteur sur son bord. On notera $\mathcal{S}$ le $\mathbf{R}$-espace vectoriel engendré par les classes d'isomorphisme de surfaces marquées.

L'espace vectoriel $\mathcal{S}$ est gradué de la façon suivante: si Σ est une surface marquée, on définit le degré de Σ comme étant le nombre de vecteurs diminué de la caractéristique d'Euler de la surface. De plus, l'union disjointe des surfaces induit sur $\mathcal{S}$ une structure d'algèbre graduée, et en prenant comme éléments primitifs les surfaces connexes, $\mathcal{S}$ devient une algèbre de Hopf.

Théorème 16. (Bar-Natan [BN2], Kontsevich) — *Il existe une application naturelle graduée Φ^r de l'algèbre $\mathcal{A}^r$ dans $\mathcal{S}$ compatible avec la comultiplication. Cette application induit pour tout entier n, un invariant de Vassiliev à valeur dans $\mathcal{S}_n$.*

L'application Φ^r se construit de la façon suivante: Soit Δ un diagramme trivalent libre. Soit α une application de l'ensemble des arètes de Δ dans $\{-1,1\}$. On obtient alors une surface Σ_α en procédant comme suit:

On épaissit Δ en une surface à bord en ajoutant en chaque sommet x de Δ un petit disque D_x orienté (de façon compatible avec l'ordre cyclique si x est trivalent), et en connectant deux disques correspondant à deux sommets x et y d'une arète a en rajoutant une bande contenant l'arète, le recollement étant compatible ou non avec les orientations de D_x et D_y suivant que $\alpha(a)$ et égal ou non à 1. On obtient ainsi une surface Σ_α contenant Δ et qui s'envoie dans le plan par une application f qui est une immersion partout sauf près des milieux des arètes a telles que $\alpha(a) = -1$.

On marque alors la surface Σ_α en mettant sur le bord de chaque disque D_x correspondant à un sommet monovalent, un vecteur tangent direct.

On pose ensuite:

$$\Psi(\Delta) = \sum_\alpha (\prod_a \alpha(a))\Sigma_\alpha$$

On vérifie que Ψ est compatible avec les relations (AS) et (IHX) et induit une application toujours notée Ψ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{S}$, et Ψ est clairement un morphisme d'algèbre de Hopf. Comme $\mathcal{B}$ est rationnellement isomorphe à $\mathcal{A}$, on en déduit une application graduée Φ de l'algèbre $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{S}$. Or rationnellement, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^r$

sont des algèbres de polynômes, $\mathcal{A}^r$ étant le quotient de $\mathcal{A}$ par l'idéal engendré par le générateur δ_1 de degré 1. On peut alors prendre une section $s : \mathcal{A}^r \to \mathcal{A}$ de l'application quotient en envoyant chaque générateur en lui-même sauf δ_1 que l'on envoie en 0, et l'application $\Phi^r = \Phi \circ s$ donne, en chaque degré, un système de poids, et donc un invariant de Vassiliev. Comme l'isomorphisme rationnel de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{A}$ et s respectent la comultiplication, Ψ^r la respecte également.

BIBLIOGRAPHIE

[BL] J. S. BIRMAN et X. S. LIN – *Knots polynomials and Vassiliev's invariants*, Invent. Math. **111**, 1993, 225–270.

[BN1] D. BAR-NATAN – *Weights of Feynman diagrams and the Vassiliev knot invariants*, preprint 1991.

[BN2] D. BAR-NATAN – *On the Vassiliev knot invariants*, preprint 1992.

[BN3] D. BAR-NATAN – *Vassiliev homotopy string link invariants*, preprint 1992.

[CH] K. T. CHEN –*Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. **83**, 1977, 831–879.

[CO] J. H. CONWAY –*An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties*, Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon, New-York 1970, 329–358.

[D] C. DAY –*Vassiliev invariants for links*, preprint 1992.

[F] P. FREYD, J. HOSTE, W. B. R. LICKORISH, K. MILLETT, A. OCNEANU et D. YETTER – *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. **12**, 1985, 239–246.

[J] V. F. R. JONES – *A polynomial invariant for knots via Von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. **12**, 1985, 103–111.

[KA] L. H. KAUFFMAN – *An invariant of regular isotopy*, Trans. Amer. Math. Soc **312**, 1990, 417–471.

[KO] M. KONTSEVICH – *Graphs, homotopical algebra and low-dimensional topology*, preprint 1992.

[KZ] V. G. KNIZHNIK et A. B. ZAMOLODCHIKOV – *Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*, Nucl. Phys. **B247**, 1984, 83–103.

[L] X. S. LIN – *Vertex models, quantum groups and Vassiliev's knot invariants*, preprint 1991.

[P] S. PIUNIKHINE – *Weignts of Feynman diagrams, link polynomials and Vassiliev knot invariants*, preprint 1992.

[S] A. B. SOSSINSKY – *Feynman diagrams and Vassiliev invariants*, IHES M/92/13, preprint 1992.

[T] V. G. TURAEV – *The Yang-Baxter equation and invariants of links*, Invent. Math. **92**, 1988, 527–553.

[V1] V. A. VASSILIEV – *Cohomology of knot spaces*, Theory of Singularities and its Applications (V. I. Arnold, éd.), Amer. Math. Soc., Providence, 1990.

[V2] V. A. VASSILIEV – Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications, Trans. of Math. Mono. **98**, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.

Pierre VOGEL
Université de Paris VII
Département de Mathématiques
Tour 45-55, 5ième étage
2, place Jussieu
F-75251 PARIS CÉDEX 05