PATRICK DEHORNOY

La détermination projective

Astérisque, tome 177-178 (1989), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 710, p. 261-276
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1988-1989__31__261_0>

Séminaire BOURBAKI juin 1989
41ème année, 1988-89, n^o710

LA DÉTERMINATION PROJECTIVE
[d'après Martin, Steel et Woodin]

par Patrick DEHORNOY

Cet exposé présente les résultats récents obtenus principalement par Martin, Steel et Woodin sur la propriété de détermination des ensembles de la hiérarchie projective de Lusin: ces résultats inattendus ont apporté une vision nouvelle pour une (hypothétique) classification des modèles de la théorie des ensembles.

On commencera ici par décrire le cadre où s'insèrent ces travaux, cadre très général puisque valable pour toute la théorie des ensembles des dernières décennies, mais en même temps assez méconnu en France. L'énoncé du théorème de Martin-Steel suivra, et on indiquera quelques idées de sa démonstration, avant de conclure sur les travaux de Woodin et les perspectives ouvertes par ceux-ci.

Cette présentation se fonde notamment sur l'exposé donné par Martin et Steel de leur résultat dans [15]. Je remercie Hugh Woodin qui m'a expliqué certains de ses résultats récents non publiés.

1. EXTENSIONS DU SYSTÈME ZF.

On sait que la théorie des ensembles axiomatisée dans le système ZFC de Zermelo-Fraenkel ([1], [6]) ou dans des variantes telles celle, bien désuète, développée jadis dans [2] fournit un cadre convenable pour la fondation des mathématiques puisque, d'une part, tous les objets connus s'y représentent de façon plus ou moins naturelle, et puisque, d'autre part, le système échappe, pour le moment, à toute contradiction. Ceci, d'après le théorème d'incomplétude de Gödel, est la moins mauvaise situation qu'on puisse espérer pour un système incluant l'arithmétique de Peano. Mais, bien sûr, le système ZFC est *incomplet*, c'est à dire qu'il existe des énoncés que les axiomes de ZFC ne décident, ni dans un sens positif, ni dans un sens négatif. On sait, depuis Gödel et Cohen, qu'il en est ainsi pour l'hypothèse du continu (ou l'axiome du choix, si celui-ci n'est pas inclus dans les axiomes de départ), mais c'est également le cas pour des énoncés tels la mesurabilité de Lebesgue pour les ensembles de la hiérarchie projective de Lusin à partir du second niveau, énoncés concernant non des ensembles arbitraires comme dans les deux exemples précédents mais des ensembles possédant une définition effective simple.

Se pose alors le problème de trouver des *extensions* du sytème ZFC susceptibles de décider les énoncés ouverts et possédant les mêmes qualités informelles que ZFC, notamment une sorte d'évidence intuitive. Passant, par complétude, à un point de vue sémantique dual, il s'agit de *classifier* les modèles de ZFC, c'est à dire de décrire toutes les structures en vérifiant les axiomes... but certainement utopique en toute généralité mais dont on verra qu'il peut devenir accessible lorsqu'on se restreint à la description d'une partie des modèles considérés seulement, par exemple celle qui comprend entiers, réels et ensembles de réels. La mise en place d'une telle classification dont le projet remonte à Gödel pourrait aider à mieux cerner (le) modèle particulier de ZFC constitué par le 'vrai' monde mathématique des 'vrais' ensembles en l'y situant. Ce programme de longue haleine est loin d'être achevé mais il a permis l'élaboration de concepts fructueux pour d'autres parties des mathématiques (au moins la topologie générale, l'algèbre, la combinatoire) et surtout il trouve, si besoin est, sa justification et la preuve de sa pertinence dans la beauté, hélas rarement connue des profanes même mathématiciens, des constructions proposées et des résultats structurels obtenus depuis cinquante ans.

2. AXIOMES D'INFINI GÉNÉRALISÉS

Le système de Zermelo (comme toutes les autres théories des ensembles) postule l'existence d'un objet *infini*, et ceci suffit à renforcer strictement l'arithmétique de Peano. Ceci est évident puisqu'alors $\mathbb{N}$ peut se représenter comme ensemble et le caractère non-contradictoire de l'arithmétique en résulte en vertu du second théorème d'incomplétude qui affirme qu'un système incluant l'arithmétique ne peut démontrer la non-contradiction que de systèmes strictement moins forts que lui-même. Une illustration plus frappante de ce renforcement apporté par l'introduction d'un ensemble infini est fournie par la possibilité de définir une numération transfinie permettant par exemple d'établir très simplement l'annulation des suites récurrentes de Goodstein, dont on sait qu'elle ne peut être démontrée dans le système de Peano (voir [11]).

De la même façon, le système ZFC étend le système de Zermelo notamment en affirmant l'existence de certains ensembles non dénombrables qui ne peut être prouvée dans ce dernier. Il en résulte notamment que les ordinaux dénombrables forment un ensemble, et ce type de propriétés permet à ZFC de démontrer des résultats inaccessibles à la théorie de Zermelo, comme la détermination des jeux boréliens [13] (cf.[5]).

Ainsi dans ces deux passages l'introduction d'*axiomes d'infini* joue un rôle crucial; c'est la même démarche qu'on va mener au dessus du système ZFC en considérant de nouveaux axiomes d'infini généralisés, aussi appelés *axiomes de grands cardinaux* car les ensembles infinis dont ils postulent l'existence peuvent toujours être supposés définis comme cardinaux. Ainsi, utilisant la notation des alephs, on peut dire qu'on vient de rencontrer déjà les deux premiers axiomes de grands cardinaux, que sont '$\aleph_0$ existe' (autrement dit 'la collection des entiers est un ensemble') qui figure dans le système de Zermelo mais non dans l'arithmétique, et '$\aleph_1$ existe' (autrement dit 'la collection des ordinaux dénombrables est un ensemble') qui figure dans ZFC mais non dans le système de Zermelo (ceci ne constitue pas la seule différence entre les deux systèmes). L'axiome 'suivant' est celui qui affirme l'existence d'un cardinal inaccessible: strictement plus fort que ZFC puisqu'il en implique le caractère non-contradictoire, il est intervenu notamment dans le résultat de Shelah établissant l'équiconsistance de l'énoncé 'tout ensemble de réels est mesurable pour la mesure de Lebesgue' avec l'existence d'un tel cardinal [20]. Ce résultat illustre un phénomène qui est fondamental dans tous les développements récents de la théorie des ensembles et sera partout sous-jacent dans la suite de cet exposé, à savoir que, au moins au niveau de l'équiconsistance, les propriétés mettant en jeu des objets aussi 'petits' que les ensembles de réels (du point de vue de la cardinalité et de celui du nombre minimal d'itérations de l'opération 'passer à l'ensemble des parties' nécessaires à leur construction à partir de l'ensemble vide) sont liées à d'autres propriétés mettant en jeu des ensembles 'immenses' qui en paraissent très éloignés de ces mêmes points de vue.

Depuis les annés 60, une large flore (d'axiomes) de grands cardinaux est apparue en théorie des ensembles qui s'imposent comme *les* bonnes extensions de ZFC. La première raison est qu'ils s'organisent en une *hiérarchie* totalement ordonnée (c'est à dire se révèlent deux à deux comparables du point de vue de la force même lorsqu'introduits à partir d'idées très diverses). La seconde, et plus importante, raison tient à ce que, au moins pour les plus faibles de ces axiomes, on dispose de modèles 'canoniques' décrits avec précision. L'existence de ces modèles, et donc le caractère non contradictoire des axiomes correspondants, ne peut évidemment être démontrée dans ZFC dont (à partir du niveau du cardinal inaccessible), ils impliquent la non-contradiction, mais on peut penser qu'une éventuelle contradiction de l'axiome apparaîtrait rapidement dans le modèle qu'on lui associerait. Dès lors, le programme de Gödel se précise en les deux étapes suivantes:

- trouver une hiérarchie exhaustive d'axiomes de grands cardinaux et pour chacun d'eux un modèle canonique correspondant;

- classer les modèles de ZFC en fonction des axiomes de grands cardinaux qu'ils satisfont, et, typiquement, montrer que, si un modèle satisfait un axiome $\mathcal{A}$ mais aucun des axiomes ultérieurs de la hiérarchie, alors il est en un certain sens proche du modèle canonique de $\mathcal{A}$.

Les résultats de Jensen et Silver analysés dans [19] sont une avancée dans cette direction pour ce qui concerne les premiers niveaux de la hiérarchie. Ceux qui vont être présentés ici concernent au contraire des niveaux plus élevés de celle-ci. Ils ouvrent de nouvelles perspectives pour les prochaines années (voir le paragraphe de conclusion).

3. PLONGEMENTS ÉLÉMENTAIRES ET MESURES.

Les axiomes d'infini donnent naissance à des ***phénomènes de réflexion*** qui sont essentiels dans leurs utilisations. Soit $\Phi(x, y)$ une formule à deux variables: on dira que le cardinal κ reflète $\Phi(x, y)$ si, pour tout ordinal $\alpha < \kappa$, l'existence d'un ordinal $\beta \geq \kappa$ tel que $\Phi(\alpha, \beta)$ soit vrai entraîne celle d'un ordinal $\overline{\beta} < \kappa$ tel que $\Phi(\alpha, \overline{\beta})$ soit vrai. Ainsi $\aleph_0$ est le plus petit cardinal reflétant la formule $x < y$; la formule $2^x < y$ est reflétée par $\aleph_0$ et par tout cardinal inaccessible, mais pas par le cardinal $\aleph_1$.

Pour énoncer les nouveaux axiomes d'infini qui seront nécessaires et rencontrer des phénomènes de réflexion plus forts, on introduit la notion suivante qui est centrale dans toute la théorie et qui est la seule pour laquelle on entrera ici dans certains détails un peu techniques:

DÉFINITION. - *Soient* $(M, \in)$, $(\overline{M}, \overline{\in})$ *deux modèles de ZFC; un **plongement élémentaire** du premier dans le second est une application injective* $j : M \rightarrow \overline{M}$ *telle que, pour toute formule* $\Phi(x_1, ..., x_n)$ *écrite avec l'appartenance (et, de là, avec toutes les notions qui s'en dérivent) et tout* $n-$*uple* $(a_1, ..., a_n)$ *d'éléments de* M, *on a que* $\Phi(a_1, ..., a_n)$ *est vrai dans* $(M, \in)$ si, et seulement si, $\Phi(ja_1, ..., ja_n)$ *est vraie dans* $(\overline{M}, \overline{\in})$.

Cette notion correspond, en l'étendant, à celle d'homomorphisme en algèbre : un plongement élémentaire est, en particulier, un homomorphisme vis-à-vis de l'appartenance et de *toutes* les notions qui sont définissables à partir de celle-ci. Ainsi l'image par un plongement élémentaire d'un entier du modèle de départ sera un entier du modèle d'arrivée, et de même pour un réel, une fonction ou un ordinal...

La notion de plongement élémentaire prend un intérêt spécifique en théorie des ensembles lorsque le modèle de départ et le modèle d'arrivée ont essentiellement la *même* appartenance. Précisément, on dit que $(\overline{M}, \overline{\in})$ est un modèle *intérieur* de $(M, \in)$ si $\overline{M}$ est inclus dans M et que $\overline{\in}$ est la restriction de $\in$ à $\overline{M}$ (on requiert également que les ordinaux de M soient dans $\overline{M}$ et que $x \in y \in \overline{M}$ entraîne $x \in \overline{M}$), et on dira que j est un plongement élémentaire *intérieur* de $(M, \in)$ dans $(\overline{M}, \overline{\in})$ si $(\overline{M}, \overline{\in})$ est un modèle intérieur de $(M, \in)$ et, de plus, la restriction $j \restriction x$ est élément de M pour tout x dans M. En outre, on exclut dans toute la suite le cas trivial de l'identité.

Le cas le plus simple serait celui d'un plongement élémentaire intérieur d'un modèle dans lui-même, mais Kunen a montré que l'axiome du choix interdit cette possibilité. En fait, pour un modèle $(M, \in)$ de ZFC, l'assertion 'il existe un plongement élémentaire intérieur de $(M, \in)$ dans un de ses modèles intérieurs $(\overline{M}, \in \restriction \overline{M})$' est non démontrable dans ZFC et constitue un axiome de grand cardinal. Précisément, plus on requiert que le modèle d'arrivée soit proche du modèle de départ et plus l'existence du plongement élémentaire en question constitue un axiome fort. Le résultat de Kunen montre que le cas ultime où ces deux modèles seraient égaux est une borne inaccessible.

Supposons que j est un plongement élémentaire intérieur de $(M, \in)$ dans $(\overline{M}, \in \restriction \overline{M})$: l'image par j d'un ordinal de $(M, \in)$ est un ordinal de $(\overline{M}, \in \restriction \overline{M})$, donc de $(M, \in)$, et j induit sur les ordinaux une injection strictement croissante (en effet par élémentarité $\alpha < \beta$ équivaut à $j\alpha < j\beta$). De là il résulte $j\alpha \geq \alpha$ pour tout ordinal α et on peut montrer qu'il existe au moins un ordinal α tel que $j\alpha$ est strictement plus grand que α. On peut donc considérer, pour chaque plongement élémentaire intérieur j d'un modèle $(M, \in)$, le plus petit ordinal κ vérifiant $j\kappa > \kappa$, qu'on appellera l'*ordinal critique* de j. Le lien entre grands cardinaux et plongements élémentaires vient de ce que l'ordinal critique d'un plongement élémentaire j doit être un grand cardinal, d'autant plus grand que le modèle d'arrivée de j est proche de son modèle de départ.

L'archétype de ce passage est la notion de cardinal mesurable qu'il est utile pour la suite de détailler un peu.

DÉFINITION. - *i) Soit Y un ensemble quelconque et κ un cardinal infini; une κ-mesure sur Y est une mesure diffuse non nulle définie sur toutes les parties de Y, à valeurs dans $\{0, 1\}$, qui est κ-additive (c'est à dire que toute réunion d'ensembles de mesure nulle formant une famille de cardinal $< \kappa$ est encore de mesure nulle).*

ii) Un cardinal κ est mesurable s'il existe une κ-mesure sur κ.

Un cardinal mesurable est inaccessible et l'assertion 'il existe un cardinal mesurable' est un axiome d'infini situé assez haut dans la hiérarchie évoquée au paragraphe 2. Néanmoins un modèle canonique très satisfaisant existe pour cette notion. L'exemple du cardinal mesurable

est introduit ici car le lien entre mesurabilité et plongement élémentaire intérieur est essentiel et en même temps il peut être aisément décrit:

PROPOSITION. - *Soit $(M, \in)$ un modèle de ZFC et κ un ordinal de $(M, \in)$; il y a équivalence entre:*

i) κ est un cardinal mesurable;

ii) il existe un plongement élémentaire intérieur $j : (M, \in) \to (\overline{M}, \in \restriction \overline{M})$ tel que κ est l'ordinal critique de j.

Pour déduire i) de ii), on définit une κ-mesure μ sur κ **à partir de** j **en posant, pour** S **inclus dans** κ

$$\mu(S) = 1 \text{ si, et seulement si, } \kappa \in jS.$$

Alors μ **est une sorte d'image par** j^{-1} de la mesure de Dirac en κ **et, de là, est une mesure finiment additive. Le caractère** κ-additif résulte de ce que **tout ordinal** $< \kappa$ **est laissé invariant par** j. **Enfin** μ **est diffuse, car si** α est un ordinal $< \kappa$, **alors** $j\{\alpha\}$ **est** $\{j\alpha\}$, **qui est** $\{\alpha\}$ **et donc** $\mu(\{\alpha\})$ **est nul.**

Pour déduire ii) de i), on va construire à partir d'une κ-mesure **un plongement élémentaire intérieur en formant une 'ultrapuissance'** de $(M, \in)$. **Supposons que** μ **est, dans le modèle** $(M, \in)$, **une** κ**-mesure sur** Y **et soit** $\hat{M}$ le quotient de M^Y **(collection de toutes les applications de** Y **dans** M**) par l'égalité** μ-presque partout. On note $\int F(y)\mathrm{d}\mu(y)$ **la classe dans** $\hat{M}$ **de la fonction** F. **Introduisons sur** $\hat{M}$ une relation $\hat{\in}$ par

$$\int F(y)\mathrm{d}\mu(y) \mathrel{\hat{\in}} \int G(y)\mathrm{d}\mu(y) \quad \text{si, et seulement si,} \quad F(y) \in G(y) \quad \mu-\text{p.p.}$$

Alors le théorème de Loś montre que $(\hat{M}, \hat{\in})$ est un modèle **de ZFC et que l'application** $j : M \to \hat{M}$ **définie par** $jx := \int x\mathrm{d}\mu(y)$ est un plongement **élémentaire de** $(M, \in)$ **dans** $(\hat{M}, \hat{\in})$. **Ceci ne termine *pas* la preuve, car** $(\hat{M}, \hat{\in})$ n'est pas un modèle **intérieur de** $(M, \in)$. **Il faut en effet alléguer le caractère** $\aleph_1$-**additif** de μ pour montrer **que** $\hat{\in}$ **est une relation *bien fondée*** **(c'est-à-dire n'admettant** pas de suite infinie strictement **décroissante) et en déduire qu'il existe un isomorphisme** π **de** $(\hat{M}, \hat{\in})$ dans un modèle intérieur $(\overline{M}, \in \restriction \overline{M})$ **de** $(M, \in)$ **fournissant par composition avec** j **le plongement** élémentaire intérieur souhaité **grâce à un résultat facile mais fondamental qui est essentiellement** le suivant:

LEMME. (Mostowski) *Soit $(M, \in)$ un modèle de ZFC et E une relation binaire bien fondée sur un élément X de M; alors il existe dans M une application π définie sur X telle que xEy entraîne $\pi x \in \pi y$.*

Pour clore ce paragraphe, on peut préciser les phénomènes de **réflexion liés à un plongement élémentaire . Soit** κ l'ordinal critique d'un plongement **élémentaire intérieur** j **d'un modèle** $(M, \in)$ **dans un de ses** modèles intérieurs $(\overline{M}, \in \restriction \overline{M})$, **et supposons que dans** $(M, \in)$ **on a une certaine propriété** $\Phi(\alpha, \kappa)$, où α est un ordinal $< \kappa$. **Si** en outre $\overline{M}$ **est assez 'proche' de** M **pour que la propriété** $\Phi(\alpha, \kappa)$ soit encore vraie dans $(\overline{M}, \in \restriction \overline{M})$, **alors** $(\overline{M}, \in \restriction \overline{M})$ **satisfait l'énoncé** $(\exists x < j\kappa)(\Phi(\alpha, x))$ **(faire** $x := \kappa$) donc, par élémentarité de j **et puisque** $j\alpha$ **est** α, **le**

modèle $(M, \in)$ satisfait l'énoncé $(\exists x < \kappa)(\Phi(\alpha, x))$, ce qui est la réflexion souhaitée. Comme exemple, on pourra déduire du fait qu'un cardinal mesurable est inaccessible le fait plus fort qu'un tel cardinal est limite de cardinaux inaccessibles.

4. LA PROPRIÉTÉ DE DÉTERMINATION.

L'étude des liens entre la hiérarchie des grands cardinaux et la structure d'une classe Γ d'ensembles de réels ne se fait en général pas directement, mais passe par l'intermédiaire de la propriété de *détermination* pour cette classe Γ. Elle se trouve ainsi divisée en deux étapes:

A) relier la propriété de détermination pour la classe Γ à des hypothèses de grands cardinaux;

B) étudier la structure de Γ sous l'hypothèse de sa détermination.

Dans toute la suite, on notera $\mathcal{R}$ l'espace de Baire $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit de la topologie discrète et on s'intéressera aux sous-ensembes de $\mathcal{R}$. On sait qu'il existe un isomorphisme borélien entre $\mathcal{R}$ et l'ensemble des réels, de sorte que les résultats énoncés pour $\mathcal{R}$ vaudront également pour l'ensemble des réels dès lors qu'ils concerneront des classes de complexité au moins égale à celle des boréliens.

On introduit traditionnellement la propriété de détermination en termes de *jeux* infinis à deux joueurs. Supposons donnés un ensemble Y quelconque et une partie A de $Y^{\mathbb{N}}$: on considère le jeu où deux joueurs I et II proposent alternativement des éléments de Y

I	y_1		y_3		...
II		y_2		y_4	

et on déclare que le joueur I *gagne* si la suite $(y_1, y_2, y_3, ...)$ ainsi construite appartient à A. On se demande alors si, dans ce jeu, l'un ou l'autre des deux joueurs possède une ***stratégie gagnante***, c'est-à-dire une méthode lui assurant le gain quels que soient les coups proposés par son adversaire, et, dans l'affirmative, on dit que A est un ensemble ***déterminé***. La notion peut paraître artificielle ou anecdotique, mais elle est en fait naturelle: dire que A est déterminé, c'est affirmer la propriété des éléments de A exprimée par l'énoncé infini

$$(\exists y_1)(\forall y_2)(\exists y_3)...((y_1, y_2, y_3, ...) \in A) \text{ ou } (\forall y_1)(\exists y_2)(\forall y_3)...((y_1, y_2, y_3, ...) \notin A)$$

et il se trouve que de nombreuses propriétés d'analyse peuvent être mises sous cette forme: par exemple pour tout ensemble de réels B il existe une partie A de $\mathcal{R}$ définissable uniformément à partir de B telle que la détermination de A équivaut à la mesurabilité de Lebesgue de B, et il en est de même pour la propriéte de Baire ou celle de l'ensemble parfait.

De fait, si pour une classe Γ de parties de $\mathcal{R}$, on note $\det(\Gamma)$ l'assertion 'tous les éléments de Γ sont déterminés', il est apparu que, pour de nombreuses classes Γ, l'hypothèse $\det(\Gamma)$ élucide complètement la structure de Γ, achevant ainsi l'étape B du programme envisagé ci-dessus.

Pour pouvoir donner des formulations plus précises, on rappelle les notations désormais traditionnelles suivantes: on définit $\mathbf{\Pi}^1_0$ comme la classe de tous les fermés de $\mathcal{R}$, puis inductivement les classes $\mathbf{\Sigma}^1_n$ et $\mathbf{\Pi}^1_n$ par les conditions suivantes:

i) les éléments de $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ sont les images continues de ceux de $\mathbf{\Pi}^1_n$;

ii) les éléments de $\mathbf{\Pi}^1_n$ sont les complémentaires de ceux de $\mathbf{\Sigma}^1_n$.
Ces classes constituent la *hiérarchie projective* de Lusin; les éléments de $\mathbf{\Sigma}^1_1$ sont aussi appelés ensembles analytiques, et on sait qu'un ensemble est borélien si, et seulement si, il est dans $\mathbf{\Sigma}^1_1 \cap \mathbf{\Pi}^1_1$.

Pour ce qui est de la détermination des ensembles de cette hiérarchie, on sait que tout ensemble fermé est déterminé (théorème de Gale-Stewart, qui s'applique à tout jeu où l'un des joueurs, s'il gagne, a partie gagnée dès une étape finie du jeu), et même que ZFC démontre la détermination de tout ensemble borélien (théorème de Martin, [13], cf.[5]). H. Friedman a montré que l'axiome '$\aleph_1$ existe' et ses analogues supérieurs '$\aleph_\alpha$ existe' pour tout ordinal dénombrable α sont nécessaires dans la preuve de ce résultat pour lequel donc la théorie de Zermelo est insuffisante. On voit ainsi apparaître un premier lien entre détermination et grands cardinaux. Du reste, on ne peut aller au delà du niveau borélien dans le système ZFC par le rapprochement des deux faits suivants:

LEMME. (Gödel) *Si* $(M, \in)$ *est un modèle de ZFC, il existe un modèle intérieur de* $(M, \in)$ *dans lequel* $\mathcal{R}$ *possède un bon ordre qui est dans* $\mathbf{\Sigma}^1_2 \cap \mathbf{\Pi}^1_2$.

LEMME. - *Si* $\det(\mathbf{\Pi}^1_n)$ *est satisfaite, alors tous les ensembles dans* $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ *sont mesurables (pour la mesure de Lebesgue).*

En effet, puisqu'un bon ordre ne peut être mesurable, la propriété $\det(\mathbf{\Pi}^1_1)$ ne saurait être satisfaite dans un modèle du type de celui fourni par le lemme de Gödel, et par conséquent elle ne peut être démontrée à partir de ZFC.

Pour illustrer l'aphorisme '$\det(\Gamma)$ précise complètement la structure de Γ', on ne peut que renvoyer à l'énorme corpus de résultats exposé dans les quatre tomes du Cabal Seminar [7], [8], [9], [10], et dû, entre autres, à Harrington, Jackson, Kechris, Martin, Moschovakis, Solovay, Steel et Woodin. On y obtient notamment pour les ensembles projectifs sous l'hypothèse de leur détermination une théorie analogue à celle que ZFC fournit pour les ensembles boréliens et analytiques (voir [17]). Par exemple, on montre à partir de la détermination projective, que, pour tout n, les classes $\mathbf{\Sigma}^1_{2n+2}$ et $\mathbf{\Pi}^1_{2n+1}$ ont la propriété d'*uniformisation* (c'est-à-dire que de toute partie de $\mathcal{R} \times \mathcal{R}$ qui est dans cette classe on peut extraire un graphe fonctionnel de même projection appartenant à ladite classe) -alors que dans le modèle de Gödel cité ci-dessus ce sont toutes les classes $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ qui ont cette propriété d'uniformisation. Toujours sous l'hypothèse de la détermination projective, il existe une fonction effective f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que tout ensemble dans $\mathbf{\Sigma}^1_n$ est $\aleph_{f(n)}$-borélien (notion analogue à celle de borélien où on considère des réunions de cardinal $< \aleph_{f(n)}$).

5. LE THÉORÈME DE MARTIN ET STEEL.

La question posée pour 'établir' les propriétés de détermination à partir du niveau $\mathbf{\Pi}^1_1$ est dès lors d'en construire des modèles canoniques, et, pour cela, de les relier à des axiomes de grands cardinaux pour lesquels de tels modèles existeraient (partie A du programme envisagé au paragraphe précédent). La première étape a été franchie rapidement:

THÉORÈME. (Martin, 1970 [12]) *L'axiome* 'il existe un cardinal mesurable' *entraîne la propriété* $\det(\Pi^1_1)$.

En 1978, Harrington a montré que l'hypothèse utilisée ci-dessus était en un sens minimale en établissant l'équivalence exacte de $\det(\Pi^1_1)$ avec une sorte de version locale de l'axiome affirmant l'existence d'un cardinal mesurable, légèrement plus faible que celui-ci, et liée à la théorie de Jensen et Silver (cf.[19]). La réponse apportée par ces résultats est satisfaisante car des modèles canoniques existent pour les axiomes mis en jeu (travaux de Kunen et Dodd-Jensen). Cependant, comme il existe dans ces modèles un bon ordre de $\mathcal{R}$ qui est dans $\Sigma^1_3 \cap \Pi^1_3$, le même argument que plus haut interdit que $\det(\Pi^1_2)$ puisse y être satisfaite. Il fallait donc chercher plus haut dans la hiérarchie des grands cardinaux pour espérer obtenir davantage de détermination.

En 1978, Martin [14] a proposé la première preuve de $\det(\Pi^1_2)$ à partir d'une hypothèse de grand cardinal très proche de la borne de Kunen (autrement dit à partir de l'existence d'un plongement élémentaire $j : M \to \overline{M}$ avec $\overline{M}$ 'presque' égal à M), suivie par une preuve de Woodin de $\det(\Pi^1_3)$ d'abord à partir d'une hypothèse située au-dessus cette borne, puis (1984) juste en-desssous de celle-ci. Les cardinaux mis en jeu dans ces démonstrations se trouvent au-delà des niveaux pour lesquels un modèle canonique était connu. Aussi des efforts intensifs ont été déployés pour tenter de construire des modèles canoniques jusqu'au niveau notamment de l'hypothèse utilisée dans la preuve de $\det(\Pi^1_2)$. Les résultats de Mitchell [17] paraissaient prometteurs, mais leur complexité très grande en différait la mise au point. En particulier, des difficultés d'ordre a priori purement technique gênaient le dépassement du niveau du cardinal 'superfort', défini ci-dessous en notant R_α l'ensemble des éléments de rang $< \alpha$, c'est à dire obtenus à partir de l'ensemble vide en moins de α itérations de l'opération 'passer à l'ensemble des parties':

DÉFINITION. - *On dit que κ est un cardinal superfort dans le modèle $(M, \in)$ s'il existe un plongement élémentaire intérieur $j : (M, \in) \to (\overline{M}, \in\restriction\overline{M})$ dont κ est l'ordinal critique et tel que $R_{j\kappa}^{(\overline{M}, \in\restriction\overline{M})}$ est égal à $R_{j\kappa}^{(M,\in)}$.*

Il est facile de vérifier que, dans la situation d'un plongement élémentaire intérieur $j : (M, \in) \to (\overline{M}, \in\restriction\overline{M})$ d'ordinal critique κ, il y a toujours égalité de $R_\kappa^{(\overline{M}, \in\restriction\overline{M})}$ et $R_\kappa^{(M,\in)}$. Dans la définition précédente, on réclame davantage de ressemblance entre M et $\overline{M}$ (égalité jusqu'au rang $j\kappa$ au lieu du rang κ), et donc l'hypothèse correspondante est un axiome plus fort que celle de l'existence d'un cardinal mesurable. Néanmoins le cardinal superfort reste très en-deçà du cardinal utilisé par Martin dans sa preuve de $\det(\Pi^1_2)$ et le sentiment général entre 1978 et 1984 était que les difficultés rencontrées dans l'élaboration des modèles de Mitchell seraient surmontées.

Le premier soupçon d'une obstruction est venu en 1984 avec des arguments de Foreman, Magidor et Shelah [4] qui établissaient, à partir d'un axiome légèrement plus fort que celui affirmant l'existence d'un cardinal superfort, des résultats de combinatoire qu'on pensait auparavant nécessiter des hypothèses beaucoup plus fortes. Appliquant des méthodes analogues, Woodin montrait que le même axiome interdisait l'existence d'un bon ordre projectif puis, même, de tout bon ordre 'raisonnablement' définissable, sur $\mathcal{R}$ (en collaboration avec Shelah).

Dès lors, il était clair que les tentatives de construction de modèles canoniques du type de ceux de Mitchell étaient vouées à l'échec pour ces niveaux de la hiérarchie car ces modèles possédaient tous un bon ordre définissable de $\mathcal{R}$. Par contre, il devenait possible d'espérer une preuve de la détermination à partir de l'existence d'un cardinal superfort ou d'hypothèses voisines. La notion précise induite par une analyse des résultats de Woodin et Shelah est la suivante:

DÉFINITION. - *On dit que δ est un cardinal de Woodin dans $(M, \in)$ si, pour toute fonction $F : \delta \to \delta$ il existe un ordinal $\kappa < \delta$ et un plongement élémentaire intérieur $j : (M, \in) \to (\overline{M}, \in\restriction\overline{M})$ tels que κ est l'ordinal critique de j, κ est clos par F et $R_{jF(\kappa)}^{(\overline{M},\in\restriction\overline{M})}$ est égal à $R_{jF(\kappa)}^{(M,\in)}$.*

Des arguments de réflexion montrent que, si δ est un cardinal de Woodin, alors il existe une infinité de cardinaux mesurables plus petits que δ, et que, si λ est un cardinal superfort, alors il existe une infinité de cardinaux de Woodin plus petits que λ. Le théorème prouvé à la fin de 1985 par Martin et Steel peut alors s'énoncer précisément comme suit:

THÉORÈME. - *Si $(M, \in)$ est un modèle de ZFC contenant n cardinaux de Woodin et un cardinal mesurable plus grand que chacun de ceux-ci, alors la propriété $\det(\mathbf{\Pi}^1_{n+1})$ est vraie dans $(M, \in)$.*

COROLLAIRE. - *Si $(M, \in)$ est un modèle de ZFC contenant un cardinal superfort, alors, dans $(M, \in)$, tout sous-ensemble projectif de $\mathcal{R}$ est déterminé.*

6. ARBRES HOMOGÈNES.

Le résultat démontré par Martin et Steel a été l'objet de recherches intensives pendant une décennie, et sa preuve, très délicate, ne peut être résumée en quelques pages (tout au moins pour le moment). Dans les deux paragraphes qui viennent, on va essayer d'en présenter quelques idées abordables. De fait, le premier problème tient à l'obtention d'une représentation convenable des ensembles permettant d'en démontrer la détermination, et il se trouve que cette partie de la preuve repose sur un argument qui est à la fois simple et très typique de l'utilisation de grands cardinaux pour démontrer des propriétés de détermination. Cet argument va être présenté ci-dessous.

Le point de départ sera la notion d'ensemble *souslinien* : une partie A de $\mathcal{R}$ sera dite Z-souslinienne si elle est la projection d'un fermé de $\mathcal{R} \times Z^{\mathbb{N}}$ où Z est muni de la topologie discrète et où $Z^{\mathbb{N}}$ est muni de la topologie produit. On sait que $\mathbf{\Sigma}^1_1$ est exactement l'ensemble des $\aleph_0$-sousliniens, que les éléments de $\mathbf{\Sigma}^1_2$ sont $\aleph_1$-sousliniens et que (avec l'axiome du choix) tout élément de $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ est $2^{\aleph_0}$-souslinien.

Nos notations seront les suivantes. $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers non nuls. Pour tout ensemble Y, on note Y^* l'ensemble des suites finies d'éléments de Y. La longueur d'une suite finie s est notée $|s|$, de sorte que s est considérée comme une application de $\{1, \ldots, |s|\}$ dans Y. Si f est élément de Y^* ou de $Y^{\mathbb{N}}$, et si, dans le premier cas, n est moindre que $|f|$, on note $f\restriction n$ la *restriction* de f à $\{1, \ldots, n\}$.

DÉFINITION. - *Un* ***arbre*** *sur Y est une partie de Y^* close par restriction ; si T est un arbre sur Y, une* ***branche*** *de S est une suite f dans $Y^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout n on ait $f\restriction n \in T$. L'ensemble des branches de T est noté $[T]$.*

Avec ces notations, les fermés d'un espace produit $Y^{\mathbb{N}}$ sont exactement les ensembles de la forme $[T]$ avec T arbre sur Y. De la sorte, un ensemble A est Z-souslinien si, et seulement si, il s'écrit $p[T]$ où T est un arbre sur $\mathbb{N} \times Z$ et où p désigne la première projection.

On a rappelé que tout fermé est déterminé. Le problème bien sûr pour montrer la détermination d'un ensemble supposé représenté comme souslinien est que la détermination ne passe pas en général à la projection. L'idée est de renforcer la notion en requérant la présence d'un système de *mesures* cohérentes.

Dans toute la suite, on suppose qu'un modèle $(M, \in)$ est fixé, à l'intérieur duquel toutes les constructions sont effectuées.

Pour toute κ-mesure μ, on note M_μ le modèle intérieur de $(M, \in)$ construit partir de μ comme au paragraphe 3.

Supposons d'abord que $\overline{\mu}$ est une κ-mesure sur un ensemble $\overline{Y}$ et que π est une application définie sur $\overline{Y}$ dont l'image est Y. Si μ est la mesure-image de $\overline{\mu}$ par π, alors l'application

$$j_{\mu\overline{\mu}} : \int F \mathrm{d}\mu \to \int (F \circ \pi) \mathrm{d}\overline{\mu}$$

est un plongement élémentaire de M_μ dans $M_{\overline{\mu}}$.

Supposons maintenant que $(Y_n, \pi_{nm})_{m \leq n \in \mathbb{N}}$ est un système projectif et que $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite *cohérente* de κ-mesures sur $(Y_n, \pi_{nm})_{m \leq n \in \mathbb{N}}$ au sens où μ_n est une mesure sur Y_n et où pour $m \leq n$ la mesure μ_m est l'image de μ_n par π_{nm} : alors $(j_{\mu_m \mu_n})_{m \leq n \in \mathbb{N}}$ constitue un système inductif de plongements élémentaires dont la limite est une famille de plongements élémentaires dans un modèle qu'on notera $\varinjlim M_{\mu_n}$. Il est à remarquer que rien ne force l'appartenance de ce modèle limite à être bien fondée. On pose alors :

DÉFINITION. - *Soit κ un cardinal non dénombrable ; un* ***arbre κ-homogène*** *sur Z est un système $(T, (\mu_s)_{s \in \mathbb{N}^*})$ tel que*

i) T est un arbre sur $\mathbb{N} \times Z$;

ii) pour s dans $\mathbb{N}^*$, μ_s est une κ-mesure sur $\{t \in Z^* ; (s,t) \in T\}$;

iii) pour tout α dans $\mathcal{R}$, la suite $(\mu_{\alpha\restriction n})_{n \in \mathbb{N}}$ est cohérente vis à vis des applications restrictions;

iv) si α est dans $p[T]$, alors $\varinjlim M_{\mu_{\alpha\restriction n}}$ est un modèle bien fondé (i.e. son appartenance est une relation bien fondée).

Une partie A de $\mathcal{R}$ est dite ***κ-homogènement souslinienne*** *s'il existe un ensemble Z et un arbre κ-homogène $(T, (\mu_s)_{s \in \mathbb{N}})$ sur $\mathbb{N} \times Z$ tel que A est $p[T]$.*

PROPOSITION. - *Si A est κ-homogènement souslinien, alors A est déterminée.*

La démonstration n'utilise aucun nouvel outil et peut être donnée.

Supposons que A est $p[T]$, où $(T,(\mu_s)_{s\in\mathbb{N}})$ est un arbre κ-homogène sur $\mathbb{N}\times Z$. Il sera commode de considérer les éléments de T non comme des suites de couples mais comme des couples de suites d'égales longueurs (ce qui a déjà été fait dans le point *ii* de la définition ci-dessus). A côté du jeu associé à A comme au paragraphe 4, on introduit un ***jeu auxiliaire*** où le joueur I propose des éléments de $\mathbb{N}\times Z$ tandis que II joue seulement des entiers :

I	(k_1,z_1)		(k_3,z_2)		$\ldots$
II		k_2		k_4	

et on déclare que I gagne ce jeu si $((k_1,k_2,k_3,\ldots),(z_1,z_2,z_3,\ldots))$ est dans $[T]$, autrement dit si $(k_1,k_2,k_3,\ldots)$ est dans A et que $(z_1,z_2,z_3,\ldots)$ ***prouve*** que $(k_1,k_2,k_3,\ldots)$ est dans A. Ce jeu étant fermé est déterminé. Clairement, si le joueur I a une stratégie gagnante dans le jeu auxiliaire, il en déduit par projection une stratégie gagnante dans le jeu associé à A. Supposons donc que II a une stratégie gagnante dans le jeu auxiliaire. Formellement, une telle stratégie se décrira comme une application $\hat\sigma$ indiquant au joueur II comment répondre à toute suite finie de coups ayant été jouée antérieurement, donc comme une application de $\{(s,t)\in\mathbb{N}^*\times Z^*; |s|=2|t|-1\}$ dans $\mathbb{N}$. Pour une telle application $\hat\sigma$, notons $\langle\hat\sigma\rangle$ l'arbre formé par toutes les positions finies du jeu jouées conformément à $\hat\sigma$, c'est-à-dire

$$\{(s,t)\in\mathbb{N}^*\times Z^*; |s|=2|t| \ \text{ et } \ (\forall i\le|t|)(s(2i)=\hat\sigma(s\restriction 2i\text{-}1,t\restriction i))\}.$$

Alors dire que $\hat\sigma$ fait gagner le joueur II, c'est dire que toute partie jouée suivant $\hat\sigma$, c'est-à-dire toute branche de $\langle\hat\sigma\rangle$, évite $[T]$, soit encore que l'arbre $T\cap\langle\hat\sigma\rangle$ n'a pas de branche infinie.

Il s'agit de construire une stratégie σ pour le joueur II dans le jeu associé à A, c'est-à-dire, avec des notations analogues aux précédentes, une application σ de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ telle que $[\langle\sigma\rangle]\cap A$ soit vide. Le problème pour construire σ à partir de $\hat\sigma$ est d'***imaginer*** des éléments de Z joués par I : $\hat\sigma$ n'assurera le gain que si ces éléments sont inchangés au cours de la partie tout en restant cohérents avec les entiers imprévisibles joués par I. A cette fin, on utilise les mesures sur T qui permettent de prendre des valeurs 'moyennes', et on pose pour s de longueur $2n$

$$\sigma(s):=\int\hat\sigma(s,t)\mathrm{d}\mu_{s\restriction n}(t).$$

Comme les mesures μ_s sont $\aleph_1$-additives, toute fonction à valeurs dans $\mathbb{N}$ est μ_s-presque partout constante, et σ est bien à valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit donc α un élément quelconque de $\langle\sigma\rangle$, c'est à dire (le résultat d') une partie jouée conformément à σ. Notons $(M_\alpha,\in_\alpha)$ la limite inductive du système formé par les modèles $M_{\mu_{\alpha\restriction n}}$, et soit j le plongement élémentaire canonique de $(M,\in)$ dans $(M_\alpha,\in_\alpha)$ déduit de ce passage à la limite.

LEMME. *Il existe une suite 'canonique' $g:\mathbb{N}\to jZ$ telle que, pour tout entier n, on a:*

i) $(j\alpha\restriction n, g\restriction n)\in jT$;

ii) $j\alpha(2n) = j\hat\sigma(j\alpha\restriction 2n\text{-}1, g\restriction n)$.

Autrement dit, dans le modèle $(M_\alpha,\in_\alpha)$, l'image par j de la partie jouée suivant σ est une partie jouée suivant $j\hat\sigma$ relativement à une certaine suite g d'éléments de jZ. La preuve du lemme est pur calcul sur les κ-mesures. La suite g est construite à l'aide des applications coordonnées : $g(n)$ est l'image dans M_α de $\int t(n)\mathrm{d}\mu_{\alpha\restriction n}(t)$. Alors le point *i)* découle de ce que

$\mu_{\alpha\restriction n}(\{t; (\alpha\restriction n, t)\in T\})$ vaut 1, tandis que le point *ii)* vient du fait que, si μ est une κ-mesure sur Y et si j_μ est le plongement élémentaire associé, on a pour toute fonction F de domaine Y

$$\int F(t)\mathrm{d}\mu(t) \quad = \quad j_\mu F\left(\int t\mathrm{d}\mu(t)\right)$$

ainsi qu'il résulte du théorème de Loś.

Par conséquent, $(j\alpha, g)$ est à la fois une branche de jT et de $j\langle\hat{\sigma}\rangle$. La conclusion exige plus de soin qu'il ne pourrait sembler : on ne peut ***pas*** alléguer le fait que $j\hat{\sigma}$ est gagnante pour II pour affirmer que $j\alpha$ n'est pas dans jA et donc α pas dans dans A, car la suite g n'est ***pas*** dans le modèle M_α. On raisonnera comme suit. Puisque $j\hat{\sigma}$ est gagnante pour II dans M_α, l'arbre $jT\cap\langle j\hat{\sigma}\rangle$ n'a pas, dans M_α, de branche infinie, autrement dit la relation $\supset\restriction(jT\cap\langle j\hat{\sigma}\rangle)$ est bien fondée dans M_α, donc, par le lemme de Mostowski, elle se projette sur $\in_\alpha$. Mais alors la branche $(j\alpha, g)$ trouvée dans M pour cet arbre fournit, dans M, une suite décroissante pour $\supset\restriction(jT\cap\langle j\hat{\sigma}\rangle)$ dont l'image point par point par projection est une suite décroissante pour $\in_\alpha$, ce qui, par définition d'un arbre homogène, interdit que α soit dans A. La preuve de la proposition est donc complète.

7. ARBRES D'ITÉRATION.

D'après la première étape détaillée dans le paragraphe précédent, le problème est de représenter les arbres de la hiérarchie projective comme homogènement sousliniens. Il est facile de le faire pour les ensembles de la classe $\mathbf{\Pi}^1_1$ en présence d'un cardinal mesurable : il s'agit d'une adaptation de la preuve du résultat classique les représentant comme ensembles $\aleph_1$-sousliniens. Ensuite, il s'agit de trouver une méthode inductive pour monter dans la hiérarchie. Le passage aux images continues (ou, si on préfère, aux projections) pose des difficultés purement techniques qui sont correctement maîtrisées depuis plusieurs années. La question principale est celle du passage au complémentaire, et le point crucial de la preuve de Martin et Steel est le suivant (si λ est un cardinal, on note λ^+ le plus petit cardinal $> \lambda$):

PROPOSITION. - *Si δ est un cardinal de Woodin et si A est une partie δ^+-homogènement souslinienne de $\mathcal{R}$, alors le complémentaire $\mathcal{R}\backslash A$ de A est κ-homogènement souslinien pour tout cardinal $\kappa < \delta$.*

Une fois ce résultat établi, on obtient par récurrence une représentation sous forme homogènement souslinienne (en fait, sous une forme légèrement affaiblie mais encore suffisante pour démontrer la détermination) pour les ensembles dans la classe $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ à partir de l'existence de n cardinaux de Woodin et d'un cardinal mesurable au-dessus d'eux (ce dernier étant suffisant pour amorcer la récurrence au niveau des $\mathbf{\Pi}^1_1$), et la détermination en résulte. La preuve de la proposition est ***très*** délicate et on ne donnera ici qu'une vague idée de la problématique sous-jacente.

Il s'agit d'exprimer la *non*-appartenance d'un élément α à une partie A de $\mathcal{R}$ comme l'existence d'une ***obstruction*** $\Omega(\alpha)$ qui soit 'lipschitzienne en α' au sens où $\Omega(\alpha)$ est limite d'approximations finies $\Omega_n(\alpha)$ ne dépendant que de $\alpha\restriction n$. Dès lors, si $\tilde{T}$ est l'arbre formé par tous les couples $(s, \Omega_{|s|}(s))$ ($\tilde{T}$ est l'arbre formé par toutes les tentatives de preuve montrant qu'on n'est pas dans A), on aura que α est dans le complémentaire de A si, et seulement si, il existe f tel que (α, f) est dans $[\tilde{T}]$, autrement dit l'ensemble $\mathcal{R}\backslash A$ sera $p[\tilde{T}]$ et, à ce titre, souslinien.

Ainsi, partons de A souslinien, soit $A = p[Y]$ avec T arbre sur $\mathbb{N} \times Z$. Dire que α n'est pas dans A, c'est dire qu'il n'existe pas de branche de T 'passant' par α, ou précisément, en introduisant pour s dans $\mathbb{N}^*$ l'arbre T_s sur Z par

$$t \in T_s \quad \text{si, et seulement si,} \quad |t| \leq |s| \text{ et } (s{\restriction}|t|, t) \in T,$$

c'est dire que l'arbre $\bigcup T_{\alpha\restriction n}$ n'a pas de branche infinie, soit encore qu'il existe sur cet arbre une obstruction à l'existence d'une branche infinie constituée par une fonction de rang, *id est* une application ρ de Z^* dans la collection On des ordinaux telle que '$\bar{s}$ *prolonge* s' entraîne '$\rho(\bar{s}) < \rho(s)$'. Si alors on introduit l'arbre $\tilde{T}$ sur $\mathbb{N} \times On^{Z^*}$ comme l'ensemble des couples $(s, (\rho_1, \ldots, \rho_{|s|}))$ tels que, pour $i \leq |s|$, ρ_i est une fonction de rang sur $T_{s\restriction i}$ et ρ_j prolonge ρ_i si $j \geq i$, on a que α est dans $\mathcal{R}\backslash A$ si, et seulement si, α est dans $p[\tilde{T}]$, et ceci fournit le principe pour le transfert du caractère souslinien d'un ensemble à son complémentaire (qui permettrait par exemple d'obtenir le caractère $\aleph_1$-souslinien des éléments de $\mathbf{\Pi}^1_1$).

Partons maintenant de A homogènement souslinien, soit $A = p[T]$ avec $(T, (\mu_s)_{s \in \mathbb{N}^*})$ arbre κ-homogène. Si α est dans A, par hypothèse le modèle limite $\varinjlim M_{\mu_{\alpha\restriction n}}$ a une appartenance bien fondée, et en fait il est aisé de montrer qu'il s'agit d'une équivalence. Donc on a que α n'est *pas* dans A si, et seulement si, l'appartenance de $\varinjlim M_{\mu_{\alpha\restriction n}}$ possède (dans le modèle de départ) une suite infinie décroissante, et on vérifie facilement que cette condition équivaut à l'existence (dans ce modèle de départ) de l'obstruction constituée par une suite d'ordinaux Θ vérifiant pour tout entier n

$$\Theta(n+1) < j_{\mu_{\alpha\restriction n}\mu_{\alpha\restriction n+1}}(\Theta(n))$$

(une telle suite fournit une suite décroissante d'ordinaux dans la limite inductive). La même démarche que ci-dessus conduit à introduire l'arbre $\tilde{T}$ sur $\mathbb{N} \times On$ représentant les tentatives finies de construction de telles suites d'ordinaux, en posant

$$(s, t) \in \tilde{T} \quad \text{si, et seulement si,} \quad (\forall i < n)(t(i+1) < j_{\mu_{s\restriction i}\mu_{s\restriction i+1}}(t(i))).$$

On montre alors facilement que le complémentaire $\mathcal{R}\backslash A$ est égal à $p[\tilde{T}]$ et tout le problème est d'établir que $\tilde{T}$ est λ-homogène pour un λ suffisant.

La difficulté n'est pas d'obtenir des mesures sur $\tilde{T}$, mais d'assurer la condition de bonne fondation pour les limites correspondantes. D'une façon générale, on est confronté au problème suivant: construire (par un procédé 'lipschitzien', *id est* tel que les n premiers termes de la suite d'arrivée ne dépendent que des n premiers termes de la suite de départ) à partir d'un système inductif de plongements élémentaires j_{mn} un nouveau système inductif de plongements élémentaires $\tilde{j}_{mn}$ tel que la limite du second a une appartenance bien fondée si, et seulement si, celle du premier en a une qui ne l'est pas. C'est sur ce point précis que la preuve de Martin et Steel marque un progrès décisif par l'introduction d'un outil nommé ***arbre d'itération***. De façon grossière et dans le cas le plus simple, un arbre d'itération est la donnée d'une suite $(M_n, \in{\restriction}M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de modèles intérieurs, d'une suite non décroissante de cardinaux

$(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que, pour tout n, M_n et M_{n+1} ont mêmes ensembles jusqu'au rang ρ_n et d'une suite de plongements élémentaires $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que j_1 est un plongement élémentaire intérieur de $(M_1, \in\restriction M_1)$ dans $(M_2, \in\restriction M_2)$ et, pour tout n, j_{n+1} est un plongement élémentaire intérieur de $(M_n, \in\restriction M_n)$ dans $(M_{n+2}, \in\restriction M_{n+2})$. On a dans une telle situation deux limites inductives correspondant respectivement aux modèles d'indices pairs et impairs, et on montre que, si les plongements élémentaires sont définissables de façon suffisamment simple et si les cardinaux ρ_n sont suffisamment grands, alors la bonne fondation de l'(appartenance d')une de ces limites équivaut à la mauvaise fondation de (celle de) l'autre, faisant apparaître l'alternative souhaitée. Les deux conditions 'simplicité du plongement élémentaire' et 'grandeur du cardinal ρ_n' sont évidemment antagonistes, puisque, ainsi qu'on l'a expliqué, requérir davantage de ressemblance entre le modèle d'arrivée d'un plongement élémentaire intérieur et son modèle de départ force à 'compliquer' celui-ci. Dans le cas actuel, les plongements élémentaires associés aux mesures suivant le procédé d'ultrapuissance décrit au paragraphe 3 ne sont pas suffisants pour construire des arbres d'itération. Par contre, c'est en utilisant le procédé plus puissant des *'extenders'* développé par Dodd, Jensen et Mitchell que Martin et Steel ont pu mener à bien cette construction. Leur méthode très technique ne peut être abordée ici.

8. LES TRAVAUX DE WOODIN ; PERSPECTIVES.

A la suite du théorème de Martin-Steel, la recherche des modèles canoniques a été complètement réorientée : comme on l'a vu, il devenait désespéré de chercher pour un cardinal superfort un modèle canonique du type de ceux utilisés précédemment. Par contre, une théorie raisonnable pour les cardinaux de Woodin restait à faire, et était en particulier nécessaire pour obtenir une réciproque au théorème de détermination. Les travaux de Woodin occupent une place prépondérante dans ces développements. En premier lieu, on peut mentionner une amélioration du théorème de détermination.

THÉORÈME. (Martin-Steel-Woodin) *S'il existe dans $(M, \in)$ un cardinal superfort, et si $L(\mathcal{R})$ est le plus petit modèle intérieur de $(M, \in)$ incluant $\mathcal{R}$, alors dans le modèle $L(\mathcal{R})$ toutes les parties de $\mathcal{R}$ sont déterminées.*

Ainsi l'axiome de détermination complet se trouve rattaché, du point de vue de la consistance, à l'échelle des grands cardinaux. La preuve repose sur le fait que tous les ensembles de réels qui sont dans $L(\mathcal{R})$ sont alors homogènement sousliniens.

A la suite de Martin et Steel, Woodin a obtenu une nouvelle preuve du théorème de détermination projective, et également une réciproque (presque) parfaite (en terme de consistance, ce qui est le mieux qu'on puisse espérer).

THÉORÈME. (Woodin) *Si $(M, \in)$ est un modèle de ZFC satisfaisant* $\det(\boldsymbol{\Pi}^1_{n+1})$, *alors il existe un modèle intérieur de $(M, \in)$ possédant n cardinaux de Woodin.*

Le principe de la preuve (pour $n = 1$) est le suivant. Supposons $\det(\boldsymbol{\Pi}^1_2)$ vraie dans $(M, \in)$; alors il existe un élément r de $\mathcal{R}^{(M,\in)}$ tel que, dans $(L[r], \in\restriction L[r])$, plus petit modèle intérieur de $(M, \in)$ contenant r, toutes les parties de $\mathcal{R}$ définissables en termes d'ordinaux sont déterminées. Alors dans le modèle intérieur $(HOD^{L[r]}, \in\restriction HOD^{L[r]})$ de $(L[r], \in\restriction L[r])$ formé par tous les ensembles héréditairement définissables en termes d'ordinaux le cardinal $\aleph_2^{L[r]}$ est un cardinal de Woodin.

Pour ce qui est du 'programme des modèles canoniques', la principale question est désormais celle de trouver de tels modèles pour un nombre quelconque (fini) de cardinaux de Woodin. Dans le cas d'un seul cardinal de Woodin, considérons l'ensemble $\mathcal{R}$ calculé dans le modèle $HOD^{L[r]}$ ci-dessus, qui est traditionnellement dénoté Q_3. Alors Q_3 appartient (dans $L[r]$) à la classe Π^1_3 et on introduit $L(Q_3)$, le plus petit modèle de ZFC qui contienne Q_3. Toute une 'Q-théorie' a été développée par Kechris, Martin et Solovay (incluant des résultats de Harrington et Woodin) qui fournit pour le modèle $L(Q_3)$ les renseignements escomptés. En particulier, $L(Q_3)$ satisfait l'axiome du choix, l'hypothèse généralisée du continu et $\mathcal{R}$ y possède un bon ordre qui est dans $\Pi^1_3 \cap \Sigma^1_3$. Les récents résultats de Woodin suggèrent que $L(Q_3)$ et ses analogues supérieurs sont les meilleurs candidats comme modèles canoniques d'un type nouveau adapté à l'échelle de détermination et aux cardinaux de Woodin.

Bien des questions restent ouvertes dans le programme de Gödel dans la mesure où la hiérarchie des axiomes de grands cardinaux est largement ouverte vers le haut et où bien peu est connu sur les modèles du sommet de cette hiérarchie (entre les cardinaux de Woodin et la borne de Kunen). Mais les résultats récents pallient ces lacunes au niveau des parties de $\mathcal{R}$ (c'est-à-dire de l'analyse) : essentiellement les 'grands' axiomes de grands cardinaux *rigidifient* la théorie des réels. La preuve du résultat de Woodin et Shelah affirmant que, sous l'hypothèse de l'existence d'un cardinal convenable ('supercompact'), tous les ensembles définissables de réels sont mesurables pour la mesure de Lebesgue est à ce titre tout à fait remarquable: ce qui est montré, c'est que, sous cette hypothèse, aucune propriété de $\mathcal{R}$ ne peut être modifiée par la méthode du forcing: donc puisqu'on sait, à partir d'un modèle quelconque, construire par forcing une extension où tous les ensembles définissables de réels sont mesurables (il s'agit du résultat 'historique' de Solovay en 1963), c'est que la propriété 'tous les ensembles définissables de réels sont mesurables' devait déjà être vraie dans le modèle de départ.

Ainsi on voit apparaître une alternative pour les modèles de ZFC en fonction des axiomes de grands cardinaux qui y sont vérifiés :

- en-dessous d'un certain niveau, disons celui du cardinal superfort ou, plus précisément, celui d'une infinité de cardinaux de Woodin, les propriétés des ensembles de réels sont très variables mais on dispose de modèles 'canoniques' dont tout modèle est plus ou moins proche;

- à partir de ce niveau, les modèles sont largement inconnus, mais les propriéts de leurs ensembles de réels en sont dans une certaine mesure 'gelées' et connues.

Il est clair que ces phénomènes remettent à l'ordre du jour la recherche sur des questions comme l'hypothèse du continu (que les résultats de Gödel et Cohen ont *ouvertes* et non fermées comme une vue superficielle pourrait faire croire). Le sentiment général est que cette hypothèse du continu est probablement fausse (dans de 'bons' modèles canoniques) mais des résultats très récents de Foreman et Magidor sur une forme particulière dite constructive de cette hypothèse semblent éloigner encore les espoirs d'une telle preuve.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. BARWISE éditeur, *Handbook of mathematical logic*, North Holland (1977).
[2] N. BOURBAKI, *Théorie des ensembles*, Hermann (1971).
[3] A. DODD, *The core model*, London Math. Soc. Lect. Notes **61**(1982).
[4] M. FOREMAN, M. MAGIDOR et S.SHELAH,*Martin's maximum, saturated ideals and non-regular ultrafilters*, Annals of Math. à paraître.
[5] S. GRIGORIEFF, *Détermination des jeux boréliens et problèmes logiques associés [d'après D. Martin]*, Séminaire Bourbaki, exp. n^o 478, février 1976, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag **567** (1977), 122–135.
[6] Th. JECH, *Set theory*, Academic press (1978).
[7] A. KECHRIS et Y. MOSCHOVAKIS éditeurs, *Cabal seminar 76-77*, Lect. Notes in Math., Springer-Verlag **689** (1978).
[8] A. KECHRIS, D. MARTIN et Y. MOSCHOVAKIS éditeurs, *Cabal seminar 77-79*, Springer Lect. Notes in Math., Springer-Verlag **869** (1981).
[9] A. KECHRIS, D. MARTIN et Y. MOSCHOVAKIS éditeurs, *Cabal seminar 79-81*, Springer Lect. Notes in Math., Springer-Verlag **1019** (1983).
[10] A. KECHRIS, D. MARTIN et J. STEEL éditeurs, *Cabal seminar 81-85*, Springer Lect. Notes in Math., Springer-Verlag **1333** (1988).
[11] K. Mc ALOON, *Formes combinatoires du théorème d'incomplétude [d'après J. Paris et d'autres]*, Séminaire Bourbaki, exp. n^o 521, juin 1978, Lect. Notes in Math., Springer Verlag **710** (1979), 263–276.
[12] D. MARTIN, *Measurable cardinals and analytic games*, Fundamenta math. **66** (1970) 287–291.
[13] D. MARTIN, *Borel determinacy*, Annals of math. **102** (1975) 363–371.
[14] D. MARTIN, *Infinite games*, Proceedings of the international congress of mathematicians, O. Lehto éd., Acad. Scient. Fennica, Helsinki (1978) 269–273.
[15] D. MARTIN et J. STEEL, *Projective determinacy*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **85** (1988) 6582–6586.
[16] D. MARTIN et J. STEEL, *A proof of projective determinacy*, Journal of the Amer. Math. Soc. **2** (1989) 71–125.
[17] W. MITCHELL, *Hypermeasurable cardinals*, Proc. Logic colloquium 78, M. Boffa et al. éd., North Holland (1979).
[18] Y. MOSCHOVAKIS, *Descriptive set theory*, North Holland (1980).
[19] J. STERN, *Le problème des cardinaux singuliers [d'après R.Jensen et J.Silver]*, Séminaire Bourbaki, exp. n^o 494, novembre 1976, Lect. Notes in Math., Springer Verlag **677** (1978), 59–72.
[20] J. STERN, *Le problème de la mesure*, Séminaire Bourbaki, exp. n^o 632, juin 1984, Astérisque **121–122** (1985), 325–346.
[21] H. WOODIN, *Supercompact cardinals, sets of reals and weakly homogeneous trees*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **85** (1988) 6587–6591.

Patrick DEHORNOY
Département de mathématiques, Université de Caen, F 14032 Caen cédex
courrier électronique: dehornoy@frcaen51.earn