Astérisque

NICOLAS LERNER

Principe d'incertitude et microlocalisation

Astérisque, tome 152-153 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 669, p. 7-17
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__7_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1986
39ème année, 1986-87, n° 669

PRINCIPE D'INCERTITUDE ET MICROLOCALISATION
[d'après C. Fefferman et D.H. Phong]

par Nicolas LERNER

1. INTRODUCTION

Le principe d'incertitude, dans son expression la plus intuitive, affirme qu'on ne peut déterminer à la fois la position x d'une particule et sa quantité de mouvement ξ avec une précision arbitrairement petite. Il constitue donc une *limitation* à la localisation dans l'espace de phase (V,σ) (V espace des (x,ξ) , $V = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$, σ est la forme symplectique). Considérons une famille $\mathcal{E} = \{E_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ d'ellipsoïdes recouvrant l'espace de phase, i.e.

$$E_\nu = \{X \in V \ , \ g_\nu(X-X_\nu) \le 1\} \quad , \quad \bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} E_\nu = V \ ,$$

où g_ν est une forme quadratique définie positive et X_ν un point de V . La famille $\mathcal{E}$ respecte le principe d'incertitude s'il existe une constante h telle que, pour tout ν ,

$$h^2 g_\nu \le g_\nu^\sigma \ , \tag{1.1}$$

où g_ν^σ est la forme quadratique duale de g_ν par rapport à la forme symplectique. Rappelons la définition de g^σ : la forme symplectique σ s'identifie avec $\sigma : V \longrightarrow V^*$, $\sigma^* = -\sigma$, $\sigma(X,Y) = \langle\sigma X,Y\rangle_{V^*,V}$. La forme quadratique g s'identifie avec $g : V \longrightarrow V^*$, $g^* = g$, $g > 0$, $g(X,Y) = \langle gX,Y\rangle_{V^*,V}$. On définit alors $g^\sigma = \sigma^* g^{-1}\sigma$: c'est une forme quadratique définie positive sur V . Par exemple si

$$E_\nu \equiv \frac{|x-x_\nu|^2}{\Delta x_\nu^2} + \frac{|\xi-\xi_\nu|^2}{\Delta\xi_\nu^2} \le 1 \ ,$$

le principe d'incertitude (1.1) s'écrit

$$\Delta x_\nu \ \Delta\xi_\nu \ge h \ .$$

La version quantique du principe d'incertitude est que les opérateurs de position x_j et de quantité de mouvement $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j}$ ne commutent pas. Utilisant cette remarque simple et profonde, il est facile d'établir les classiques "relations d'incertitude". Considérons un oscillateur

(1.2) $$\Omega = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 D_{x_j}^2 + \mu_j^2 x_j^2 \ .$$

On a l'identité (norme et produit scalaire L^2)

(1.3) $$((\lambda^2 D_x^2 + \mu^2 x^2)u,u) = \|(\lambda D_x - i\mu x)u\|^2 + \frac{\lambda\mu}{2\pi}\|u\|^2$$

$(D_x = \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x}$, on posera $\mathring{i} = 2i\pi$).

On obtient donc

(1.4) $$(\Omega u,u) \geq \frac{1}{2\pi}\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j\right)\|u\|^2 \ .$$

Réutilisant (1.3) pour $\lambda\mu = 1$ et minimisant, il vient également

(1.5) $$\frac{1}{4\pi}\|u\|^2 \leq \inf_{1\leq j\leq n} \|D_{x_j} u\| \ \|x_j u\| \ .$$

La quantité $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mu_j$ dans (1.4) est un invariant symplectique de la forme quadratique Ω noté $\mathrm{Tr}_+ \Omega$ ([21], [17], [18], [19] ch. 22). L'inégalité (1.4) est optimale, i.e. la plus petite valeur propre de Ω est $\frac{1}{2\pi}\mathrm{Tr}_+\Omega$. Il y a évidemment un lien entre l'analyse microlocale des équations aux dérivées partielles et la mécanique quantique, celle-là cherchant notamment à "quantifier" des partitions plus ou moins raffinées de l'espace de phase.

2. MICROLOCALISATION ET PARTITION DE L'ESPACE DE PHASE

2.1. Le calcul de Weyl - Hörmander

Nous décrivons ici brièvement la présentation des opérateurs pseudo-différentiels donnée par Hörmander [18] ([19] ch. 18). Soit (V,σ,g) un espace vectoriel symplectique riemannien. Les symboles de poids m (m est une fonction sur V à valeurs strictement positives) sont les fonctions $a \in C^\infty(V)$ dont la croissance est contrôlée par g , i.e.

(2.1) $$\sup_{X\in V} \|a^{(k)}(X)\|_{g_X} m(X)^{-1} = C_k < \infty \ ,$$

i.e.

(2.2) $$|a^{(k)}(X)(T_1, \ldots, T_k)| \leq C_k m(X)\, g_X(T_1)^{1/2} \ldots g_X(T_k)^{1/2} \ .$$

On dira dans ces conditions que a appartient à $S(m,g)$. Cette métrique g induit une localisation dans l'espace de phase : en tout point $X \in V$ (e.g. $X = (x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$) un voisinage pertinent est la g_X boule de centre X et de rayon fixé. Il est clair d'après des contre-exemples classiques [4] que des conditions doivent être imposées à g si on désire disposer d'un calcul pseudo-différentiel intéressant (e.g. les symboles d'ordre 0 (poids 1) se quantifient en opérateurs bornés sur L^2). Hörmander, à la suite des travaux de R. Beals et C. Fefferman [2], [3], [1] a dégagé les trois conditions simples suivantes.

(i) *La métrique* g *varie lentement, i.e. il existe* $C > 0$ *tel que, pour tout* (X,Y)

(2.3) $$g_X(X-Y) \leq C^{-1} \text{ implique } C^{-1}g_Y \leq g_X \leq C g_Y .$$

(ii) *Pour tout* X ,

(2.4) $$g_X \leq g_X^\sigma .$$

(iii) *Il existe* C, N , *tels que, pour tout* (X,Y)

(2.5) $$g_X \leq C g_Y (1 + g_X^\sigma(X-Y))^N .$$

Notons que les fonctions poids m dans (2.1) sont astreintes à varier lentement (i.e. il existe C_m tel que, pour tout (X,Y) , $g_X(X-Y) \leq C_m^{-1}$ implique $C_m^{-1} \leq m(X)m(Y)^{-1} \leq C_m$) et à vérifier $m(X)m(Y)^{-1} \leq C_m(1+g_X^\sigma(X-Y))^{N_m}$. La première condition (i) de variation lente ne fait pas appel à la structure symplectique de l'espace de phase et permet d'obtenir de bonnes partitions de l'unité de V i.e. $\sum_{\nu=1}^{+\infty} \varphi_\nu(X) = 1$, la somme étant localement uniformément finie et φ_ν étant de poids 1 uniformément (i.e. $\sup_\nu \|\varphi_\nu^{(k)}\|_{g_\nu} = C_k < +\infty$, g_ν étant la métrique sur le support de φ_ν). Cette condition est en fait la seule hypothèse de "régularité" utile : si (i) est vérifiée, on peut construire une métrique riemannienne uniformément équivalente à la précédente. La condition (ii) est une version du principe d'incertitude ; notons que g étant une forme quadratique définie positive, on peut supposer (*cf.* [19] ch. 21) $g = \sum_{j=1}^n h_j(dy_j^2 + d\eta_j^2)$ avec $\sigma = \sum_{j=1}^n d\eta_j \wedge dy_j$. La condition (ii) signifie alors $\max_{1\leq j\leq n} h_j \leq 1$.

La condition (iii) est liée au lemme de Cotlar sur la presque-orthogonalité ([5] , [19] ch. 18) et permet de traiter les interactions à longue distance dans l'espace de phase.

On quantifie les symboles par la formule de Weyl [26], a^W désignant l'opérateur quantifiant a . On a

(2.6) $$(a^W u)(x) = \int e^{\mathring{i}(x-y)\xi}\, a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy\, d\xi ,$$

(2.7) $$a^W = \int_{(\mathbb{R}^{2n},\sigma)} \hat{a}(\vartheta)\, e^{\mathring{i}\vartheta.M}\, d\vartheta ,$$

$\vartheta = (\hat{x},\hat{\xi})$, $\vartheta.M$ étant l'opérateur autoadjoint $\hat{x}.x + \hat{\xi}.D_x$.

Notons également la formule utilisée dans [25],

(2.8) $$a^W = 2^n \int_{(\mathbb{R}^{2n},\sigma)} a(Y)\, \sigma_Y\, dY ,$$

où l'opérateur de symétrie de phase σ_Y , unitaire et autoadjoint sur L^2 , est défini par

$$(\sigma_{y,\eta}u)(x) = u(2y-x)\, e^{2\mathring{i}\langle x-y,\eta\rangle} .$$

L'intérêt de cette quantification réside dans son invariance symplectique qui s'exprime par la formule de Segal [23] ([19], ch. 18). Pour toute transformation symplectique linéaire χ, il existe U unitaire sur L^2 avec

$$(a\circ\chi)^W = U^* a^W U\,, \tag{2.9}$$

(U est élément du groupe métaplectique, revêtement à deux feuillets du groupe symplectique). La formule de Weyl est plus (anti) symétrique que la formule usuelle et présente notamment l'avantage de quantifier en opérateurs (formellement) auto-adjoints les symboles réels (notons que cette dernière propriété n'est pas caractéristique de la quantification de Weyl ; c'est la formule d'invariance symplectique (2.9) qui caractérise la formule de Weyl). Rappelons également l'expression de la formule de Leibniz (composition des symboles) dans ce cadre, $a \# b$ désignant le symbole de $a^W b^W$. On a

$$(a \# b)\ (X) = 2^{2n}\iint a(Y)b(Z)\ e^{-2i\pi\sigma(Y-X,Z-X)}\ dY\,dZ\ . \tag{2.10}$$

Posons

$$\sigma_N(a,b) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=N} \frac{1}{\alpha!}\,\frac{1}{\beta!}\left(\frac{1}{2}\right)^{|\alpha|+|\beta|} (-1)^{|\beta|}\ D_\xi^\alpha\,\partial_x^\beta\, a\ D_\xi^\beta\,\partial_x^\alpha\, b\ . \tag{2.11}$$

La forme asymptotique de (2.10) est

$$a \# b = \sum_{N=0}^{+\infty} \sigma_N(a,b)\ . \tag{2.12}$$

Notons que les deux premiers termes sont $ab + \frac{1}{2i\pi}\{a,b\}$, $\{\ ,\ \}$ désignant le crochet de Poisson. Notons également que $\sigma_N(a,b) = (-1)^N\,\sigma_N(b,a)$.

THÉORÈME 2.1.- 1) *Si* $a \in S(1,g)$ (2.2), $a^W \in \mathcal{L}(L^2)$.

2) *Si* $a_j \in S(m_j,g)$, $j = 1,2$, $a_1 \# a_2 \in S(m_1 m_2,g)$ et

$$a_1 \# a_2 - \sum_{0\le k<N} \sigma_k(a_1,a_2) \in S(m_1 m_2 h^N,g)\ , \tag{2.13}$$

où

$$h(X) = \sup\left(\frac{g_X(T)}{g_X^\sigma(T)}\right)^{1/2} = \lambda(X)^{-1}\ . \tag{2.14}$$

2.2. L'inégalité de Fefferman - Phong

La problématique générale des inégalités de Gårding est la suivante. On cherche à déterminer l'ordre de grandeur de la plus petite valeur propre d'un opérateur (pseudo) différentiel moyennant une condition sur son symbole. Cette question est non seulement intéressante en elle-même (e.g. Etude du spectre d'opérateurs de Schrödinger $-\Delta + V(x)$), mais elle joue un rôle central en équations aux dérivées partielles. En effet, les estimations *a priori* du type

$$\|u\|_{H^{s_1}} \le \|Pu\|_{H^{s_2}} + \|u\|_{H^{s_1-\delta}} \tag{2.15}$$

(*cf.* e.g. [8], [19], ch. 27) peuvent être évidemment reformulées en termes de positivité de P^*P. C. Fefferman et D.H. Phong [9] ont obtenu une inégalité avec gain de deux dérivées en développant des méthodes d'analyse microlocale non homogène inaugurées par R. Beals et C. Fefferman [2] pour prouver une partie des conjectures de Nirenberg et Treves [22] sur la résolubilité locale d'EDP. On a le théorème suivant, S^μ désignant les symboles $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ tels que

$$|(D_\xi^\alpha D_x^\beta a)(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{\mu-|\alpha|}$$

(les semi-normes de a sont les meilleures constantes $C_{\alpha\beta}$).

THÉORÈME I.- *Soit* $a \in S^\mu$, $a \geq 0$. *Il existe* C *ne dépendant que d'un nombre fini fixé de semi-normes de* a *tel que*

$$(a^W u,u) + C\|u\|^2_{\frac{\mu-2}{2}} \geq 0 . \tag{2.16}$$

Ce théorème affirme par conséquent qu'une condition suffisante pour qu'un opérateur d'ordre 2 soit semi-borné (inférieurement) sur L^2 est que son symbole soit positif (ou borné inférieurement). Notons également que ce théorème se généralise sans difficulté nouvelle aux classes introduites dans le paragraphe 2.1 ([19], ch. 18). Donnons une idée de la preuve de ce résultat.

a) *Décomposition de Calderon-Zygmund*

On peut aisément se ramener au cas $\mu = 2$ et, utilisant la terminologie du paragraphe 2.1, on a

$$a \in S(\Lambda^2 = H^{-2} = 1+|\xi|^2 \quad , \quad dx^2 + \frac{d\xi^2}{1+|\xi|^2} = G) .$$

La première idée est d'utiliser un découpage de l'espace de phase qui dépende de la fonction a elle-même. Il existe une métrique g conforme à G ($g_X = \lambda(X)^{-1}\Lambda(X)\, G_X \geq G_X$) telle que

$$\lambda(X)^2 = 1+|a(X)| + |a'(X)|_{g_X} + |a''(X)|_{g_X} + |a'''(X)|_{g_X} , \tag{2.17}$$

et $a \in S(\lambda^2,g)$. En outre g est une bonne métrique (i.e. vérifie les propriétés (2.3) (2.4) (2.5)). On remarque ensuite que la positivité de a permet de supprimer les termes $|a'(X)|_{g_X}$ et $|a'''(X)|_{g_X}$ dans l'expression de λ^2 : ces termes sont majorés par les autres.

b) *Classification*

On a donc $a \in S(\lambda^2,g)$ avec $\lambda^2(X) \sim 1+a(X)+|a''(X)|_{g_X}$.

. Si $a \sim \lambda^2$, a est équivalent à son poids (et à cause de la lenteur de g (2.3), le reste sur une g boule). Il s'agit de "boîtes" <u>elliptiques</u> : $a^{1/2} \in S(\lambda,g)$ et la positivité de a^W en découle aisément.

. Si $\lambda^2 \sim 1$, alors a est un symbole de poids 1 donc borné sur L^2 ; ces boîtes sont <u>négligeables</u>.

. Si $\lambda^2 \sim |a''|_g$, il y a une direction dans laquelle a'' est elliptique, e.g. $\frac{\partial^2 a}{\partial \xi_1^2}$ elliptique (i.e. équivalent à son poids symbolique). En utilisant le théorème des fonctions implicites, on obtient facilement

$$a = \tilde{\xi}_1^2 + b(x_1, x', \xi') \quad , \tag{2.18}$$

où $\tilde{\xi}_1 \in S(\lambda, g)$ et où b est un symbole positif ne dépendant pas de ξ_1 . Ces boîtes sont non dégénérées.

c) *Récurrence sur la dimension*

Le symbole $b = b(x_1, x', \xi')$ peut être associé à un opérateur sur $\mathbb{R}^{n-1}$ et une récurrence sur la dimension permet de conclure.
Notons que de nombreux points techniques sont occultés par ce bref résumé qui prétend seulement donner les grandes lignes de la preuve.

2.3. Commentaires

Cette inégalité est très forte dans le sens où on peut trouver des opérateurs d'ordre strictement supérieur à deux de symbole positif et non semi-bornés sur L^2 . Néanmoins, certains opérateurs semi-bornés d'ordre 2 ont des symboles tendans vers $-\infty$ comme $|\xi|$ dans certaines directions. Ce dernier phénomène est typique de l'oscillateur harmonique (1.2, 1.4) et a mené C. Fefferman et D.H. Phong à une formulation du principe d'incertitude ([10], [11], [12], [13], [14]) plus souple que celle qui s'appuie sur des quantités comme la trace_+ du Hessien ([21], [18], [19] ch. 22).

Si $a(x,\xi)$ est le symbole d'un opérateur (pseudo) différentiel autoadjoint A , la première version du principe d'incertitude disait que chaque boîte de volume symplectique 1 (e.g. $\{|x - x_0| < \delta \ , \ |\xi - \xi_0| < \delta^{-1}\}$) devait compter pour une valeur propre. Par conséquent, le nombre $N(\lambda)$ de valeurs propres inférieures à λ devait être donné par le volume de

$$S(a,\lambda) = \{(x,\xi) \quad , \quad a(x,\xi) < \lambda\}$$

On peut voir aisément que cette formule classique, correcte dans les cas elliptiques [15] ([19] ch. 17 , 29) est grossièrement fausse pour des opérateurs de type 1.2 (e.g. avec $n = 2$ $\lambda_1\mu_1 = 1$ $\lambda_2\mu_2 \ll 1$). Au lieu de mesurer l'importance d'une partie E de l'espace de phase par son volume symplectique, on examinera le nombre de cubes unité "tordus" (i.e. image par transformation canonique du cube unité) disjoints qu'on peut placer dans E . Nous verrons que, pour $n \geq 3$ et des opérateurs de Schrödinger, on a $N(\lambda) \leq \mathrm{Vol}_\sigma(S(a,\lambda))$ [24], mais que dans l'exemple 1.2 ci-dessus, $N(\lambda) \ll \mathrm{Vol}_\sigma(S(a,\lambda))$ pour λ proche de 1 : l'ensemble $S(a,\lambda)$ bien que de volume très grand est sans importance.

3. LE PRINCIPE D'INCERTITUDE REVISITÉ

3.1. Théorème

Soit a un symbole $\in S(\Lambda^2, dx^2 + \frac{d\xi^2}{\Lambda^2} = G)$. Soit Φ une transformation canonique $(\Phi^*(\sigma) = \sigma)$ telle que

$$\Phi : Q_0 \longrightarrow Q \, , \tag{3.1}$$

Q_0 étant une Γ_0 boule de volume 1 centrée en 0 ($\Gamma_0 = dx^2 + d\xi^2$) , Q étant une G boule centrée en $\Phi(0)$. On suppose

$$G(\Phi^{(k)}(X)T^k) \le C_k(\Lambda^{-\delta}\Gamma_0)(T)^k \tag{3.2}$$

pour $1 \le k \le L$.

(Notons que lorsque (3.2) est vraie pour tout k , $a \circ \Phi \in S(\Lambda^2, \Lambda^{-\delta}\Gamma_0)$).
Si Φ vérifie (3.1) et (3.2) pour $1 \le k \le L$ avec un $\delta > 0$, on dira que Φ est une transformation test de type (L,δ) .

THÉORÈME II.- *Pour* $\varepsilon > 0$ *donné, il existe* $(L_\varepsilon, \delta_\varepsilon)$ *tels que si* $a \in S(\Lambda^2, G)$ *est positif et vérifie*

$$\min_{\substack{\Phi \text{ transformation} \\ \text{test de type } (L_\varepsilon,\delta_\varepsilon)}} \left(\max_{\Phi(Q_0)} a \right) \ge K \ge \Lambda^\varepsilon \tag{3.3}$$

alors

$$(a^W u, u) \ge c_\varepsilon K \, ||u||^2_{L^2} \, . \tag{3.4}$$

Ce théorème donne donc une condition suffisante pour que a^W soit semi-borné inférieurement par Λ^ε ; il suffit de s'assurer que le *maximum* du symbole sur certaines boîtes test de volume 1 (les $\Phi(Q_0)$) est $\ge \Lambda^\varepsilon$.

Rappelons le théorème d'Egorov [7], [16], [6], [12] ([19], ch. 25), un outil essentiel, avec le théorème I, dans la preuve du théorème II.

THÉORÈME 3.1.- *Soit* G *une forme quadratique définie positive et* χ *une transformation canonique* $\chi : \tilde{Q}_G \longrightarrow Q_G$, *où* Q_G *et* $\tilde{Q}_G$ *sont des* G*-boules. Supposons*

$$G(\chi^{(k)}(X)(T_1, \dots, T_k)) \le C_k \, G(T_1) \dots G(T_k) \, .$$

Alors si $a \in S(\Lambda^2, G)$ *est réel supporté dans* Q_G , *on a* $a \circ \chi \in S(\Lambda^2, G)$ *et* $(a \circ \chi)^W = U^* a^W U + R$, *où* U *est un opérateur (intégral de Fourier) borné sur* L^2 *et où la norme* $\mathcal{L}(L^2)$ *de* R *ne dépend que d'un nombre fini fixé de semi-normes de* a *et de* χ .

3.2. Une idée de la preuve

Comme dans la preuve du théorème I, on utilise une décomposition de Calderón-Zygmund du symbole non-négatif a . Évidemment, les boîtes "elliptiques" ne posent pas de problème et vu l'hypothèse (3.3), il n'y a *pas* de boîtes négligeables.

Il reste donc les boîtes non dégénérées et, en utilisant les remarques de la preuve du théorème I, ainsi que le théorème d'Egorov, il est facile de se ramener à l'étude d'une équation de Schrödinger avec un potentiel pseudo-différentiel

$$\xi_1^2 + V(x_1, x', \xi') \ .$$

La preuve du théorème II s'effectue par récurrence sur la dimension et le point clé est le théorème suivant, également prouvé inductivement.

Si A est un opérateur autoadjoint et K un scalaire, on notera $A \wedge K$ le minimum (au sens spectral) de A et de K ; on a

$$((A \wedge K)u,u) = 2 \inf_{u_1+u_2=u} ((Au_1,u_1) + K\|u_2\|^2) \ .$$

THÉORÈME 3.2.- *Si* a *et* b *sont des symboles positifs de* $S(\Lambda^2,G)$ *, on a*

$$(a^W + b^W) \wedge K \leq C_\varepsilon (a^W \wedge K + b^W \wedge K) + C_\varepsilon \Lambda^\varepsilon \ .$$

La preuve du théorème 3.2 est longue et technique et s'inspire de l'étude de l'opérateur de Schrödinger associé à $\xi^2 + V(x)$, où $V(x) \geq 0$ avec $|D_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \Lambda^2$. L'hypothèse est

$$\min_Q \left(\max_{(x,\xi)\in Q} (\xi^2 + V(x)) \right) \geq K \geq \Lambda^{\varepsilon_0} \ .$$

Il vient $\displaystyle\max_{|x-x_0|\leq 2K^{-1/2}} V(x) \geq 2^{-1}K$, en utilisant la famille de cubes

$$\{|\xi| \leq \delta K^{1/2} \ , \ |x-x_0| \leq \delta^{-1}K^{-1/2}\} .$$

Par ailleurs, le comportement de V est presque polynômial :

$$\left|V(x+h) - \sum_{0\leq k<N} V^{(k)}(x) \frac{h^k}{k!}\right| \leq \frac{1}{N!} 2^N C_N \Lambda^2 K^{-\frac{N}{2}} \leq C'_N \ K^{\frac{2}{\varepsilon_0} - \frac{N}{2}} \leq C'_N$$

si $N \geq \dfrac{4}{\varepsilon_0}$.

Remarquons que si P est un polynôme de degré $\leq d$ sur $[0,1]$,

$$\int_0^1 |P(\vartheta)|d\vartheta \leq \max_{[0,1]} |P(\vartheta)| \leq C_d \int_0^1 |P(\vartheta)|d\vartheta \ , \ \max_{\vartheta\in[0,1]} |P'(\vartheta)| \leq C_d \max_{\vartheta\in[0,1]} |P(\vartheta)| \ .$$

Il existe donc un intervalle $I \subset [0,1]$ de longeur $\frac{1}{2} C_d^{-1}$ tel que

$$\min_{\vartheta\in I} |P(\vartheta)| \geq \frac{1}{2} \max_{\vartheta\in[0,1]} |P(\vartheta)| \ .$$

En appliquant ces remarques à $V(x+\vartheta K^{-1/2})$, il vient

$$\int_0^1 \min(V(x+\vartheta K^{-1/2}),K)\,d\vartheta \geq \delta_0 K \ ,$$

et par suite

$$\begin{aligned}\delta_0 K\|u\|^2_{L^2} &\le \int \min(V(x+\vartheta K^{-1/2}),K)\,|u(x)|^2 \,dx\,d\vartheta \\ &\le \int \min(V(x+\vartheta K^{-1/2}),K)[\,|u(x+\vartheta K^{-1/2})-u(x)|^2+|u(x+\vartheta K^{-1/2})|^2]\,dx\,d\vartheta \\ &\le (Vu,u)+\|Du\|^2 ,\end{aligned}$$

soit le résultat.

3.3. Conclusion

Le développement des méthodes de C. Fefferman et D.H. Phong a également donné de nombreux résultats pour l'équation de Schrödinger [14]. Nous avons donné à la fin de la section 3.2 (essentiellement) la preuve du "Main lemma" de [14].

Notons que les problèmes ouverts sont nombreux et que, par exemple, pour les conditions suffisantes du type $a+\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}_+ a \ge 0$, les résultats optimaux ne sont pas connus (*cf.* [18] pour une inégalité avec gain de 6/5). L'univers des systèmes semi-bornés ([20], [17]) reste assez peu exploré.

Les idées nouvelles foisonnent dans ces travaux : microlocalisation au "niveau II" (*cf.* [14]), i.e. décomposition de Calderon-Zygmund qui donne une décomposition de Fefferman-Phong des symboles non négatifs en trois volets, réduction du nombre de variables, nouvelle vision du principe d'incertitude. Nous renvoyons le lecteur curieux des raffinements de ces méthodes à la difficile et intéressante discussion du paragraphe 4 de [14].

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BEALS - *A general calculus of pseudo-differential operators*, Duke Math. J., 42, 1-42, 1975.

[2] R. BEALS, C. FEFFERMAN - *On local solvability of linear partial differential equations*, Ann. of Math. 97, 482-498, 1973.

[3] R. BEALS, C. FEFFERMAN - *Spatially inhomogeneous pseudo-differential operators*, Comm. Pure Appl. Math., 27, 1-24, 1974.

[4] C.H. CHING - *Pseudo-differential operators with non regular symbols*, J. Diff. Eq., 11, 436-447, 1972.

[5] M. COTLAR - *A combinatorial inequality and its application to* L^2 *spaces*, Rev. Math. Cuyana 1, 41-55, 1955.

[6] J.J. DUISTERMAAT, L. HÖRMANDER - *Fourier integral operators II*, Acta Math. 128, 183-269, 1972.

[7] J.V. EGOROV - *The canonical transformation of pseudo-differential operators*, Uspehi Mat. Nauk, 24.5, 235-236, 1969.

[8] J.V. EGOROV - *Subelliptic operators*, Russian Math. Surveys 30.2, 59-118 ; 30.3, 55-105, 1975.

[9] C. FEFFERMAN, D.H. PHONG - *On positivity of pseudo-differential operators*, Proc. Natl. Ac. Sci. USA 75, 4673-4674, 1978.

[10] C. FEFFERMAN, D.H. PHONG - *On the lowest eigenvalue of a pseudo-differential operator*, Proc. Natl. Ac. Sci. USA 76, 6055-6056, 1979.

[11] C. FEFFERMAN, D.H. PHONG - *On the asymptotic eigenvalue distribution of a pseudo-differential operator*, Proc. Natl. Ac. Sci. USA 77, 5622-5625, 1980.

[12] C. FEFFERMAN, D.H. PHONG - *The uncertainty principle and sharp Gårding inequalities*, Comm. Pure Appl. Math. 34, 285-331, 1981.

[13] C. FEFFERMAN, D.H. PHONG - *Symplectic geometry and positivity of pseudo-differential operators*, Proc. Natl. Ac. Sci. USA 79, 710-713, 1982.

[14] C. FEFFERMAN - *The uncertainty principle*, Bull. Amer. Math. Soc. 9, 129-206, 1983.

[15] L. HÖRMANDER - *The spectral function of an elliptic operator*, Acta Math. 121, 193-218, 1968.

[16] L. HÖRMANDER - *Fourier integral operators I*, Acta Math. 127, 79-183 (1971).

[17] L. HÖRMANDER - *The Cauchy problem for differential equations with multiple characteristics*, J. Analyse Math. 32, 118-196, 1977.

[18] L. HÖRMANDER - *The Weyl calculus of pseudo-differential operators*, Comm. Pure Appl. Math. 32, 359-443, 1979.

[19] L. HÖRMANDER - *The analysis of linear partial differential operators*, 4 volumes, Springer, 1985.

[20] P.D. LAX, L. NIRENBERG - *On stability for difference schemes : a sharp form of Gårding's inequality*, Comm. Pure Appl. Math. 19, 473-492, 1966.

[21] A. MELIN - *Lower bounds for pseudo-differential operators*, Ark. Mat. 9, 117-140, 1971.

[22] L. NIRENBERG, F. TREVES - *On local solvability of linear partial differential equations : I. Necessary conditions, II. Sufficient conditions*, Comm. Pure Appl. Math. 23, 1-38, 459-509, 1970.

[23] I. SEGAL - *Transforms for operators and symplectic automorphisms over a locally compact abelian group*, Math. Scand. 13, 31-43, 1963.

[24] B. SIMON - *Functional integration and quantum physics*, A. Press, 1979.

[25] A. UNTERBERGER - *Quantification de certains espaces hermitiens symétriques*, Séminaire Goulaouic - Schwartz 1979-80, Exposé n° 16, Ecole Polytechnique Palaiseau, 1980.

[26] H. WEYL - *Gruppentheorie und Quantenmechanik*, Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1928.

Nicolas LERNER

Purdue University
Department of Mathematics
WEST-LAFAYETTE, In. 47907 - USA