DANIEL LASCAR

Théorie de la classification

Astérisque, tome 152-153 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 682, p. 253-261
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1986-1987__29__253_0>

Séminaire BOURBAKI   Juin 1987
39ème année, 1986-87, n° 682

THÉORIE DE LA CLASSIFICATION

par Daniel LASCAR

La théorie de la classification est essentiellement l'oeuvre d'un homme, Saharon Shelah, qui y a travaillé pendant plus de quinze ans. Ses résultats sont résumés dans un livre de quelque 500 pages [Sh 1], dont une version complétée [Sh 2] est attendue.

Les problèmes auxquels elle s'attaque sont en eux-mêmes assez originaux, et je vais devoir en parler avant d'expliquer de façon outrageusement simplifiée quelles en sont les solutions.

1. THÉORÈMES DE STRUCTURE - NON STRUCTURE

Il est fréquent, en mathématiques, que l'on résolve des questions du type suivant : on se donne une classe de structures, disons K , et on tente de classifier les éléments de K à isomorphisme près ; autrement dit, on essaie d'attacher à chaque élément $\mathfrak{a}$ de K un invariant $i(\mathfrak{a})$. Cet invariant est complet s'il détermine vraiment le type d'isomorphisme de la structure $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire si $i(\mathfrak{a}) = i(\mathfrak{a}')$ (avec $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}' \in K$), alors $\mathfrak{a}$ est isomorphe à $\mathfrak{a}'$. Voici quelques exemples simples :

- prenons pour K la classe des corps algébriquement clos. Les théorèmes de Steinitz permettent d'associer à chaque corps de ce type un entier (sa caractéristique), et un nombre cardinal (le degré de transcendance du corps au-dessus du corps premier). Le couple constitué de ces deux nombres est un invariant complet.

- On peut aussi se fixer un corps k et considérer la classe des espaces vectoriels sur k . La dimension est un invariant complet irréprochable. Dans cette catégorie rentrent les groupes abéliens divisibles sans torsion ou les groupes abéliens d'exposant p premier.

- Pour classifier les groupes abéliens d'exposant 6 , il faut remarquer qu'un tel groupe est isomorphe à un produit $G_1 \times G_2$ où G_1 est d'exposant 2 et G_2 d'exposant 3 . Il faut donc deux nombres cardinaux, les dimensions de G_1 et G_2 considérés respectivement comme des espaces vectoriels sur les corps à 2 et 3 éléments.

- Pour les groupes abéliens divisibles, il faut un nombre dénombrable de cardinaux.

On pourrait multiplier les exemples. Il n'y a jusqu'à présent aucun doute : l'invariant (et surtout la façon dont on l'a trouvé) représente un progrès énorme dans la connaissance de la structure. Mais cela n'empêche que si l'on veut faire une théorie générale de la classification, et c'est précisément notre but, il va bien falloir décider quels sont les invariants autorisés. Après tout, le type d'isomorphisme de la structure est un invariant complet, mais qui n'a aucun intérêt. Sans être trop précis, on demandera seulement que ces invariants soient constitués de cardinaux, sous une forme ou une autre. La suite nous permettra d'être plus clair.

A ma connaissance, personne n'a jamais sérieusement tenté de classifier par exemple tous les graphes symétriques ou tous les corps de caractéristique 0 . L'intuition, c'est que ce n'est pas la peine d'essayer parce que l'entreprise est désespérée, vu la richesse et le caractère chaotique de la classe en question.

Il va donc falloir établir une dichotomie qui d'un côté range les classes admettant un théorème de classification, et les autres de l'autre. C'est ce que Shelah appelle un théorème de structure - non structure. Dans un cas, il va évidemment falloir trouver les invariants, et dans l'autre fournir un argument montrant qu'ils ne sauraient exister.

Pour discuter convenablement de ce problème, on va se placer dans le langage de l'algèbre universelle. On se fixe une signature σ , qui, par définition, est un ensemble de symboles : il y a les symboles de constantes, et pour chaque $n > 0$, des symboles de prédicats n-aires et des symboles de fonctions n-aires. Une σ-structure $\mathfrak{a}$ se compose d'un ensemble non vide A dans lequel tous ces symboles sont interprétés : les symboles de constantes par des points de A , les symboles de prédicats n-aires par des sous-ensembles de A^n et les symboles de fonctions n-aires par des applications de A^n dans A .

Par exemple, la signature σ qui convient pour parler de groupes comprend un symbole de constante et un symbole de fonction binaire. Si G est un groupe, c'est naturellement une σ-structure, en interprétant le symbole de constante par l'unité du groupe et le symbole de fonction par la multiplication dans le groupe. Si on veut parler de groupes ordonnés, il faut rajouter un symbole de prédicat binaire pour l'ordre, etc.

On se donne une signature σ , que l'on supposera dénombrable pour éviter les complications, et K une classe de σ-structures. Evidemment, il faudra faire des hypothèses sur K . Mais nous laissons cela pour plus tard.

2. PREMIÈRE APPROXIMATION : LES ARGUMENTS DE CARDINALITÉ

Si λ est un cardinal, on appellera $I(\lambda,K)$ le nombre d'éléments de K, à isomorphisme près, qui sont de cardinalité λ. On voit facilement que, si λ est infini, ce que nous supposerons toujours, $I(\lambda,K) \leq 2^{\lambda}$. L'idée maîtresse est que si, pour un cardinal λ non dénombrable (voir le quatrième exemple pour une justification de cette restriction), $I(\lambda,K) < 2^{\lambda}$, alors la classe K n'est pas si riche et on doit pouvoir en trouver une classification. Sinon, on déclare K non classifiable, du moins dans un premier temps. Voici quelques exemples ad hoc pour illustrer cette idée.

1) On a vu des exemples (corps algébriquement clos de caractéristique fixée, espace vectoriel sur un corps dénombrable donné, etc.) où $I(\lambda,K) = 1$ pour tout λ non dénombrable. En fait, Morley a démontré [Mo] en 1963 que si K est une classe élémentaire (voir la définition dans le paragraphe suivant) et si $I(\lambda,K) = 1$ pour un cardinal λ non dénombrable, alors $I(\lambda,K) = 1$ pour tout λ non dénombrable. On peut considérer que ce théorème est le point de départ de toute la théorie.

2) Soit K la classe des ensembles munis d'une relation d'équivalence. Pour fixer le type d'isomorphisme de $a \in K$, il faut d'abord se donner le nombre de classes, soit λ, puis, pour chacune de ces classes sa cardinalité, c'est-à-dire une suite de λ cardinaux, cette suite étant définie à permutation des indices près. Pour nous, cela constituera un invariant tout à fait acceptable. A partir de là, il n'est pas trop difficile de voir que $I(\aleph_{\alpha},K) = |\aleph_0+\alpha|^{|\aleph_0+\alpha|}$.

3) On considère maintenant la classe de deux relations d'équivalence E_1 et E_2, E_1 raffinant E_2. Si $a \in K$, on peut encore trouver un invariant, bien que plus compliqué. On se donne d'abord le nombre λ de classes modulo E_2 ; chacune d'elles est une structure du type précédent. C'est donc la suite des invariants correspondants à chacune de ces classes, toujours définie à permutation près, qui constituera un invariant de a. On peut encore calculer

$$I(\aleph_{\alpha},K) = \inf(2^{\aleph_{\alpha}}, |\aleph_0+\alpha|^{(|\aleph_0+\alpha|^{|\aleph_0+\alpha|})}) .$$

On pourrait continuer. On voit que les invariants prendraient la forme d'arbre de cardinaux. C'est un phénomène général que l'on retrouvera plus tard.

4) Soit K la classe des ordres denses sans premier ni dernier élément. Un théorème bien connu dû à Hausdorff affirme que $I(\aleph_0,K) = 1$. En revanche, il n'est pas trop difficile de voir que $I(2^{\aleph_0},K) = 2^{2^{\aleph_0}}$ par exemple. On va donner ici une technique de construction qui a l'avantage d'être très simple et de se prêter à toute sorte de généralisations.

Soit $(a_i\ ;\ i \in I)$ une famille d'ensembles ordonnés, I étant lui-même un ensemble ordonné ; $\sum_{i\in I} a_i$ désignera l'ensemble ordonné obtenu en mettant les a_i

bout à bout (formellement, c'est $\bigcup_{i\in I} \{i\} \times A_i$ ordonné par $(i,a) \leq (j,b)$ si et seulement si $i < j$ (dans I) ou $i = j$ et $a \leq b$ (dans a_i)).

Soit maintenant X un sous-ensemble de ω_1 (le premier ordinal non dénombrable), contenant 0. À un tel X, on associe l'ensemble ordonné $a(X) = \sum_{i\in\omega_1} X_i$, ou $X_i = \mathbb{Q}$ si $i \in X$ et $X_i = \mathbb{Q} \cap [0,1[$ si $i \notin X$. Il devrait être clair que $a(X) \in K$ et si, pour $i \in \omega_1$, $i \neq 0$, on pose $a_i(X) = \sum_{j<i} X_i$, alors $a_i(X) \in K$ et est un segment initial dénombrable de $a(X)$.

Soit maintenant Y un autre sous-ensemble de ω_1, $0 \in Y$; certes, il est possible que $a(X)$ soit isomorphe à $a(Y)$ bien que X soit différent de Y. Mais on va voir que X et Y doivent beaucoup se ressembler : soit f un isomorphisme de $a(X)$ sur $a(Y)$. Alors l'ensemble

$$C = \{i \; ; \; f \text{ induit un isomorphisme de } a_i(X) \text{ sur } a_i(Y)\}$$

est un sous-ensemble de ω_1 qui est cofinal (i.e. $\forall\beta \in \omega_1$, $\exists\alpha \in C$, $\alpha > \beta$) et clos (i.e. si (α_n) est une suite croissante de C, alors $\sup(\alpha_n) \in C$). Or il faut considérer les ensembles clos cofinaux comme de très gros ensembles : ils ne sont jamais vides, et l'intersection d'un nombre dénombrable d'entre eux est encore clos cofinal.

Prenons un point i de C. Alors $i \in X$ si et seulement si $i \in Y$: en effet si $i \in X$, c'est que $a(X) - a_i(X)$, qui commence par X_i, n'a pas de premier élément, et il en est de même de $a(Y) - a_i(Y)$ puisque f induit un isomorphisme entre ces deux structures. Donc $i \in Y$. Il en découle que $X = Y$ modulo le filtre engendré par les clos cofinaux. Un théorème de Fodor [Fo] affirme qu'il y a $2^{\aleph_1}$ sous-ensembles de ω_1 deux à deux différents modulo ce filtre. On vient donc de montrer que $I(\aleph_1,K) = 2^{\aleph_1}$.

C'est cette même technique, mais en beaucoup plus compliqué, qui permet de montrer, dans la plupart des cas, que $I(\lambda,K) = 2^{\lambda}$.

3. CLASSES ÉLÉMENTAIRES

Il me faut maintenant préciser à quelles classes on va s'intéresser. On obtient un théorème de structure - non structure pour les classes élémentaires dont on va donner la définition tout de suite. Mais cela ne veut pas dire que la théorie n'apporte rien dans les autres cas (voir la conclusion).

À la base est la notion de formule du premier ordre. C'est tout ce que l'on peut obtenir en utilisant :

- les équations, c'est-à-dire les expressions du type $t_1(x_1,x_2,\ldots,x_n) = t_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, où t_1 et t_2 sont des termes obtenus en composant des symboles de fonction (en respectant les arités bien sûr). Elles peuvent faire intervenir les symboles de constante, et des variables $x_1,x_2,\ldots x_n$.

(Exemple dans le langage des groupes $x_1x_2 = x_2x_1$, ou $x . 1 = 1 . x$.)

- Les expressions du type $R(t_1,t_2,\dots t_n)$ où R est un symbole de prédicat n-aire et $t_1,t_2,\dots t_n$ sont des termes.
- Les connecteurs proportionnels : non, ou, et, implique, si et seulement si.
- Les quantificateurs $\forall x$ et $\exists x$.

On supposera que la notion de satisfaction est claire : si $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ est une formule dont $x_1,x_2,\dots,x_n$ sont les variables libres (c'est-à-dire non quantifiées), si $\mathfrak{a}$ est une σ-structure et si $a_1,a_2,\dots a_n$ sont des points de l'ensemble de base de $\mathfrak{a}$, on sait ce que signifie l'expression : $\varphi(a_1,a_2,\dots,a_n)$ est satisfait dans $\mathfrak{a}$. Si φ est une formule sans variables libres qui est satisfaite dans $\mathfrak{a}$, on dit que $\mathfrak{a}$ est un modèle de φ .

Une classe K est élémentaire si il existe un ensemble T de formules du premier ordre sans variable libre, tel que K soit précisément la classe des structures satisfaisant toutes les formules de T (autrement dit, K est la classe des modèles de T). Voici quelques exemples de classes élémentaires : les groupes, les groupes abéliens, les groupes abéliens divisibles, les groupes abéliens divisibles sans torsion, les anneaux, les corps, les corps ordonnés, les corps réels clos. Si R est un anneau, on peut construire une signature σ_R de même cardinalité que R et une théorie de ce langage dont les modèles soient précisément les R-modules. En revanche, la classe des corps ordonnés archimédiens n'est pas élémentaire ; il faut dire : pour tout x , il existe un entier n tel que $n > x$, et ce "il existe un entier n " ne fait pas partie des expressions autorisées. De même, la classe des anneaux principaux (ou noethériens) n'est pas élémentaire.

4. THÉORIES STABLES

On a exposé, au paragraphe 2, une technique permettant de construire beaucoup de modèles non isomorphes. On va en donner une application.

DÉFINITION.- *Soit* T *une théorie ; on dit que* T *est instable si on peut trouver un entier* n *, une formule* $\varphi(\bar{x},\bar{y})$ *à* $2n$ *variables libres (* $\bar{x}$ *et* $\bar{y}$ *sont des suites de* n *variables libres), un modèle* $\mathfrak{a}$ *de* T *et* X *un sous-ensemble infini de* A^n *(* A *est l'ensemble de base de* $\mathfrak{a}$ *) tels que la relation* $R(\bar{a},\bar{b})$ *définie par "* $R(\bar{a},\bar{b})$ *est vérifiée si et seulement si* $\varphi(\bar{a},\bar{b})$ *est satisfait dans* $\mathfrak{a}$ *" induise une relation d'ordre total sur* X .

Par exemple, si parmi les modèles de T il y a un anneau unitaire et intègre qui n'est pas un corps, alors T est instable. Il suffit de prendre un élément a non inversible, pour X l'ensemble des puissances de a et pour $\varphi(x,y)$ la formule exprimant que x divise y .

Une théorie est stable si elle n'est pas instable et une classe élémentaire est stable si la théorie qui la définit l'est.

Comme exemple de classes stables, en plus des corps algébriquement clos et des relations d'équivalence donnés plus haut, on peut citer toutes les classes élémentaires de modules, et la classe des corps séparablement clos.

On montre que si K n'est pas stable, alors pour tout λ non dénombrable $I(\lambda,K) = 2^\lambda$. C'est un progrès énorme, car si K est stable, on peut définir à l'intérieur des modèles de K une notion d'indépendance, analogue à l'indépendance linéaire des espaces vectoriels ou l'indépendance algébrique des corps.

Cela constitue un très bel exemple de la stratégie que l'on va suivre : pour pouvoir mener à bien la classification des éléments de K, il faut certains outils. Pour pouvoir les construire, il faut faire des hypothèses sur K. On justifie ces hypothèses en montrant que, si elles ne sont pas vérifiées, alors $I(\lambda,K) = 2^\lambda$ pour tout λ non dénombrable. On vient de gagner une notion d'indépendance. On introduit ainsi les classes superstables. Sans entrer dans les détails, disons que, dans les modèles de ces classes, il y a "suffisamment" de sous-ensembles dans lesquels la relation d'indépendance possède les propriétés nécessaires pour montrer que deux sous-ensembles indépendants maximaux ont même cardinalité. C'est donc la notion de dimension que l'on a maintenant à sa disposition.

Par exemple, les groupes abéliens divisibles ou les groupes satisfaisant les même formules que $\mathbb{Z}$ sont superstables. En revanche, la classe de $(\mathbb{Z}_2)^\omega$ ne l'est pas.

Comparons l'exemple des groupes abéliens divisibles, où $\aleph_0$ cardinaux suffisent pour déterminer le type d'isomorphisme de la structure et les ensembles munis d'une relation d'équivalence où une suite, dont on ne peut borner la longueur, est nécessaire. La première situation est beaucoup plus simple. Les classes superstables de modules tombent toutes dans cette catégorie (bien que $2^{\aleph_0}$ cardinaux soient parfois nécessaires).

Dans le cas général, il y a des dimensions qui apparaissent de tous les côtés. Si on veut pouvoir imiter les exemples que l'on a vus, il faut être capable d'organiser ces dimensions suivant un arbre. Ce qui fait apparaître une nouvelle propriété, la D.O.P. (Dimensional Order Property). Si K a la D.O.P., alors $I(\lambda,K) = 2^\lambda$ pour $\lambda > \aleph_0$. La terminologie provient du fait que l'on peut définir un ordre dans certains éléments de K, en utilisant les dimensions.

Si K n'a pas la D.O.P., alors effectivement les dimensions s'organisent suivant un arbre de hauteur au plus ω, c'est-à-dire un sous-arbre de l'arbre des suites finies d'éléments pris dans un ensemble I.

Les corps différentiellement clos de caractéristique 0 constituent un exemple de classe superstable qui a la D.O.P. Ce sont les corps k munis d'une opération de dérivation qui satisfont à la condition que si f est une équation différentielle d'ordre n et g est d'ordre $n-1$, alors k possède une solution de f qui n'est pas solution de g.

Soit k un corps différentiellement clos dénombrable. Considérons les équations de la forme $x' = \frac{c_i + c_j}{1+x}$ où $(c_i ; i \in I)$ est une famille de constante $(c_i' = 0)$ algébriquement indépendante. Pour chacune de ces équations, l'ensemble des solutions a une dimension. La D.O.P. provient du fait que l'on peut faire varier, dans une extension de k, toutes ces dimensions de façon indépendante, et par là coder n'importe quel graphe symétrique sur I.

Ce n'est pas encore terminé. Il faut encore généraliser la notion de structure engendrée par un ensemble (par exemple, sous-espace vectoriel engendré par ..., ou clôture algébrique du corps engendré par ...). C'est possible pour les classes qui n'ont pas l'O.T.O.P. (Omitting Type Order Property). Quant aux autres, comme d'habitude $I(\lambda,K) = 2^\lambda$ pour $\lambda > \aleph_0$.

5. RETOUR AUX ARGUMENTS DE CARDINALITÉ

Cette fois-ci, c'est fini :

- D'un côté, on a les classes superstables n'ayant ni la D.O.P., ni l'O.T.O.P., pour lesquelles on a pu trouver des invariants complets, qui prennent plus ou moins la forme d'un arbre de cardinaux de hauteur ω. Il convient de distinguer ici deux types de classes : les classes qui n'admettent pour invariants que des arbres dont toutes les branches sont finies. C'est le cas par exemple des groupes abéliens divisibles (toutes les branches sont de longueur 1 !) ou des ensembles munis d'une ou deux relations d'équivalence que l'on a déjà considérés et dont les branches n'ont jamais une longueur supérieure à deux ou trois. On peut montrer dans ce cas qu'il existe des λ non dénombrables tels que $I(\lambda,K) < 2^\lambda$, du moins avec l'hypothèse généralisée du continu (on montre en général que $I(\aleph_\alpha,K) < \beth_{\omega_1}(\alpha+\aleph_0)$, où $\beth_\alpha(\beta)$ est défini par : $\beth_0(\beta) = |\beta|$, $\beth_{\alpha+1}(\beta) = 2^{\beth_\alpha(\beta)}$ et si δ est un ordinal limite $\beth_\delta(\beta) = \sup(\beth_\gamma(\beta) ; \gamma < \delta)$). Dans le cas où l'arbre peut avoir des branches infinies, alors on montre que $I(\lambda,K) = 2^\lambda$ pour $\lambda > \aleph_0$. Il est vrai que, dans ce cas, l'invariant est sensiblement plus compliqué, mais on peut très bien considérer qu'il est acceptable.
- De l'autre côté, se trouvent les classes que l'on n'a pas été capable de classifier, et pour lesquelles on a vu que $I(\lambda,K) = 2^\lambda$ pour $\lambda > \aleph_0$. Mais on vient de voir que l'on ne peut absolument pas se fier à ce critère. Il est donc permis de douter que la dichotomie que l'on vient de trouver soit vraiment significative.

Heureusement, un certain nombre d'arguments viennent nous rassurer. Je vais en présenter un.

Rappelons que, pour nous, un invariant doit être constitué de cardinaux, représentant des dimensions. On admettra sans peine que l'invariant associé à $\mathfrak{a}$ ne doit pas faire intervenir des cardinaux supérieurs à la cardinalité de $\mathfrak{a}$. Prenons donc $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ dans une classe K , et supposons que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ ne sont pas isomorphes. La première remarque est que la notion d'isomorphisme n'est pas absolue. Cela veut dire que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ peuvent très bien devenir isomorphes dans une extension de l'univers de la théorie des ensembles dans lequel ils se trouvent. Par exemple, si K est la classe des espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$, et si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont respectivement de dimension $\aleph_0$ et $\aleph_1$, il n'y a qu'à faire une extension générique de l'univers qui rende $\aleph_1$ dénombrable pour rendre $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ isomorphes.

En revanche, si on suppose premièrement que les éléments de K sont caractérisés par des invariants, deuxièmement que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont de cardinalité λ , troisièmement que l'on fasse une extension de l'univers dans laquelle tous les cardinaux jusqu'à λ sont conservés, alors $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ resteront non isomorphes : leurs invariants, qui étaient différents dans le petit univers, le resteront puisqu'il s'agit de cardinaux inférieurs ou égaux à λ et que ceux-ci ne bougent pas.

C'est évidemment ce qui se passe pour les classes superstables n'ayant ni la D.O.P., ni l'O.T.O.P. Et pour toutes les autres classes, on montre que ce n'est pas le cas.

6. CONCLUSION

Pour conclure, disons que ce travail, qui a abouti pour les classes élémentaires, ouvre un champ immense de recherche. On peut espérer des généralisations, au moins partielles, pour d'autres classes. Il y a déjà des résultats pour celles qui sont définies par des formules de $L_{\omega_1,\omega}$ (on se permet des conjonctions et des disjonctions dénombrables), les classes pseudo-élémentaires (les structures qui peuvent s'enrichir en une structure se trouvant dans une classe élémentaire donnée ; exemple, les corps ordonnables), et beaucoup d'autres encore. Parmi les classes instables, certaines sont plus chaotiques que d'autres et là aussi des résultats ont été obtenus. D'autre part, les théorèmes de non-structure ont mis au point des techniques de construction de modèles qui s'appliquent à une grande variété de problèmes. Ce n'est pas tout, mais de toute façon je devrai m'arrêter avant d'avoir épuisé le sujet.

BIBLIOGRAPHIE

[Fo] G. FODOR - *On stationary sets and regressive functions*, Acta Sci. Math. 27, 1966, p. 105-110.

[Mo] M. MORLEY - *Categoricity in power*, T.A.M.S., 114, 1965, p. 514-538.

[Sh 1] S. SHELAH - *Classification theory*, North Holland Publ. Co, 1978.

[Sh 2] S. SHELAH - *Classification theory with solution for countable theories*, North Holland, à paraître.

Daniel LASCAR

CNRS - Université de Paris 7
Equipe de Logique Mathématique
UA 753 du CNRS
Tour 45-55 - 5ème étage
2 place Jussieu

75251 PARIS CEDEX 05