Astérisque

ROBERT MOUSSU

Le problème de la finitude du nombre de cycles limites

Astérisque, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 655, p. 89-101

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__89_0>

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI Novembre 1985
38ème année, 1985-86, n° 655

LE PROBLÈME DE LA FINITUDE DU NOMBRE DE CYCLES LIMITES

[d'après R. BAMON et YU. S.IL'YASENKO]

par Robert MOUSSU.

0. Introduction.

Il y a un peu plus d'un siècle, H. POINCARÉ donnait dans son célèbre "mémoire.." [32]la définition d'un cycle limite pour un champ de vecteurs

$$V = X(x,y)\,\partial/\partial x + Y(x,y)\,\partial/\partial y$$

du plan $\mathbb{R}^2$. Un cycle C est une trajectoire périodique de V ; c'est un cycle limite si le germe de son *application retour* f n'est pas l'identité (fig. 1). Lorsque V est analytique, f l'est aussi et un cycle limite est alors un cycle isolé dans l'ensemble des cycles. Cette propriété caractéristique fut certainement une des motivations de la question de D. HILBERT :

Seizième problème - seconde partie [16] : "*Déterminer le nombre maximum de cycles.. de* V... *lorsque* X *et* Y *sont des polynômes de degré* n".

En 1955, I.G. PETROVSKI et E.M. LANDIS proposaient une méthode pour calculer ce nombre N(n) et obtenaient N(2) = 3, [29], [30]. YU. S. IL'YASENKO montrait en 1969 qu'un de leurs arguments était faux [18] et en 1980 SHI SONGLING prouvait que $N(2) \geq 4$ [37]. Ainsi avant d'aborder la "*très délicate question*" de HILBERT (Poincare 1908) il est réaliste d'étudier la

Conjecture de finitude : "*Un champ de vecteurs polynomial de* $\mathbb{R}^2$ *a seulement un nombre fini de cycles limites*".

En 1923, dans un article célèbre [11] mais un peu obscur pour un lecteur d'aujourd'hui, H. DULAC énonçait un résultat impliquant cette conjecture (chapitre 1). Sa démonstration est maintenant considérée comme incomplète [13]. Cependant, certains de ses arguments sont essentiels pour montrer les théorèmes suivants :

THÉORÈME 0.1 (BAMON [1], 1985).- *Un champ de vecteurs quadratique de* $\mathbb{R}^2$ *a seulement un nombre fini de cycles limites.*

THÉORÈME 0.2 (IL'YASENKO [20], 1984).- *La conjecture de finitude est vraie sur le complémentaire d'un sous-ensemble algébrique propre de l'espace vectoriel des*

champs de vecteurs polynomiaux de degré $\leq n$.

Ce théorème répond à une question de [28]. Nous verrons dans le chapitre 1 que c'est un corollaire d'un résultat fondamental de IL'YASENKO. Nous donnerons les grandes lignes de sa démonstration dans les chapitres 2 et 3. Après avoir exposé une réduction du problème de DULAC et un exemple de IL'YASENKO dans le chapitre 4, nous résumerons la preuve du théorème de BAMON dans le chapitre 5.

1. Problème de DULAC et THÉORÈME de IL'YASENKO.

Le bon cadre pour montrer 0.1, 0.2 est celui des feuilletages singuliers. Dans toute la suite $\mathbb{F}$ désigne un *feuilletage singulier* d'une surface M, localement défini par des champs de vecteurs analytiques V qui ont des points singuliers isolés et tels que les feuilles de $\mathbb{F}$ soient orientées.

H. POINCARE, [32], généralise la notion de cycle de la façon suivante (fig.2) : un *polycyle* C de $\mathbb{F}$ est une réunion connexe de points singuliers (*ses sommets*) et de feuilles (*ses côtés*) qui possède une *application retour* f ; c'est à dire, il existe une courbe analytique $T : [0,1] \to M$, $T(0) \in C$, transverse à $\mathbb{F}$, telle que la feuille passant par T(t) recoupe une première fois T en T(f(t)) si t est assez petit. Evidemment, f est analytique en dehors de 0, mais ne l'est pas en général en 0. Ainsi,

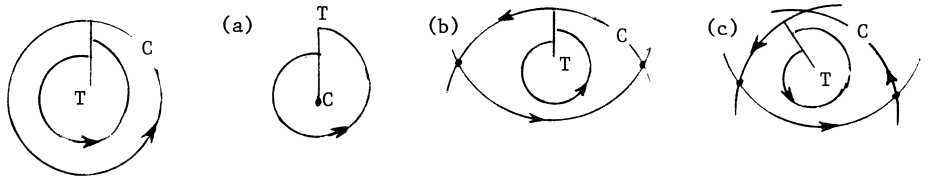

Fig. 1 Fig. 2

elle peut posséder une suite $\{t_n\}$ de points fixes isolés qui converge vers 0. Nous dirons que C est alors la *limite des cycles limites* passant par les $T(t_n)$.

Problème de DULAC . *Un polycycle peut-il être limite de cycles limites ?*

Ce problème est plus général que la conjecture de finitude. En effet, une équation différentielle polynomiale possède une extension au disque de Poincaré $\mathbb{D}^2$ ([32], [39], chapitre 5) qui définit un feuilletage $\mathbb{F}$ de $\mathbb{D}^2$. D'autre part si $\mathbb{F}$ possède une infinité de cycles limites, il possède, d'après le théorème de POINCARÉ - BENDIXSON [15], un polycycle limite de cycles limites.

Un point singulier p d'un feuilletage $\mathbb{F}$ est dit *dégénéré* si la différentielle, DV(p), d'un champ V qui définit $\mathbb{F}$ au voisinage de p est de rang < 2.

THÉORÈME 1.1 (IL'YASENKO [20]).- *Un polycycle à sommets non dégénérés n'est jamais limite de cycles limites.*

Le théorème 0.2 s'en déduit : la condition de dégénérescence des points singuliers

des feuilletages de $\mathbb{D}^2$ définis par des champs polynomiaux de degré $\leq$ n est évidemment algébrique.

Soit p un point singulier isolé d'un champ de vecteurs analytique sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Une demi-courbe C^∞ d'origine p tangente à V est une *séparatrice* de V. Si V n'a pas de séparatrice en p, il est facile de montrer [12] que p est un polycycle du feuilletage $\mathbb{F}$ défini par V sur U et réciproquement. Les feuilles voisines de p sont alors des cycles ou des "*spirales*". Le point p est appelé un *centre* (resp. un *foyer*) si toutes ces feuilles sont des cycles (resp. des *spirales*) (fig. 3). Le célèbre problème du centre foyer pour V en p n'est rien d'autre que le problème de DULAC pour C = p.

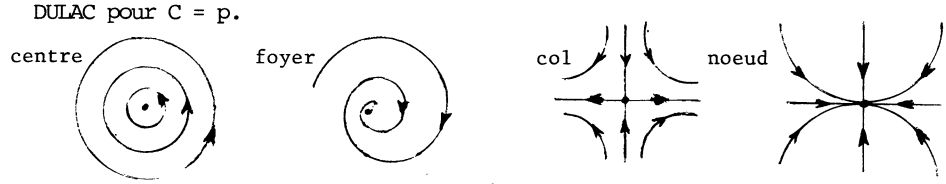

Fig. 3

Supposons que p soit un point singulier non dégénéré de V. Le *nombre caractéristique* λ de V en p est le rapport des valeurs propres de DV(p). Lorsque λ n'est pas réel p est un centre ou un foyer [32]. Lorsque λ est réel, p est un *col* (resp. un *noeud*) si λ est négatif (resp. positif).

2. Démonstration du THÉORÈME de IL'YASENKO.

Il faut montrer que l'application retour f d'un polycyle C d'un feuilletage $\mathbb{F}$ (comme dans 1), dont les sommets sont des cols non dégénérés, n'a pas une infinité de points fixes isolés.

PROPOSITION 2.1 [20].- *La fonction* $X \to f \circ \exp(-X)$, $X \in \mathbb{R}^+$ *possède un prolongement analytique borné* F *sur un domaine* Ω_b *de* $\mathbb{C}$ *constitué des* $Z = X + iY$ *tels que* $X > b(1 + Y^2)^{1/4}$ *, où* b *est un réel strictement positif.*

PROPOSITION 2.2 [11]. - *Si* f *a une infinité de points fixes alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a* $f(x) = x + O(x^n)$.

Démonstration du théorème 1.1. Supposons que f possède une infinité de points fixes et montrons que $f \equiv 1_{\mathbb{R}}$. Pour b' > 0 assez grand, l'image de $\mathbb{C}^+ = \{\text{Réel } Z \geq 0\}$ par

$$\varphi : Z \to \varphi(Z) = b'(1+Z)^{1/2} + Z, \text{avec } \varphi(0) = b'$$

est contenue dans le domaine Ω_b. D'après les propositions précédentes, le composé $\phi = (F - \exp(-)) \circ \varphi$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^+$ et il existe des réels K, K_n pour $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$|\phi(Z)| < K \quad \text{si } Z \in \mathbb{C}^+ \quad \text{et } |\phi(X)| < K_n \exp(-nX) \quad \text{si } X \in \mathbb{R}^+.$$

Montrer que $\phi \equiv 0$ est une jolie double application de PHRAGMEN-LINDELÖF dont J.P. RAMIS m'a donné la clef : soit pour $n \in \mathbb{N}$, $\phi_n(Z) = \phi(Z)\exp(nZ)$, alors

i) $|\phi_n(Z)|$ étant majoré par $K\exp(n|Z|)$ on a :

$$\sup\{|\phi_n(X+iY)| / X \text{ et } Y \geq 0\} \leq \sup\{|\phi_n(X+iY)| / X \text{ ou } Y = 0\} \leq \sup(K,K_n).$$

ii) $|\phi_n(Z)|$ étant borné d'après i) on a

$$\sup\{|\phi_n(Z)| / Z \in \mathbb{C}^+\} \leq \sup\{|\phi_n(Z)| / Z \in \partial\mathbb{C}^+\} \leq K.$$

Ainsi $\phi \equiv 0$ puisque $\phi(X) < K\exp(-nX)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$■

Les sommets p_k, $k = 1,2,\ldots,m$ de C étant des cols non dégénérés, il existe des cartes (x_k, y_k) centrées en ces points telles que :

- les axes $x_k = 0$, $y_k = 0$ soient les côtés de C en p_k.
- les demi-droites $T_k = \{(x_k, 1) / x_k \geq 0\}$, $T'_k = \{(1, y_k) / y_k \geq 0\}$ soient transverses à $\mathbb{F}$ du bon côté de C.

La feuille de $\mathbb{F}$ issue de $(x_k, 1) \in T_k$ coupe une première fois T'_k en $(1, y_k)$ et T_{k+1} en $(x_{k+1}, 1)$ (fig. 4). On a

$$f = h_m \circ g_m \circ h_{m-1} \ldots \circ g_1 ,$$

avec $g_k : x_k \to y_k$; $h_k : y_k \to x_{k+1}$.

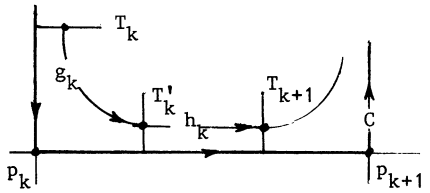

Fig. 4

Les preuves de 2.1 et 2.2 reposent sur l'étude des g_k appelés *correspondances de DULAC*. Oubliant les indices k on a :

LEMME 1. [20].- *Soit* g *la correspondance de DULAC en un col non dégénéré* p. *Le composé* $g \circ \exp(-)$ *possède un prolongement analytique borné* G *sur un domaine* Ω_b *(voir proposition 2.1) et* $b' > 0$ *étant fixé , son relèvement* $\overline{G}$ *par* $\exp(-)$, i.e $G = \exp \circ (-\overline{G})$, *envoie* Ω_b *dans* $\Omega_{b'}$.

La proposition 2.1 se déduit du lemme 1 : les h_k étant analytiques il existe des H_k holomorphes tels que $F = H_m \circ \overline{G}_{m-1} \circ \overline{H}_{m-1} \ldots \circ \overline{G}_1$. Quant à la preuve de 2.2, elle nécessite une extension des développements Tayloriens, les développements asymptotiques suivant l'échelle des $x^{\mu}(\mathrm{Log}x)^n$, $\mu \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$ [3]. Un germe g en $0 \in \mathbb{R}^+$ possède un *développement de Dulac* $\hat{g}$ s'il existe une suite $\{\mu_k\} \in \mathbb{R}^+$ strictement croissante, non bornée, et des polynômes P_k tels que

$$g(x) = g_n(x) + O(x^{\mu_n}) \quad \text{avec } g_n(x) = \sum_{k=n}^{n} x^{\mu_k} P_k(\mathrm{Log}\, x),$$

$\hat{g}$ étant la série $\Sigma\, x^{\mu_k} P_k(\mathrm{Log}\, x)$. L'ensemble $\mathcal{D}$ des g qui possèdent un tel développement $\hat{g}$ avec μ_o , $P_o = a > 0$ est stable par addition et multiplication. J. MARTINET a écrit une preuve élégante de sa stabilité par composition [22]. Cependant par un calcul fastidieux on montre que si $g,h \in \mathcal{D}$ alors :

- pour p, n $\in \mathbb{N}$, les $h_p \circ g_n \in \mathcal{D}$ et les $h_p \circ g_n$ convergent vers une série $h \hat{\circ} g$ si n et p tendent vers l'infini.
- $h \circ g$ appartient à $\mathcal{D}$ et $h \hat{\circ} g = \hat{h} \circ \hat{g}$.

LEMME 2. [11].- *Soient* g *la correspondance de DULAC et* λ *l'exposant caractéristique d'un col non dégénéré* p. *Alors* g *appartient à* $\mathcal{D}$ *et* $\mu_0 = -\lambda$.

Démonstration de 2.2.- L'application retour f qui est le composé de difféomorphismes analytiques et d'éléments de $\mathcal{D}$ appartient à $\mathcal{D}$. Si elle a une infinité de points fixes, il est clair que $\hat{f}(x) = x$ et ainsi que $f(x) = x + O(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Correspondance en un col non dégénéré. (démonstration des lemmes 1-2).

Soient p un col non dégénéré d'un champ de vecteurs V, (x,y) des coordonnées en p telles que x = 0, y = 0 soient les séparatrices de V et telles que sa correspondance de DULAC g applique $T = [0,1] \times 1$ dans $T' = 1 \times \mathbb{R}^+$.

3.1. Démonstration du lemme 1[20]. - Le prolongement analytique G de $g \circ \exp(-)$ est obtenu en complexifiant V. L'équation différentielle holomorphe correspondant à ce complexifié s'écrit, à un facteur multiplicatif près,

$$\omega = \lambda\, w\, dz - (1 + a(z,w))\, z\, dw$$

dans les coordonnées ($z = x + ix'$, $w = y + iy'$). Nous supposerons que a est holomorphe sur un voisinage du polydisque $D \times D$ de rayons (1,1) et que $|a| < 1/2$; ce qui est toujours possible. Les courbes intégrales de la restriction de $\omega = 0$ à $D^* \times D$ sont alors les feuilles d'un feuilletage holomorphe, $\mathbb{F}_\omega$ transverse à la projection $\pi(z,w) = z$.

Un chemin $c : [0,1] \to D^*$ d'origine z, d'extrémité 1, possède un relèvement partiel $\bar{c}$ pour π d'origine $\bar{z} = (z,1)$ tangent à $\mathbb{F}_\omega$,i.e il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\bar{c} : [0,\eta] \to D^* \times D, \quad \bar{c}(0) = \bar{z}, \quad \pi \circ \bar{c} = c, \quad \omega(\bar{c}'(t)) = 0.$$

Si $\eta = 1$ nous dirons que $\bar{c}$ est un *relèvement* de c. Si $z = x \in \mathbb{R}^+$ est assez petit, le chemin $c_x : t \to (1-t)x + t$ possède un relèvement $\bar{c}_x$ ([27], [25]) et $\bar{c}_x(1) = (1,g(x))$ par définition de g (fig. 5) .

Pour $Z = X + iY$ soit Γ_Z le composé des chemins

$t \to (1-t)Z + tX$, $t \to (1-t)X + t$, $t \in [0,1]$.

Si $c_Z = \exp \circ (-\Gamma_Z)$ possède un relèvement

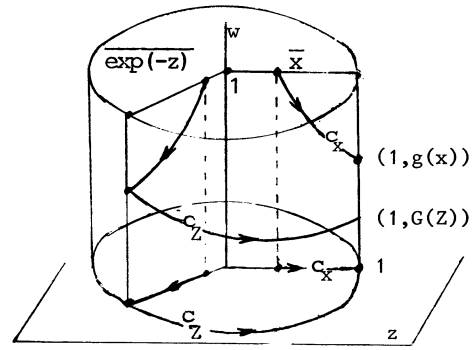

Fig. 5

$\bar{c}_Z$ on a évidemment $(1, G(Z)) = \bar{c}_Z(1)$. Il est clair que G est holomorphe bornée sur un voisinage de $\mathbb{R}^+$. Pour montrer que ce voisinage contient un domaine Ω_b nous renvoyons à [20].

3.2 Démonstration du lemme 2. - Nous reprenons la méthode de DULAC pour construire g : si $I(x,y)$ est une intégrale première de V sur un voisinage de O contenant le carré $|x|$, $|y| \leq 1$, alors $y = g(x)$ est solution de $I(1,y) = I(x,1)$. Nous pouvons nous autoriser à calculer I dans des coordonnées (x,y) qui sont seulement de classe C^∞, puisqu'il s'agit seulement de trouver un développement asymptotique de g. Distinguons deux cas :

i) V est formellement linéarisable. Alors V est C^∞-linéarisable [28]. Il existe des coordonnées C^∞, (x,y) sur un voisinage de $O \in \mathbb{R}^2$ telles que $I(x,y) = x^{-\lambda}y$ soit une intégrale première de V et ainsi $g(x) = x^{-\lambda}$.

ii) V n'est pas formellement linéarisable. Alors $\lambda = -p/q$, où $p,q \in \mathbb{N}$ sont premiers entre eux. La théorie des formes normales formelles pour les équations résonnantes ([6], [23], [25]) et un argument de [35] permettent de construire une intégrale première de V du type :

$$I(X,Y) = x^\alpha y^\beta \exp(1/x^p y^p) \text{ avec } \alpha,\beta \in \mathbb{R},$$

où (x,y) sont des coordonnées C^∞ sur un voisinage de $O \in \mathbb{R}^2$.
On montre que g est du type annoncé en résolvant :

$$\alpha \operatorname{Log} x + 1/x^p = \beta \operatorname{Log} y + 1/y^q.$$

4. Réduction du Problème de DULAC et exemple de IL'YASENKO.

4.1. Réduction du Problème : Soit C un polycycle d'un feuilletage $\mathbb{F}$ (comme dans 1) d'une surface M. D'après le théorème de désingularisation de SEIDENBERG, [36], [12], [27], il existe une surface algébrique M', un morphisme analytique π de M' sur M et un feuilletage $\mathbb{F}'$ tels que :

i) π soit un isomorphisme de $M' \setminus \pi^{-1}(C)$ sur $M \setminus C$ et $\pi(\mathbb{F}) = \mathbb{F}'$.

ii) $\pi^{-1}(C)$ contient un polycycle C' de $\mathbb{F}'$ qui a la même application retour que C.

iii) Les sommets p' de C' sont réduits, i.e. si V définit F' au voisinage de p' DV(p') n'est pas nilpotente.

Ainsi comme l'avait constaté DULAC, il suffit d'étudier son problème pour les polycycles à sommets réduits. Illustrons cette réduction par une application au :

Problème du centre-foyer pour une perturbation d'un hamiltonien. Soit $\mathbb{F}$ le feuilletage défini par

$$V = \partial P/\partial x . \partial/\partial y - \partial P/\partial y . \partial/\partial x + W \quad \text{où } P^{-1}(0) = 0, \quad W(0) = 0,$$

P est un polynôme, O un point singulier algébriquement isolé de P et W un champ de vecteurs analytique sur un voisinage U de O. Soit $\pi : U' \to U$ la désingularisation

de O pour $\mathbb{F}$. Il existe k, dépendant de P, tel que si le jet d'ordre k de W en O est nul, $\pi^{-1}(O)$ est un polycycle de $\mathbb{F}' = \pi^{-1}(\mathbb{F})$ à sommets non dégénérés. D'après IL'-YASENKO, O est un centre ou un foyer de V.

4.2 Correspondance de DULAC g pour un sommet semi-hyperbolique.- Un sommet p de $\mathbb{F}$ est *semi-hyperbolique* s'il est réduit et dégénéré. Soit V un champ de vecteurs qui définit $\mathbb{F}$ au voisinage de p. D'après [11] et [35], il existe des coordonnées C^∞, (x,y) telles que

$$\pm V = x^{n+1}\,\partial/\partial x - y(n + \alpha x^n + y\,a(x,y))\,\partial/\partial y$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et a est C^∞. Si n est pair, p est un *col dégénéré* (Fig. 6 b) sinon c'est un *noeud-col* (Fig. 6.a). Les côtés de C au voisinage de p sont la *séparatrice hyperbolique* x = 0 et la *variété centrale* y = 0 (elles sont, selon la convention brésilienne, munies de double et simple flèches sur les figures 6).

Un petit calcul, [11], montre que g ou g^{-1} a une partie principale du type $x^\alpha \exp(-1/x^n)$. (On sort alors de l'échelle des $x^\mu(\mathrm{Log}x)^n$ et g o exp(-) ne possède plus comme dans 2.1 un prolongement analytique borné). On en déduit la :

PROPOSITION DE DULAC [11].- *Soit C un polycycle de $\mathbb{F}$ à sommets réduits. Si ses sommets semi-hyperboliques sont tous contractants ou tous dilatants, C n'est pas limite de cycles limites.*

Un sommet semi-hyperbolique est dit *contractant* si C est orienté dans le sens séparatrice hyperbolique → variété centrale sinon il est dit *dilatant*. L'exemple suivant souligne les limites de la démonstration de 1.1.

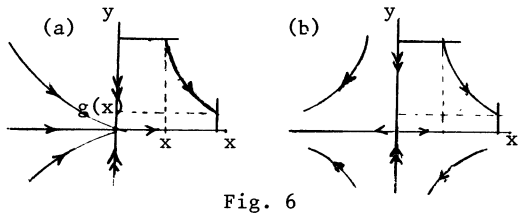

Fig. 6

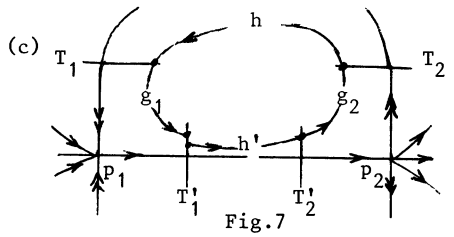

Fig.7

4.3. Exemple de IL'YASENKO. - *Il existe un polycycle C d'un feuilletage $\mathbb{F}$ d'application retour $f \neq 1_{\mathbb{R}}$ tel que $f - 1_{\mathbb{R}}$ soit C^∞-plate en O.* Ce monstre est obtenu en recollant les deux champs de vecteurs

$$V_i = x_i^2\,\partial/\partial x_i + \varepsilon_i\, y_i\,\partial/\partial y_i\,, \qquad i = 1,2 \text{ avec } \varepsilon_1 = -1\,,\ \varepsilon_2 = 1$$

le long des couples de transversales $T_i = \{y_i = 1\}$, i = 1,2 et $T'_i = \{x_i = -\varepsilon_i\}$ par les difféomorphismes h, h' respectivement avec

$$h(x_2, 1) = (-x_2, 1) \quad \text{et} \quad h(1, y_1) = (1, y_1 + y_1^2).$$

On obtient ainsi un polycycle C d'un feuilletage $\mathbb{F}$ de sommets semi-hyperboliques p_1, p_2 (fig. 7). Son application retour évaluée sur T'_1 est par construction $y \to y + y^2$;

évaluée sur T_1 elle s'écrit :

$$f(x) = x(1 - x \operatorname{Log}(1 + \exp(-1/x)))^{-1} = x + O(x^n), \qquad n \in N.$$

5. Démonstration du THÉORÈME de BAMON.

Il s'agit de montrer que le feuilletage $\mathbb{F}$ du disque de POINCARE $\mathbb{D}^2$ associé à un champ de vecteurs quadratique V de $\mathbb{R}^2$ n'a pas de polycycle limite de cycles limites.

5.1. Définition et propriétés de $\mathbb{F}$.- L'équation différentielle $i_V\, dx \wedge dy = 0$ étendue au projectif $\mathbb{R}P(2)$ définit un feuilletage $\mathbb{F}'$ à points singuliers isolés. Si la partie homogène de degré 2 de V est colinéaire au champ radial, $\mathbb{F}'$ est transverse à la droite de l'infini Δ , sauf en un point, et on déduit facilement de la proposition 5.1 que $\mathbb{F}'$ n'a pas de polycycles. Sinon Δ est une réunion de feuilles et de points singuliers, au moins 1 au plus 3. Plus précisément dans la carte canonique (u,v) de $\mathbb{R}P(2)$, $u = y/x$, $v = 1/x$, $\Delta = \{v = 0\}$, $\mathbb{F}'$ est défini par un champ de vec-

$$W' = P(u,v)\,\partial/\partial u + vQ(u,v)\,\partial/\partial v ,$$

où P,Q sont des polynômes de degré 3 et 2 respectivement. Les points singuliers de $\mathbb{F}'$ sur Δ sont les $q_i = (u_i,0)$ avec $P(u_i,0) = 0$.

$\mathbb{F}'$ n'étant pas orientable, la coutume est d'étudier le feuilletage $\mathbb{F}$ de $\mathbb{D}^2$ obtenu de la façon suivante : $\mathbb{D}^2$ étant identifié à l'hémisphère Nord de la sphère S^2, $\mathbb{F}$ est la restriction à $\mathbb{D}^2$ de $\pi^{-1}(\mathbb{F}')$ où π est la projection canonique de S^2 sur $\mathbb{R}P(2)$. $\mathbb{F}$ est défini par V sur l'intérieur $\mathring{\mathbb{D}}^2$ de $\mathbb{D}^2$ et par $W = \pi_*^{-1}(W')$ au voisinage de $\partial\mathbb{D}^2$ (voir [32] ou [39]).

La proposition ci-dessous est une conséquence de la règle : *une droite qui n'est pas une feuille de* $\mathbb{F}$ *a au plus deux points de contact avec* V.

PROPOSITION 5.1 [8].- *Un cycle ou un polycycle* C *de* $\mathbb{F}$ *est convexe. Le domaine qu'il borde dans* $\mathbb{D}^2$ *contient un centre ou un foyer. Si* p,q *sont des sommets de* C, *le segment* p,q *est un côté de* C.

La preuve de 0.1 repose sur cette proposition et les sept critères suivants déjà rencontrés ou bien connus.

Critères : Un polycycle C de $\mathbb{F}$ n'est pas limite de cycles limites s'il vérifie une des conditions suivantes :

Il) Les sommets de C sont non dégénérés (Théorème 1.1).

Du) Les sommets de C sont non dégénérés ou semi-hyperboliques contractants (Proposition de DULAC 4.2).

Sei) Par désingularisation des sommets de C on a Il) ou Du) (4.1).

Lia) V possède une fonction de Liapunov au voisinage de C.

D) Div V ne s'annule pas sur l'intérieur du domaine limité par C.

I) V possède une intégrale première analytique sur un voisinage de C.

S) $\mathbb{F}$ est symétrique par rapport à une droite transverse à C.

5.2. Un polycycle C de F n'est pas limite de cycles limites. - Pour le montrer il

faut examiner cas par cas les différents types de polycycles possibles, il y en a vingt. Nous les regrouperons dans deux rubriques, I - les polycycles bornés (sans sommet sur $\partial\mathbb{D}^2$), II- les polycycles non bornés. L'esquisse de preuve que nous donnons pour chaque cas est représenté par une figure et nous indiquons à gauche de cette figure le critère utilisé. Lorsque nous utiliserons Il) ou Du) les séparatrices qui correspondent à une valeur propre non nulle seront dotées de double flèche.

I- Polycycles bornés [7]. - Puisque V possède au plus quatre points singuliers dans $\mathring{\mathbb{D}}^2$, on a seulement les types suivants de polycycles bornés, d'après la proposition 5.1.

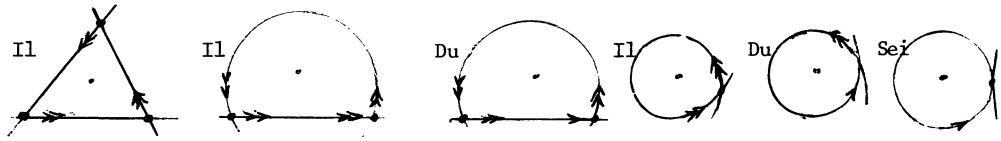

Fig. 8

II-Polycycles non bornés [1], [40], [8] . - Les points singuliers de $\mathbb{F}$ sur $\partial\mathbb{D}^2$ sont les $(q'_i, q''_i) = \pi^{-1}(q_i)$ où $q_i = (0,u_i)$ et u_i est une racine de $P(0,u)$ (voir 5.1). Une paire (q'_i, q''_i) sera dite simple - double - triple selon que le u_i correspondant est racine simple - double - triple de $P(0,u)$. BAMON distingue 4 sous-rubriques :

A. $\mathbb{F}$ a une seule paire (q',q'') de points singuliers simples sur $\partial\mathbb{D}^2$.

C est la réunion d'un des arcs $q'q''$ de $\partial\mathbb{D}^2$ et du segment $q'q''$ qui peut (9.a) ou non (9.b) et (9.c) porter un troisième sommet de C.

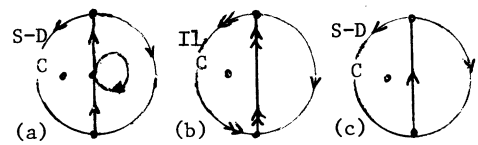

Fig. 9

B. $\mathbb{F}$ a une paire (q',q'') de points singuliers triples sur $\partial\mathbb{D}^2$.

C peut posséder un seul sommet (10.a) ou être comme dans (9.b) et (9.c) constitué d'un arc de $\partial\mathbb{D}^2$ et du segment $q'q''$.

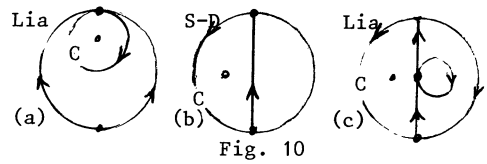

Fig. 10

C. $\mathbb{F}$ a une paire de points singuliers doubles (q'_1, q''_1) et une de simples (q'_2, q''_2) sur $\partial\mathbb{D}^2$.

C peut avoir q'_1 pour seul sommet (11.a). S'il a deux sommets ce sont les points q'_1, q'_2 et C est constitué de l'arc de $\partial\mathbb{D}^2$ joignant ces points et d'un autre arc (11.b) et (11.c). Enfin, C peut posséder un troisième sommet $p \in \partial\mathring{\mathbb{D}}$ et c'est la réunion des segments $q'_1 p$ et de l'arc $q'_1 q'_2$ de $\partial\mathbb{D}^2$ (11.d)

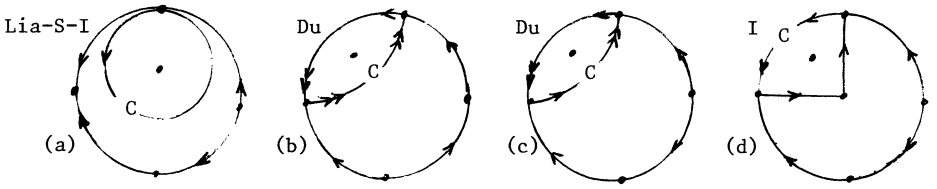

Fig. 11

D. $\mathbb{F}$ a trois paires de points singuliers simples (q_i', q_i'') sur $\partial\mathbb{D}^2$.

C est d'un des types déjà vus dans (11) : il a deux sommets $q_1', q_2' \in \partial\mathbb{D}^2$ et éventuellement un troisième $p \in \mathring{\mathbb{D}}^2$. Ils sont tous réduits. Mais dans le cas (12.d) on ne peut pas conclure par un des sept critères ; C est alors comme dans l'exemple 4.3 de IL'YASENKO.

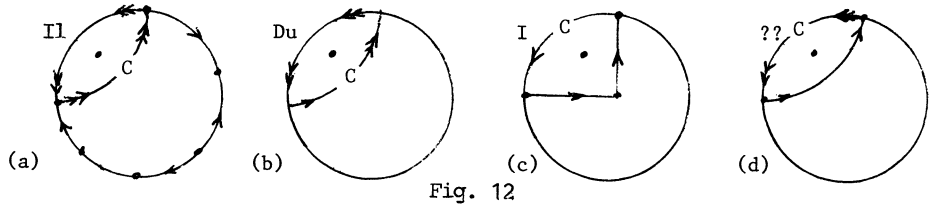

Fig. 12

Le cas (12.d)*. Dans des coordonnées (x,y) bien choisies on a :

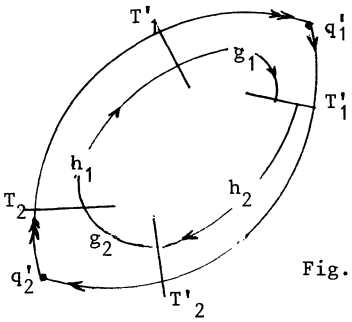

Fig. 13

$$V = (\alpha + m_1 x + bxy)\partial/\partial x + (\beta + m_2 y - bxy)\partial/\partial y$$

avec $\alpha < 0$, $m_1 \leq 0$, $b, \beta > 0$, $m_2 \geq 0$. Au voisinage de q'_i, $\mathbb{F}$ est défini par

$$W_i = -m_i\, y_i^2\, \partial/\partial y_i + (-1)^i\, bx_i(1 + a(x_i, y_i))\partial/\partial x_i$$

où $x_i = 0$ et $y_i = 0$ sont respectivement des équations de $\partial\mathbb{D}^2$ et de la variété centrale de W_i en q_i'. L'application retour f de C est la composée $g_1 \circ h_1 \circ g_2 \circ h_2$ avec $h'_1(0) = 1$. En recollant, comme le fait IL'YASENKO dans 4.3 des champs

$$\overline{W}_i = -\overline{m}_i\, y_i^2\, \partial/\partial y_i + (-1)^i\, \overline{b}x_i\, \partial/\partial x_i \quad , i = 1,2$$

par $\overline{h}_2 : T_2' \to T_1'$, $\overline{h}_1 : T_1 \to T_2$ (comme les h_i de (13)) on obtient un feuilletage $\overline{\mathbb{F}}$ possédant un polycycle $\overline{C}$. Son application retour $\overline{f}$ évaluée sur T_1' a pour partie principale $x_1^{\overline{m}_2/-\overline{m}_1\mu}$ si $h_1'(0) = \mu$. Lorsque $m_2 \leq -m_1$, BAMON choisit astucieusement μ, $\overline{m}_1$, $\overline{m}_2$ de telle façon que :

$$\overline{m}_2 < -\overline{m}_1\mu \quad \text{et} \quad \overline{g}_i \leq g_i \quad , \overline{h}_i \leq h_i \quad \text{pour } i = 1,2.$$

Ainsi $\overline{f}$ étant une dilatation stricte et $\overline{f}(x_1) \leq f(x_1)$, O est le seul point fixe de f. Lorsque $m_2 \geq -m_1$ on procède de la même façon en renversant les inégalités.

* Il'Yasenko a montré récemment qu'un polycycle possèdant seulement deux sommets semi-hyperboliques n'était jamais limite de cycles limites.

Une telle démonstration ne s'étend pas aux champs de degré > 2. Il faut peut-être alors penser à des arguments du type resommabilité [33], fonctions de Liouville [34], [17], estimation du nombre de zéros d'une intégrale abelienne [40].

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. BAMON - *Solution of Dulac's problem for quadratic Vector Fields*, Preprint IMPA, (1985).

[2] N.N. BAUTIN - *On the number of limite cycles wich appear with the variation of coefficients from on equilibrium position of focus or centre type*, Amer.Math. Soc. Transl.,100 , (1954).

[3] N. BOURBAKI - *Les structures fondamentales de l'analyse*, Fonction d'une variable réelle XII, livre IV, chapitre V et VI, Act. Scien. Indus., Hermann (1951), 55-159.

[4] A.D. BRYUNO - *Analytical form of differential equations*, Trans. Moscow. Math. Soc., 25, (1971), 131-288.

[5] A.D. BRYUNO - *The normal form of real differential equations*, Math. Notes, (1975), 722-731.

[6] D. CERVEAU & J.F. MATTEI - *Formes intégrables holomorphes singulières*, Astérisque 97 (1982).

[7] C. CHICONE & D.S. SHAFER - *Separatrix and limit cycles of quadratic systems and Dulac's theorem*,Trans. Amer. Math. Soc. , Vol. 278, 2, (1983), 585-612.

[8] W. COPPEL - *A survey of quadratic systems*, J. of Diff. Eq., 2, (1966),293-304.

[9] H. DULAC - *Recherches sur les points singuliers des équations différentielles*, J. Ecole Polytechnique, 2, 9, (1904), 1-25.

[10] H. DULAC - *Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles ayant pour point singulier un centre*, Bull. Sci. Math., 2, 32, (1908), 230-252.

[11] H. DULAC - *Sur les cycles limites*, Bull. Soc. Math. France, 51, (1923), 45-188.

[12] F. DUMORTIER - *Singularities of vector fields*, J. of Diff. Eq., 23, 1, (1977).

[13] F. DUMORTIER - *Conférence à l'IMPA - RIO* , (1976).

[14] M. FROMMER - *Über das Auftreten von Wirbeln und Strudeln...*, Math. Ann., 109, (1934), 395-424.

[15] P. HARTMAN - *Ordinary differential equations*, Wiley, New-York, (1964).

[16] D. HILBERT - *Mathematical problems*, Bull. Amer. Math. Soc., 8, (1902), 437-479.

[17] A. HOVANSKY - *Théorème de Bezout pour les fonctions de Liouville*, Preprint M/81/45 - IHES, (1981).

[18] YU. S. IL'YASENKO - *An example of equations* $dw/dz = P_n(z,w)/Q_n(z,w)$ *having...*, Math. Sbor., 80, 3, (1969), 365-378.

[19] YU. S. IL'YASENKO - *The finitness problem for limit cycles of polynomial vector fields on the plane...*, Leningrad Int. Topo. Conf., abstracts, Nauka, Leningrad, (1982).

[20] YU. S. IL'YASENKO - *Limit cycles of polynomial vector fields with nondegenerate singular points on the real plane* , Funk. Anal. Ego. Pri., 18, 3, (1984), 32-34.(Func. Ana. and Appl., 18,3, (1985), 199-209).

[21] A.M. LYAPUNOV - *Stability of motion*, Academic Press , New-York, (1966).

[22] J. MARTINET - *Lettre à Cerveau-Moussu* ,(1985).

[23] J. MARTINET - *Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après Bryuno)*, Séminaire Bourbaki, Exposé 564, Nov. 1980, L.N. 901, Springer (1981), 55-70.

[24] J. MARTINET & J.P. RAMIS - *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Pub. Math. IHES, 55, (1982), 63-164.

[25] J. MARTINET & J.P. RAMIS - *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*, Ann. Sc. Ec. Norm.Sup., 4ème série, t.16 ,(1983), 571-625.

[26] J. MARTINET & J.P. RAMIS - *Analytic classification of resonnant saddles and foci, in singularities and dynamical systems*, S.N.Pnevmatikos - Editor - North-Holland, (1985), 109-136.

[27] J.F. MATTEI & R. MOUSSU - *Holonomie et integrales premières* , Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. , 13, (1980), 469-523.

[28] R. PATERLINI & J. SOTOMAYOR - *Quadratic vector fields with many periodic orbits*, L.N., 1007, Springer, (1983), 753-766.

[29] I. G. PETROVSKI & E.M. LANDIS - *On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x,y)/Q(x,y)$ where P and Q are polynomials*, Am. Math. Soc. Transl., 2, 14, (1960), 181-200.

[30] I.G. PETROVSKI & E.M. LANDIS - *On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x,y)/Q(x,y)$ where P are polynomials of the second degree*, Am. Math. Soc. Transl.,2, 16, (1958), 177-221.

[31] I.G. PETROVSKI & E.M. LANDIS - *Correction to the articles "On the number..."*, Math. Sb. NS, 48, 90, (1965), 253-255.

[32] H. POINCARE - *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, J. Math., 7, (1881), 375-422.

[33] J.P. RAMIS - *Les séries k-sommables et leurs applications*, L.N. in Physics, 126, Springer, (1980).

[34] J.J. RISLER - *Complexité en géométrie réelle (d'après Khovansky)*, Séminaire Bourbaki - Exp. 637, (1984).

[35] R. ROUSSARIE - *Modèles locaux de champs et de formes*, Astérisque 30, (1975).

[36] A. SEIDENBERG - *Reduction of singularities of the differentiable equation Ady = Bdx*, Amer. J. Math., (1968), 248-269.

[37] SHI-SONGLING - *A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems*, Sci. Sinica. Ser. A., 23, (1980), 153-158.

[38] S. STERNBERG - *On the structure of local homeomorphisms of euclidean n-space II*, Amer. J. Math, 80, (1958), 623-631.

[39] J. SOTOMAYOR - *Curvas definidas por equacoes diferenciais no plano*, 13ème col. Bras. Math., publi. IMPA, (1981).

[40] A.N. VARCHENKO - *Estimate of the number of zeros of an abelian integral depending on a parameter and limite cycles*, Funct. Ana. and Appl., 18, 3 (1985), 98-108.

[41] YE YAN QUIAN - *Some problems in quadratic theory of ordinary differential equations*, J. of Diff. Eq., 46, 2, (1982).

Robert MOUSSU

Laboratoire de Topologie ERA UA 755
Université de Dijon
Faculté des Sciences Mirande
Département de Mathématiques
B.P. 138
21004 DIJON CEDEX