

Astérisque

GERARDO GONZALEZ-SPRINBERG

**Désingularisation des surfaces par des modifications
de Nash normalisées**

Astérisque, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 661, p. 187-207

http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__187_0

© Société mathématique de France, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉSINGULARISATION DES SURFACES
PAR DES MODIFICATIONS DE NASH NORMALISÉES

[d'après M. Spivakovsky]

par Gerardo GONZALEZ-SPRINBERG

1. Introduction

Soit S une variété algébrique complexe réduite de dimension pure d , et soit Ω_S^1 le faisceau des différentielles de S . On dénote par $G := \text{Grass}^d(\Omega_S^1)$ la grassmannienne des quotients localement libres de rang d de Ω_S^1 , et $v : G \rightarrow S$ le morphisme canonique de G sur S . Sur l'ouvert U des points lisses de S le faisceau Ω_S^1 est localement libre de rang d , donc la restriction de v à $v^{-1}(U)$ est un isomorphisme de $v^{-1}(U)$ sur U .

La modification ou transformation de Nash $\tilde{S}$ de S est, par définition, l'adhérence de $v^{-1}(U)$ dans G , munie du morphisme de $\tilde{S}$ sur S , restriction de v à $\tilde{S}$ (qui sera aussi noté v).

La variété $\tilde{S}$ est munie d'un faisceau localement libre de rang d (restriction à $\tilde{S}$ du faisceau tautologique de la grassmannienne G), quotient de $v^* \Omega_S^1$, qui est appelé le *fibré cotangent de Nash*.

Le morphisme $v : \tilde{S} \rightarrow S$ est birationnel et propre. La modification de Nash possède la propriété universelle d'être minimale parmi les modifications $\bar{v} : \bar{S} \rightarrow S$ munies d'un quotient localement libre de rang maximum de $\bar{v}^* \Omega_S^1$.

Soit T le faisceau de $\mathcal{O}_S$ -modules dual de Ω_S^1 ; la restriction de T à U est le faisceau des sections du fibré tangent de U . La modification de Nash $v : \tilde{S} \rightarrow S$ donne un prolongement du fibré tangent de U .

Si S est une variété affine, plongée dans $\mathbb{C}^N$, on peut donner la description géométrique suivante. Soit σ la section définie sur

l'ouvert U à valeurs dans le produit $S \times \text{Grass}_d(\mathbb{C}^N)$, qui associe à chaque point p de U le couple formé de p et de la direction de l'espace tangent à S en p . La modification de Nash de S est l'adhérence de $\sigma(U)$ dans $S \times \text{Grass}_d(\mathbb{C}^N)$, munie de la projection sur le premier facteur.

On sait que la modification de Nash de S est un isomorphisme si et seulement si S est lisse [N], la condition que le corps de base soit de caractéristique nulle est essentielle (la courbe d'équation $x^p + y^q$ en caractéristique p est un contre-exemple en caractéristique positive).

Le transformé de Nash $\tilde{S}$ d'une variété singulière S n'est pas lisse, en général, mais il est naturel d'essayer de savoir si l'itération de la modification de Nash aboutit à une désingularisation. Si la réponse était affirmative, on disposerait d'une méthode canonique et naturelle pour résoudre les singularités. Ceci était connu pour les courbes ([N]). Pour les surfaces, à ma connaissance, on l'avait obtenu essentiellement pour certains types de singularités de surfaces dans $\mathbb{C}^3([R])$. Par ailleurs, on disposait de quelques résultats de désingularisation en itérant des modifications de Nash suivies de normalisations (i.e. clôture intégrale de l'anneau structural dans son corps de fractions, pour chaque composante irréductible) pour les singularités quotient cycliques (en utilisant des éventails à la Demazure), ainsi que d'une méthode de calcul utilisant la désingularisation minimale, méthode bien adaptée pour les singularités rationnelles ($[G_1], [G_2]$). Ensuite, un résultat de Hironaka ([H]) avait réduit le problème à un certain type de singularités rationnelles, les singularités appelées sandwich (voir les définitions plus loin). Ce cas particulièrement difficile a été démontré par Spivakovsky dans sa thèse ([S]) ; son résultat complète la démonstration de la désingularisation des surfaces par itération de transformations de Nash et normalisations.

La question de la désingularisation des surfaces en utilisant seulement des transformations de Nash, sans normaliser, reste ouverte, ainsi que la généralisation en dimension supérieure des résultats obtenus pour les surfaces.

Rappelons qu'il existe d'autres méthodes de désingularisation des surfaces, par exemple la méthode classique de Jung (projection générique sur un plan, et désingularisation de la courbe de diramation [La]) ou celle de Zariski (itération de normalisations et éclatements des points singuliers $[Z_3], [Li]$). Cette dernière méthode est naturelle et canonique, mais elle n'est pas généralisable en dimension supérieure. Rappelons aussi que la transformation de Nash intervient dans l'étude des classes de Chern des variétés singulières ([M]).

Dans cet exposé nous nous bornerons principalement à une description des méthodes et résultats de Spivakovsky.

2. Le résultat de Hironaka.

Soit S une variété algébrique réduite de dimension pure d sur un corps k de caractéristique 0 . On considère une suite de variétés algébriques réduites de dimension pure et de morphismes

$$(1) \quad S_0 = S \xleftarrow{\sigma_1} S_1 \xleftarrow{\sigma_2} S_2 \leftarrow \dots$$

telle que l'on ait

- a) chaque morphisme σ_i est birationnel et propre
- b) le $\mathcal{O}_{X_i}$ -module $\sigma_i^*(\Omega_{S_{i-1}})/\text{Torsion}$ est localement libre, où Ω dénote le faisceau des différentielles de Kähler.

Pour simplifier l'énoncé on supposera ici S irréductible. Soit $K = k(S)$ le corps de fonctions rationnelles de S . Un anneau de valuation V de K/k est appelé divisoriel si le degré de transcendance du corps résiduel de V sur k est $d-1$. Cette condition équivaut à l'existence d'une variété algébrique lisse S' sur k telle que $K = k(S')$ et $V = \mathcal{O}_{S', \xi'}$, où ξ' est un point générique d'une hypersurface de S' ([H]).

Théorème 2.1. - Soit V un anneau de valuation divisoriel de K/k , et ξ_i le centre de V dans chaque S_i de la suite (1). Alors il existe $i_0 \geq 0$ tel que $\sigma_{i+1} : S_{i+1} \rightarrow S_i$ est localement un isomorphisme en ξ_{i+1} et S_i est lisse en ξ_i pour tout $i \geq i_0$.

On renvoie à [H] pour la démonstration.

La modification de Nash satisfait les propriétés a) et b) imposées aux morphismes σ_i de la suite (1). On peut, donc, considérer le cas où chaque σ_i est la modification de Nash composée avec un morphisme birationnel et propre. Si $S = S_0$ est une surface normale on a l'application suivante.

Soit $\sigma_i : S_i \rightarrow S_{i-1}$ la modification de Nash de S_{i-1} suivie par la normalisation, $\forall i \geq 1$. Soit $\pi : X \rightarrow S$ la désingularisation minimale de S . On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} X = \tilde{S}_0 & \xleftarrow{\tilde{\sigma}_1} & \tilde{S}_1 & \xleftarrow{\tilde{\sigma}_2} & \tilde{S}_2 & \xleftarrow{\quad} & \dots \\ \pi \downarrow & & \pi_1 \downarrow & & \pi_2 \downarrow & & \\ S = S_0 & \xleftarrow{\sigma_1} & S_1 & \xleftarrow{\sigma_2} & S_2 & \xleftarrow{\quad} & \dots \end{array}$$

où $\pi_i : \tilde{S}_i \rightarrow S_i$ et $\tilde{\sigma}_i : \tilde{S}_i \rightarrow \tilde{S}_{i-1}$ sont les projections canoniques du graphe $\tilde{S}_i$ de la correspondance birationnelle entre S_i et $\tilde{S}_{i-1}$, pour chaque $i \geq 1$.

Proposition 2.2.— *Pour i assez grand, le morphisme $\pi_i : \tilde{S}_i \rightarrow S_i$ est un isomorphisme, et par conséquent S_i domine birationnellement X .*

Démonstration.— Dans l'hypothèse contraire, il existe pour tout $i \geq 1$ une courbe irréductible C_i dans $\tilde{S}_i$, telle que $\pi_i(C_i) = \xi_i$, avec ξ_i un point de S_i , et $\tilde{\sigma}_i(C_i) = C_{i-1}$. La courbe C_i définit un anneau de valuation divisoriel V de K , avec $\xi_i \in S_i$ son centre, pour chaque i . Par le théorème, S_i est lisse en ξ_i , pour i assez grand, et par suite l'application rationnelle $S_i \rightarrow \tilde{S}_0$ est régulière en ξ_i . Par conséquent π_i est localement un isomorphisme sur ξ_i , d'où une contradiction. ■

Ce résultat ramène la démonstration de la désingularisation d'une surface par itération de la transformation de Nash suivie de la normalisation, aux surfaces normales qui présentent seulement des singularités qui dominent birationnellement une surface lisse.

3. Singularités sandwich.

Soit $\xi \in S$ une singularité normale de surface (donc isolée). Soient $\pi : X \rightarrow S$ une désingularisation de S , $E = \bigcup_{i=1}^n L_i = \pi^{-1}(\xi)$ la fibre exceptionnelle de π , où les L_i sont les composantes irréductibles. On dit que π est la *désingularisation minimale* si on a l'inégalité $(L_i \cdot L_i) \leq -2$ pour tout L_i de genre nul, où $(\cdot)$ désigne la forme intersection de $\text{Pic}(X)$. Si π est une *bonne désingularisation* (i.e. chaque courbe L_i est lisse, les croisements entre différentes L_i sont normaux et il n'y a pas d'intersection commune à trois L_i distincts), alors on associe à π un *graphe dual pondéré* où les sommets sont en bijection avec les L_i , les arêtes avec les points d'intersection des L_i , et où les sommets sont munis des poids donnés par l'autointersection des courbes associés aux sommets. On appelle *cycle fondamental* de π l'unique cycle divisoriel qui est minimal parmi les cycles positifs (non nuls) $Z = \sum n_i L_i$, à support dans la fibre exceptionnelle E , satisfaisant les inégalités $(Z \cdot L_i) \leq 0$, $\forall i$ (voir $[A_1]$). On peut calculer le cycle fondamental d'une bonne désingularisation en connaissant seulement le graphe dual pondéré.

Une *singularité rationnelle* de surface S est une singularité normale telle que $R^1\pi_*\mathcal{O}_X$ est nul (où $\pi : X \rightarrow S$ est une désingularisation quelconque de S) ; on démontre que cette propriété équivaut à la nullité du genre arithmétique du cycle fondamental $([A_1])$. Soit S une singularité rationnelle. Alors on a les propriétés suivantes :

- Chaque composante irréductible de la fibre exceptionnelle de π est une courbe rationnelle lisse.
- La désingularisation minimale est une bonne désingularisation.
- Le graphe dual de π est un arbre.
- $\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_X} = \mathcal{O}_X(-Z)$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal au point singulier et Z est le cycle fondamental.

Définition 3.1.- On appelle *singularité sandwich* une singularité normale de surface qui domine birationnellement une surface lisse.

Si S est une singularité sandwich et $\pi_0 : S \rightarrow X_0$ est un morphisme birationnel dans une surface lisse X_0 , en considérant une désingu-

larisation $\pi : X \rightarrow S$, on obtient une chaîne de morphismes birationnels

$$(2) \quad X \xrightarrow{\pi} S \xrightarrow{\pi_0} X_0.$$

Le fait que S se trouve entre deux surfaces lisses (ce qui motive la dénomination choisie) implique le résultat suivant.

Proposition 3.2.- *Toute singularité sandwich est rationnelle.*

Démonstration.- En effet, le morphisme composé $\pi_0 \circ \pi : X \rightarrow X_0$ (de la suite (2)) est un morphisme birationnel entre deux surfaces lisses, et par conséquent il existe un plongement de X dans une surface lisse $\bar{X}$ telle que $\pi_0 \circ \pi$ se prolonge en un morphisme birationnel et *propre* $\bar{\varphi} : \bar{X} \rightarrow X_0$, entre deux surfaces lisses. Par suite $\bar{\varphi}$ est composition de transformations quadratiques (i.e. éclatements de points fermés), donc il existe une courbe exceptionnelle de première espèce $\bar{E}$ (i.e. contractable en un point lisse) qui contient la fibre exceptionnelle E de π . Or on sait que la contraction (en un point normal d'une surface) de la réunion (connexe) d'une sous-famille des composantes irréductibles d'une courbe qui est contractable en une singularité rationnelle, est aussi une singularité rationnelle. Ce fait résulte de la caractérisation des singularités rationnelles par la nullité du genre du cycle fondamental $([A_1], [A_2], [Li])$. La courbe $\bar{E}$ est une courbe exceptionnelle de première espèce, i.e. contractable en un point lisse ("cas particulier" de singularité rationnelle), par conséquent la contraction de E par π est une singularité rationnelle. ■

Remarque 3.3.- La démonstration de la proposition 3.2 implique que les singularités sandwich sont obtenues en contractant, en un point normal, la réunion d'une sous-famille des composantes irréductibles d'une courbe de première espèce plongée dans une surface lisse. Inversement, une singularité normale de surface obtenue en contractant une courbe ayant cette propriété, domine birationnellement une surface lisse, donc c'est une singularité sandwich.

Pour la démonstration de la désingularisation (par des transformations de Nash normalisées), on utilise une classification des singularités sandwich en termes des graphes duaux pondérés de la désingularisation. Les singularités sandwich sont normales, donc isolées. Le problème de désingularisation est local, et les singularités sont considérées à isomorphisme analytique local près.

Proposition 3.4.— Soient (S, ξ) une singularité sandwich, $\pi_0 : (S, \xi) \rightarrow (X_0, \eta)$ un morphisme birationnel, où X_0 est une surface lisse. Alors (S, ξ) est localement isomorphe à l'éclatement d'un idéal intégralement clos (i.e. "complet" dans la terminologie de Zariski $[Z_2]$) de X_0 .

Démonstration.— Soit $\pi : (X, E) \rightarrow (S, \xi)$ une désingularisation de S . On peut plonger X dans une surface lisse $\bar{X}$ et S dans une surface normale $\bar{S}$ telles que l'on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \bar{X} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \bar{\pi} \\ S & \hookrightarrow & \bar{S} \\ & \searrow \pi_0 & \swarrow \bar{\pi}_0 \\ & X_0 & \end{array}$$

où $\bar{\pi}_0 \circ \bar{\pi}$ est birationnel et propre, quitte à remplacer S par un voisinage de ξ , X par l'image inverse de ce voisinage par π . La surface $\bar{S}$ est la contraction de $E = \pi^{-1}(\xi)$ dans $\bar{X}$. Les surfaces $\bar{X}$ et X_0 sont lisses, donc $\bar{\pi}_0 \circ \bar{\pi}$ est composition de transformations quadratiques (Castelnuovo). Par suite il existe un idéal I tel que $\bar{X}$ soit l'éclaté de X_0 de centre I (où I est $\mathfrak{m}_{X_0, \eta}$ -primaire, avec $\mathfrak{m}_{X_0, \eta}$ l'idéal maximal de X_0 en η). On peut supposer I intégralement clos, car $\bar{X}$ est normal et on a l'égalité $(\overline{I^n}) = (\bar{I})^n$, $\forall n$, où la barre dénote la clôture intégrale (voir $[Z_2]$ Appendix 5, ou $[Li]$, §7).

Il existe une décomposition unique de I en produit d'idéaux simples (i.e. idéaux complets et irréductibles pour la décomposition en produit d'idéaux non triviaux), $I = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ ($[Z_2]$, p. 385). On sait qu'il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des idéaux

simples p_i et l'ensemble des composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle $\bar{E} \subset \bar{X}$ de l'éclaté de centre I ([Li], §18). Soit $J = \prod_{i=1}^t p_i$, $t < r$, le produit des idéaux simples correspondant aux composantes irréductibles de $\bar{E} \setminus E$ (i.e. les composantes contractées par π). Alors $\bar{S}$ est isomorphe à l'éclaté de X_0 de centre J , au voisinage de la fibre exceptionnelle, d'où la proposition. ■

Remarque 3.5.- On garde les notations de la démonstration de la Proposition 3.4. La surface $\bar{X}$ peut être choisie de telle façon que toutes les composantes irréductibles de $\bar{E} \setminus E$ soient des courbes (rationnelles) d'auto-intersection -1 (Proposition 1.8 de [S]).

Définition 3.6.- Une singularité sandwich (S, ξ) est appelée

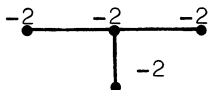
- a) *primitive* si on peut l'obtenir comme l'éclaté de $\mathbb{C}^2$ de centre un idéal simple.
- b) *minimale* si le cycle fondamental de la désingularisation minimale est réduit.

Remarque 3.7.- On garde les notations de la proposition 3.4. Une singularité sandwich $\xi \in S$ est primitive si et seulement si $\pi_0^{-1}(\eta)$ est irréductible, ou encore, si et seulement si $\bar{E} \setminus E$ est irréductible (où on suppose que $\pi : \bar{X} \rightarrow \bar{S}$ est la désingularisation minimale).

Soit Γ le graphe dual pondéré associé à la désingularisation minimale $\pi : (X, E) \rightarrow (S, \xi)$. On note L_x la composante irréductible de E correspondante au sommet $x \in \Gamma$, $W_\Gamma(x) = -(L_x \cdot L_x)$, $\gamma_\Gamma(x)$ le nombre de sommets de Γ adjacents à x .

Remarque 3.8.- Soit $\xi \in S$ une singularité rationnelle ; alors la nullité du genre arithmétique du cycle fondamental implique l'inégalité $W_\Gamma(x) \geq \gamma_\Gamma(x) - 1$, $\forall x \in \Gamma$. On peut montrer facilement que le cycle fondamental de la désingularisation minimale est réduit si et seulement si on a $W_\Gamma(x) \geq \gamma_\Gamma(x)$, $\forall x \in \Gamma$. Si le cycle fondamental est réduit, alors $\xi \in S$ est une singularité sandwich minimale, car on peut compléter le graphe Γ en un graphe d'une courbe

exceptionnelle de première espèce (i.e. contractable en un point lisse). L'exemple le plus simple de singularité rationnelle qui n'est pas sandwich est D_4 :



compléter ce graphe avec des sommets de poids -1 , en les contractant on obtient deux courbes d'auto-intersection -1 qui s'intersectent, donc la matrice intersection n'est pas définie négative.

Proposition 3.9.- Toute singularité sandwich (S, ξ) est le joint birationnel d'une famille finie de singularités primitives.

Démonstration.- Résulte de la factorisation des idéaux complets en produit d'idéaux simples ($[Z_2], [Li]$ §8). ■

Remarque 3.10.- La décomposition en singularités primitives (Prop. 3.9) n'est pas en général unique ; elle dépend de la donnée d'un morphisme birationnel de la singularité sandwich sur une surface lisse.

Dictionnaire 3.11.- La proposition 3.8 réduit la classification des singularités sandwich à celle des singularités primitives.

On dispose d'un dictionnaire entre les quatre catégories d'objets suivantes :

- (a) les singularités sandwich primitives ;
- (b) les idéaux simples de $\mathbb{C}^2_{0,0}$, $\mathbb{M}^2_{0,0}$ -primaires ;
- (c) les couples (C, a) où C est un germe de courbe plane dans $(\mathbb{C}^2, 0)$ analytiquement irréductible, et a est un entier positif ;
- (d) les valuations divisorielles du corps de fractions de $\mathbb{C}^2_{0,0}$ qui dominent $\mathbb{C}^2_{0,0}$.

(b) $\rightarrow$ (a) : Par définition, l'éclaté de $\mathbb{C}^2$ de centre un idéal simple $\mathbb{M}^2_{0,0}$ -primaire est une singularité sandwich primitive. Cette application est surjective, mais non injective.

(b) $\rightarrow$ (c) : Soit p un idéal simple ; on lui fait correspondre un

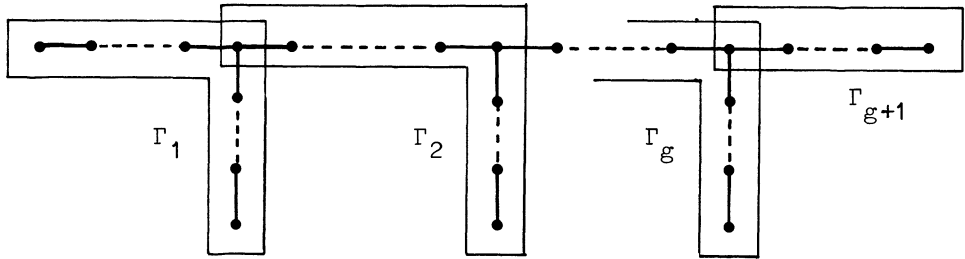
couple (C, a) , où C est une courbe d'équation un élément f de $\mathfrak{p}$ "assez général" (tel que le transformé strict de C soit transverse au diviseur exceptionnel de la désingularisation minimale $\bar{X}$ de l'éclaté de $\mathbb{C}^2$ de centre $\mathfrak{p}$), et où l'entier a est la longueur du transformé strict de $\mathfrak{p}$ dans la désingularisation plongée minimale Y de la courbe C (ou encore, l'ordre de contact, dans Y , du transformé strict de C avec le transformé strict d'une autre courbe C' assez générale). Par le théorème 11.2 de $[Z_1]$, on sait qu'un élément général de $\mathfrak{p}$ est analytiquement irréductible, i.e. la courbe C est analytiquement irréductible. Cette correspondance est bijective, car étant donné un couple (C, a) de (c) , on lui associe l'idéal $\mathfrak{p} = (f_{\tilde{C}})_{\tilde{C} \in \mathcal{C}(C, a)}$ où $\mathcal{C}(C, a)$ est la famille des germes de courbes analytiquement irréductibles ayant les mêmes exposants de Puiseux que C et ayant un contact d'ordre au moins a avec C , et où $f_{\tilde{C}}$ désigne l'équation de $\tilde{C} \in \mathcal{C}(C, a)$.

$(c) \rightarrow (d)$: Soit (C, a) un couple de (c) ; on lui associe la valuation v définie par $v(f) = \min_{\tilde{C} \in \mathcal{C}(C, a)} \{\tilde{C} \cdot C_f\}$, $\forall f \in \mathfrak{o}_{\mathbb{C}^2, 0}$. Inversement, soit v une valuation de (d) . On considère la surface Y , obtenue par une suite de transformations quadratiques de centre le centre de v , jusqu'à ce que le centre de v devienne de codimension 1. On associe à v le couple (C, a) , où C est l'image dans $\mathbb{C}^2$ d'un germe de courbe transverse à la dernière composante irréductible du diviseur exceptionnel de Y , et où l'entier a est le nombre de transformations quadratiques faites pour obtenir Y à partir de la première surface (de la suite d'éclatements $Y = Y_n \rightarrow Y_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow Y_1 \rightarrow \mathbb{C}^2$) où le transformé strict de C est lisse et transverse au diviseur exceptionnel.

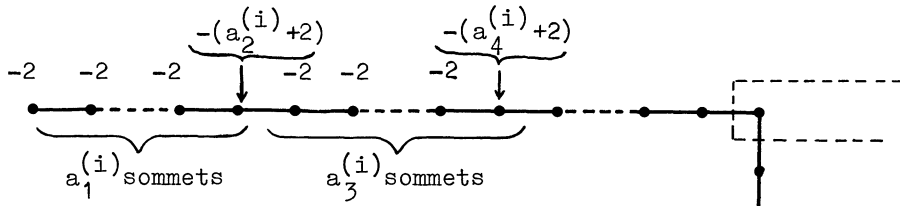
3.12.- Le graphe dual pondéré Γ de la désingularisation minimale d'une singularité sandwich primitive est déterminé par la donnée des exposants de Puiseux d'un germe analytiquement irréductible d'une courbe plane C , et par un entier $a \geq 1$ (dictionnaire 3.11). Ces données déterminent des nombres rationnels β_i , $1 \leq i \leq g$, dont les développements en fractions continues

$$\beta_i = a_1^{(i)} + 1 \sqrt{a_2^{(i)}} + \dots + 1 \sqrt{a_{m_i}^{(i)}} + 1$$

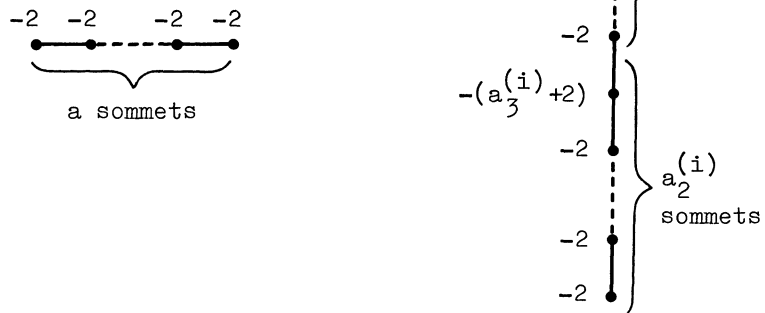
fournissent toutes les données combinatoires du graphe Γ suivant :



où chaque sous-graphe Γ_i , $1 \leq i \leq g$, est de la forme



et où le sous-graphe Γ_{g+1} est de la forme



4. Méthode de la démonstration de la désingularisation des singularités sandwich par itération du transformé de Nash normalisé.

4.1. Remarques générales.-

a) Soit $\pi : X \rightarrow S$ la désingularisation minimale d'une singularité (normale) de surface complexe (S, ξ) . On note $\tilde{\Omega}$ le $\mathcal{O}_X$ -module $\pi^* \Omega_S^1 / \text{Torsion}$. On a $\tilde{\Omega} = d\pi(\pi^* \Omega_S^1)$, où $d\pi(\pi^* \Omega_S^1)$ est l'image de $\pi^* \Omega_S^1$ dans Ω_X^1 par la différentielle $d\pi$ du morphisme π . Le $\mathcal{O}_X$ -module Ω_X^1 est localement libre, donc le sous-module $\tilde{\Omega}$ est localement libre sauf éventuellement en un sous-ensemble A de X de codimension 2. Le fait que X soit une surface lisse entraîne que A est un ensemble fini de points et qu'il existe une surface lisse $\tilde{X}$ et un morphisme birationnel $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ (composition d'une suite d'éclatements de points fermés, par le théorème de structure des morphismes birationnels de surfaces) tel que $\tilde{\Omega}_{\tilde{X}}$ soit localement libre. La surface $\tilde{X}$ domine donc le transformé de Nash $v : \tilde{S} \rightarrow S$ (propriété universelle de la modification de Nash). On a un diagramme commutatif

$$(4.1.1) \quad \begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\sigma} & X \\ \downarrow \tilde{\pi} & & \downarrow \pi \\ \tilde{S} & \xrightarrow{v} & S \end{array}$$

On peut remplacer $\tilde{S}$ par son normalisé, car $\tilde{X}$ est lisse, donc normal, et par suite $\tilde{X}$ domine le normalisé de $\tilde{S}$.

On obtient donc une désingularisation de $\tilde{S}$, ce qui permet de comparer les singularités de S et de son transformé de Nash normalisé $([S], [G_2])$.

b) Pour obtenir le morphisme $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ du diagramme (4.1.1), il faut déterminer l'ensemble où $\tilde{\Omega}$ n'est pas localement libre. On considère $\tilde{\Omega}^2 = \Lambda^2 \tilde{\Omega}$, sous-faisceau sans torsion du faisceau localement inversible Ω_X^2 ; on a $\tilde{\Omega}^2 = I \mathcal{O}_X(-M + K_X)$, où $\mathcal{O}_X(-M + K_X)$ est la partie divisorielle de $\tilde{\Omega}$ (avec K_X le diviseur canonique de X et M un diviseur positif à support dans la fibre exceptionnelle E de π), et où I est un idéal dont le cosupport est l'ensemble fini des points de X où $\tilde{\Omega}^2$ n'est pas localement libre. Cet ensemble peut être décrit en termes de la courbe polaire de S . Supposons (S, ξ) plongée dans $(\mathbb{C}^N, 0)$; on appelle courbe polaire de S le lieu critique d'une projection générale de S sur un plan de $\mathbb{C}^N$.

Plus précisément, on a la définition suivante :

Soit D un $(N-2)$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^N$. La courbe polaire relative à D , $C_1(D) \subset S$, est définie comme étant l'adhérence dans S de l'ensemble

$$\{\eta \in S \mid \eta \text{ est non singulier et } \dim(T_{S,\eta} \cap D) \geq 1\},$$

où $T_{S,\eta}$ est le plan tangent à S en η , identifié avec son translaté à l'origine $([L-T], [P])$. Notons $C'_1(D)$ la transformée stricte de $C_1(D)$ dans X . On appelle *point base de la courbe polaire* un point $\eta \in X$ tel qu'il existe un ouvert dense de Zariski U de la grassmannienne $\text{Grass}(N, N-2)$ des $(N-2)$ -sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^N$ tel que, pour tout $D \in U$, on ait $\eta \in C'_1(D)$.

Soit D un $(N-2)$ -sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^N$, défini par les équations $x_1 = x_2 = 0$; on associe à D la section $s_D = dx'_1 \wedge dx'_2$ de $\tilde{\Omega}^2$, avec $x'_1 = x_1 \circ \pi$. La famille des sections s_D , avec D parcourant $\text{Grass}(N, N-2)$, engendre $\tilde{\Omega}^2$.

Proposition 4.1.2.- (i) Soit $\eta \in X$. Le module $\tilde{\Omega}^2$ n'est pas localement inversible en η si et seulement si η est un point base de la courbe polaire.

(ii) La surface X domine le transformé de Nash normalisé de S si et seulement si la courbe polaire n'a pas de point base.

Démonstration.- Il existe un ouvert dense V de $\text{Grass}(N, N-2)$ tel que, pour tout $D \in V$, le diviseur (s_D) associé à la section s_D de $\tilde{\Omega}^2$ soit $(-M + K_X)$. Le module $\tilde{\Omega}^2$ est localement inversible en η si et seulement si il existe $D \in V$ tel qu'on ait $\eta \notin C'_1(D)$ (car alors s_D engendre $\tilde{\Omega}^2$ en η), et par conséquent si et seulement si η n'est pas un point base de la courbe polaire, d'où (i). L'assertion (ii) résulte de (i) et de la propriété universelle de la modification de Nash. ■

Dans la suite on utilisera l'équivalence (i) de la proposition 4.1.2 en faisant référence soit au module $\tilde{\Omega}^2$, soit à la courbe polaire.

c) Soit Γ le graphe dual pondéré de la désingularisation minimale $\pi : X \rightarrow S$, $\tilde{\Gamma}$ le graphe dual pondéré de la désingularisation $\pi \circ \sigma : \tilde{X} \rightarrow S$ (diagramme (4.1.1)), où $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ est la suite mini-

male de transformations quadratiques telle que $\sigma^* \tilde{\Omega}^2 / \text{Torsion}$ (qui sera noté aussi $\tilde{\Omega}^2$) soit localement inversible (i.e. telle que la courbe polaire n'ait pas de point base). Soit L une composante irréductible de la fibre exceptionnelle de $\pi \circ \sigma$. La dimension de $\tilde{\pi}(L)$ est 0 (i.e. $\tilde{\pi}$ contracte L en un point) si et seulement si le degré de $\tilde{\Omega}^2$ restreint à L est 0, ou encore, si et seulement si la courbe polaire (i.e. la transformée stricte dans $\tilde{X}$) ne rencontre pas L . Soient $\tilde{\xi}_i \in \tilde{S}$, $1 \leq i \leq r$, les points singuliers de $\tilde{S}$, et $\tilde{\Gamma}_i$ les graphes duaux pondérés associés à la désingularisation $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$. Le graphe $\tilde{\Gamma}$ est obtenu à partir de Γ par une suite d'éclatements. L'ensemble de sommets et d'arêtes de Γ est un sous-ensemble de celui de $\tilde{\Gamma}$, en identifiant un sommet $x \in \Gamma$ au sommet de $\tilde{\Gamma}$ qui représente la transformée stricte (par σ) du diviseur L_x (les poids sont différents si on a éclaté un point de L_x). On a donc les inclusions $\coprod_{i=1}^r \tilde{\Gamma}_i \subset \tilde{\Gamma} \supset \Gamma$. Le but est de comparer Γ avec chaque $\tilde{\Gamma}_i$, $1 \leq i \leq r$, pour démontrer, après la réduction au cas des singularités sandwich minimales, la désingularisation en un nombre fini d'itérations de la modification de Nash normalisée.

4.2. Résultats.- On suppose maintenant que (S, ξ) est une singularité sandwich, dans le diagramme (4.1.1). Soit I l'idéal associé à $\tilde{\Omega}^2$, défini dans 4.1 b).

Proposition 4.2.1.- Soit $\eta \in X$ un point base de la courbe polaire. Alors il existe des coordonnées locales (u_o, v_o) de X en η , équations locales de L_x et de L_y si $L_x \cap L_y = \{\eta\}$, telles que l'idéal I , en η , soit engendré par des monômes de la forme $u_o^\alpha v_o^\beta$.

Dans les énoncés suivants on utilise les notations introduites dans 3.8 et 4.1 c).

Corollaire 4.2.2.- Soit x un sommet de $\tilde{\Gamma}_i$, $1 \leq i \leq r$, tel que l'on ait $W_{\tilde{\Gamma}_i}(x) + 1 = \gamma_{\tilde{\Gamma}_i}(x)$. Alors on a $x \in \Gamma$ et $W_\Gamma(x) + 1 = \gamma_\Gamma(x)$.

Corollaire 4.2.3.- En itérant un nombre fini de fois le transformé de Nash normalisé d'une singularité sandwich on obtient une surface qui ne possède que des singularités sandwich minimales.

Soient (S, ξ) une singularité sandwich minimale, $Z = \sum_{x \in \Gamma} L_x$ le cycle fondamental de la désingularisation minimale. Pour chaque sommet $x \in \Gamma$ on définit un entier s_x :

si $(Z, L_x) < 0$, on pose $s_x = 0$,

si $(Z, L_x) = 0$, on pose $s_x = \min\{\text{distance de } x \text{ à } y \mid y \in \Gamma, (Z, L_y) < 0\}$,

où la distance entre deux sommets est le nombre d'arêtes d'un sous-graphe connexe minimal contenant x et y . On remarque que si x et y sont adjacents, alors on a $|s_x - s_y| \leq 1$.

Un *sommet central* de Γ est un sommet x tel qu'il existe au moins deux sommets, y et z , adjacents à x , satisfaisant les inégalités $s_y < s_x$ et $s_z < s_x$.

Une *arête centrale* est une arête entre deux sommets x et y telle que l'on ait $s_x = s_y$.

Ces définitions généralisent celles utilisées pour les graphes formés d'une seule chaîne (i.e. sans branchements) ([G₂], p. 167).

Dans l'énoncé suivant on utilise les notations du diagramme (4.1.1) et celles de 4.1 c).

Proposition 4.2.4.- Soit (S, ξ) une singularité sandwich minimale

- i) Le morphisme $\sigma : \tilde{X} \rightarrow X$ est composé des éclatements des points représentés par les arêtes centrales de Γ .
- ii) Le morphisme $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{S}$ contracte toutes les composantes de la fibre exceptionnelle de $\pi \circ \sigma$ sauf les composantes L_x , avec $x \in \tilde{\Gamma}$, telles que
 - (a) $x \in \tilde{\Gamma} - \Gamma$
 - ou
 - (b) $x \in \Gamma$ et x est un sommet central de Γ
 - ou
 - (c) $x \in \Gamma$ et $\gamma_{\Gamma}(x) - W_{\Gamma}(x) \leq -2$ (i.e. $(Z, L_x) \leq -2$).

Corollaire 4.2.5.- Soient (S, ξ) une singularité sandwich minimale, $\tilde{\Gamma}$ (resp. Γ) le graphe dual pondéré d'une singularité $\tilde{\xi}$ de $\tilde{S}$ (resp. de ξ). Alors on a

$$(\# \tilde{\Gamma}) \leq \frac{1}{2} (\# \Gamma) ,$$

où $\#$ dénote le cardinal de l'ensemble de sommets. Par conséquent, l'itération d'un nombre fini de modifications de Nash normalisées désingularise S .

La démonstration de la proposition 4.2.1 utilise le fait que toute singularité sandwich est le joint birationnel d'une famille finie de singularités primitives (Proposition 3.9). On a $\tilde{\Omega}^2 = \{df \wedge dg \mid f, g \in \mathcal{O}_X(-Z)\}$, où Z est le cycle fondamental, donc il suffit de considérer le joint birationnel de deux singularités primitives, car dans le produit extérieur $df \wedge dg$, chaque facteur peut provenir (au voisinage de chaque point de la fibre exceptionnelle) d'une singularité primitive. On est ramené au cas où la singularité est primitive, cas qui est analysé en décomposant $\tilde{\Omega}^2$ en somme de trois sous-faisceaux Ω_i engendrés par les produits $df \wedge dg$ où f et g sont soit croissantes, soit décroissantes. Les notions de croissance et de décroissance proviennent de la comparaison avec le cycle divisoriel dans X associé à une fonction qui provienne d'un élément générique de l'idéal maximal à l'origine de $\mathbb{C}^2$, via le morphisme (éclatement d'un idéal simple) $\pi_0 : S \rightarrow \mathbb{C}^2$, composé avec π . La croissance ou décroissance d'une fonction f est définie en termes du cycle divisoriel associé aux zéros de f , et est purement numérique. On démontre que la propriété de croissance caractérise (dans un voisinage du cycle fondamental) les fonctions qui proviennent de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2, 0}$, démonstration qui repose sur les résultats de M. Artin sur les singularités rationnelles et en particulier la méthode utilisée pour démontrer $\mathcal{O}_X(-Z) = m_{S, \eta} \cdot \mathcal{O}_X([A_1])$.

Le corollaire 4.2.2 résulte de l'analyse des éclatements que l'on fait pour rendre inversible l'idéal I (i.e. pour éliminer les points base de la courbe polaire), en sachant que I est monomial (Proposition 4.2.1).

Le corollaire 4.2.3 résulte de la proposition 2.2, qui implique que dans une suite de transformés de Nash normalisés, en un nombre fini

de pas, il ne reste aucun sommet provenant du premier graphe dual. Par le corollaire 4.2.2 on ne crée aucun nouveau sommet x tel que $W(x) + 1 = \gamma(x)$. Par conséquent, en un nombre fini de pas on a $W(x) \geq \gamma(x)$ pour tout sommet x , donc les singularités obtenues sont minimales.

Pour démontrer la proposition 4.2.4 (ainsi que la proposition 4.2.1) on utilise le lemme suivant.

Lemme 4.2.6.- Soient f et g deux éléments généraux de $\mathcal{O}_X(-Z)$. Pour chaque sommet $x \in \Gamma$, soit f_x (resp. g_x) la multiplicité d'annulation de f (resp. de g) au point générique de L_x . On définit $\delta(x) := \text{card} \{j \mid (f_x/f_{y_j}) \neq (g_x/g_{y_j}), 1 \leq j \leq r\}$, où $\{y_j \mid 1 \leq j \leq r\}$ est l'ensemble des sommets adjacents à x . On note $\bar{C}$ la courbe obtenue en ôtant de la courbe polaire C les composantes qui portent un des points d'intersection $L_x \cap L_y$ de deux composantes irréductibles de la fibre exceptionnelle. On a la majoration suivante : $\bar{C} \cdot L_x \leq \max \{0, (\delta(x)-2)\}$.

Ce résultat permet d'étudier séparément les points de croisement de la fibre exceptionnelle.

Remarque 4.2.7.- Toute singularité sandwich minimale peut être obtenue comme joint birationnel d'une famille finie de singularités de type A_n , qui sont les seules singularités sandwich qui sont à la fois primitives et minimales. La proposition 4.2.4 pourrait se démontrer en utilisant ce fait.

On renvoie à [S] pour les démonstrations.

5. Quelques exemples de singularités sandwich.

5.1.- $\Gamma = A_n$: $\begin{array}{ccccccc} & -2 & & -2 & & -2 & & -2 \\ & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \end{array}$ (n sommets de poids -2)

(a) Si n est pair, il existe une arête centrale, donc on a

$\tilde{\Gamma}$: $\begin{array}{ccccccccccc} & -2 & & -2 & & -3 & & -1 & & -3 & & -2 & & -2 \\ & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet \end{array}$ ($n+1$ sommets).

La surface $\tilde{S}$ possède deux singularités dont les graphes associés sont :

$$\tilde{\Gamma}_1 : \begin{array}{cccc} -2 & -2 & -2 & -3 \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{array} ; \quad \tilde{\Gamma}_2 : \begin{array}{cccc} -3 & -2 & -2 & -2 \\ \bullet & \bullet & \cdots & \bullet \end{array}$$

(b) Si n est impair, il existe un sommet central. On a $\tilde{X} = X$, $\tilde{\Gamma} = \Gamma$. La surface $\tilde{S}$ possède deux singularités de type $A_{(n-1)/2}$ si $n > 1$; elle est lisse si $n = 1$.

5.2.- $\Gamma =$

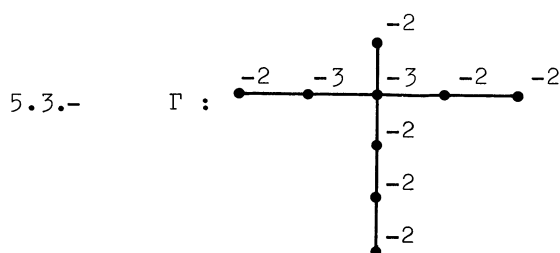
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & -1 & & & & & 0 \\ \{(Z, L_x)\}_{x \in \Gamma} : & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & ; & \{s_x\}_{x \in \Gamma} : & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ & & & 0 & & & & & & & & 2 \\ & & & 0 & & & & & & & & 1 \\ & & & -2 & & & & & & & & 0 \end{array}$$

Donc il y a 2 sommets centraux (les valeurs 2 dans le diagramme des s_x) et une arête centrale (entre les deux sommets adjacents avec $s_x = 1$).

On a donc $\tilde{\Gamma} :$

Les sommets non contractés par $\tilde{\pi}$ sont indiqués par un carré. La surface $\tilde{S}$ possède 4 singularités dont les graphes associés sont les composantes connexes qui contiennent les sommets qui restent.

Les deux exemples 5.1 et 5.2 sont des singularités sandwich minimales.



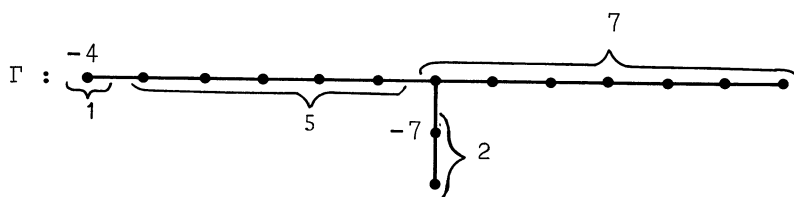
Soit x le sommet de branchement. On a $W_\Gamma(x) = 3$ et $\gamma_\Gamma(x) = 4$, donc le cycle fondamental n'est pas réduit (i.e. la singularité n'est pas minimale).

Dans cet exemple, le graphe Γ ne suffit pas pour déterminer les graphes des singularités de $\tilde{S}$.

Le birapport des points d'intersection de L_x avec les 4 composantes qui coupent L_x intervient dans le calcul. Il y a une valeur de ce birapport pour laquelle les graphes $\tilde{\Gamma}_i$ obtenus sont différents des graphes obtenus pour la valeur générique.

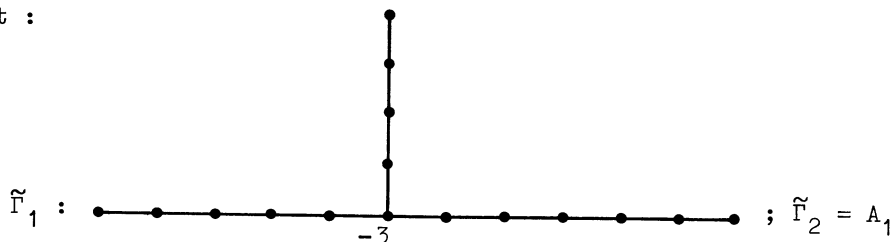
5.4.- Dans l'exemple suivant (singularité sandwich primitive non minimale) on obtient un graphe $\tilde{\Gamma}_1$ qui possède davantage de sommets que le graphe Γ de départ. On considère le développement en fraction continue suivant (cas d'un seul exposant de Puiseux, voir § 3.12)

$$19/13 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5+1} \quad ; \quad a = 7.$$



(les poids non indiqués sont tous -2).

La surface $\tilde{S}$ possède deux singularités dont les graphes associés sont :



(L'idéal I associé à $\tilde{\Omega}^2$ est de la forme (u_0, v_0^5) en un point lisse de la composante L_x , où x est le sommet de branchement de Γ).

Les exemples 5.3 et 5.4 sont calculés en utilisant le lemme 4.2.6 et en faisant un calcul local aux points de croisement.

Bibliographie

- [A₁] M. Artin : "On isolated rational singularities of surfaces", (Amer. J. of Math., vol. 88 (1966), p. 129-136).
- [A₂] M. Artin : "Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces", (Amer. J. of Math., vol. 84 (1962), p. 485-496).
- [G₁] G. Gonzalez-Sprinberg : "Eventails en dimension deux et transformé de Nash", (Publ. de l'E.N.S., 1977, 67 p.).
- [G₂] G. Gonzalez-Sprinberg : "Résolution de Nash des points doubles rationnels", (Ann. Inst. Fourier, 32, 2 (1982), p. 111-178)
- [H] H. Hironaka : "On Nash Blowing-up", (Arithmetic and Geometry II, Birkhäuser, 1983, p. 103-111).
- [La] H. Laufer : "Normal two dimensional singularities", (Princeton Univ. Press, 1971).
- [Li] J. Lipman : "Rational singularities with applications to algebraic surfaces and unique factorization", (Publ. Math. IHES, vol. 36 (1969), p. 195-279).
- [L-T] D.T. Lê et B. Teissier : "Variétés polaires locales et classes de Chern de variétés singulières", (Ann. of Maths. 114 (1981), p. 457-491).
- [M] R. MacPherson : "Chern classes for singular algebraic varieties", (Annals of Maths., vol. 100, n° 2 (1974), p. 423-432).

- [N] A. Nobile : "Some properties of the Nash blowing-up", (Pacific J. Math., vol. 60 (1975), p. 297-305).
- [P] R. Piene : "Polar classes of singular varieties", (Ann. Sci. E.N.S., t. 11 (1978), p. 247-276)
- [R] V. Rebassoo : "Desingularisation properties of the Nash Blowing-up process", (Thèse, Univ. of Washington, 1977).
- [S] M. Spivakovsky : "Sandwiched surface singularities and the Nash resolution for surfaces", (Thèse, Harvard Univ., 1985).
- [Z₁] O. Zariski : "Polynomial ideals defined by infinitely near base points", (Amer. J. Math., 60 (1937), p. 151-204).
- [Z₂] O. Zariski and P. Samuel : "Commutative Algebra" Vol. 2, Appendix (Van Nostrand, 1960).
- [Z₃] O. Zariski : "The reduction of the singularities of an algebraic surface", (Ann. of Math., 40 (1939), p. 639-689).

Gerardo GONZALEZ-SPRINBERG
Faculté des Sciences de Tours

et

Centre de Mathématiques
de l'Ecole Normale Supérieure
U.A. 040762
45, rue d'Ulm
75230 Paris Cédex 05