XAVIER FERNIQUE

Fonctions aléatoires gaussiennes, les résultats récents de M. Talagrand

Astérisque, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki, exp. n° 660, p. 177-186

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__177_0>

Séminaire BOURBAKI
38ème année, 1985-86, n° 660

Février 1986

FONCTIONS ALÉATOIRES GAUSSIENNES, LES RÉSULTATS RÉCENTS DE M. TALAGRAND

par Xavier FERNIQUE

Michel Talagrand a obtenu des caractérisations relativement simples des fonctions aléatoires gaussiennes à trajectoires régulières ; il a également construit des représentations de ces fonctions aléatoires. Cet exposé est consacré à ses deux théorèmes principaux qu'il a énoncés dans deux notes référencées ici Talagrand 85.1 et 85.2.

Dans une première partie, nous introduisons les notions utilisées et leurs notations en rappelant l'état précédent du problème. La seconde partie expose les résultats de Talagrand et une partie des preuves ; la troisième partie en esquisse des applications.

1. RAPPELS ET NOTATIONS

1.1. Une *fonction aléatoire gaussienne* centrée (f.a.g) sur un ensemble T est une famille $X = \{X(\omega,t)\ ,\omega\in\Omega\ , t\in T\} = \{X(t)\ , t\in T\}$ d'applications mesurables d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ dans $\mathbb{R}$ indexée par T et telle que pour tout élément y de $\mathbb{R}^T$ à support fini, $\Sigma\, y(t)X(t)$ soit une variable aléatoire gaussienne centrée usuelle ; on a donc

1.1.1. $$E\exp\{i\,\Sigma\, y(t)X(t)\} = \exp\{-\tfrac{1}{2}E|\Sigma y(t)X(t)|^2\}\ ,$$
$$E|\,\Sigma\, y(t)X(t)\,|^2 = \Sigma y(s)y(t)\Gamma(s,t)\ ,$$

où Γ est une fonction de type positif sur $T\times T$ qui est *la covariance* de X dont elle détermine *la loi* μ sur $\mathbb{R}^T$.

La donnée d'une f.a.g X sur un ensemble T y définit une structure métrique : sur $T\times T$, on pose

1.1.2. $$d_X(s,t) = \|X(s)-X(t)\|_{L^2} = [E\,|X(s)-X(t)|^2]^{1/2} = [\Gamma(s,s)-2\Gamma(s,t)+\Gamma(t,t)]^{1/2}\ ,$$

on oublie l'indice X sauf risque de confusion. L'espace (T,d) est alors un espace *pseudo*-métrique (d ne sépare pas nécessairement T ; pour alléger, nous oublierons pourtant le préfixe) et les conditions de régularité de X sont à chercher en termes de cette métrique ; en effet si deux f.a.g. X_1 et X_2 définissent la même distance d, il existe une v.a. gaussienne λ telle que $\{X_1(t)+\lambda, t\in T\}$ ait même loi que X_2 de sorte que X_1 et X_2 ont mêmes régularités. Pour des raisons techniques, *nous supposerons que* (T,d) *est séparable.*

1.2. On appelle *trajectoire* de ω l'application $t \longrightarrow X(\omega,t)$ de T dans $\mathbb{R}$. L'étude de la régularité des trajectoires présente la difficulté suivante : si S est une partie non dénombrable de T et F une partie stricte de $\mathbb{R}$ fermée non vide, l'ensemble $\{x\in\mathbb{R}^T : \forall t\in S, x(t)\in F\}$ n'est pas mesurable dans $\mathbb{R}^T$ et en général $\{\omega : \forall t\in S, X(\omega,t)\in F\}$ n'est pas mesurable dans Ω. Il existe pourtant, (T,d) étant séparable, une classe large de f.a.g X pour lesquelles cet ensemble est mesurable dans $(\Omega,\mathcal{A})$ pour tout S ouvert dans T et vérifie :

1.2.1 $$P\{\forall t\in S, X(t)\in F\} = \mu^*\{x\in\mathbb{R}^T : \forall t\in S, x(t)\in F\},$$

ce sont *les f.a.g. séparables* auxquelles nous restreignons l'exposé. Nous étudions la régularité d'une f.a.g. séparable X au sens suivant : *chercher à reconnaître sur* d_X *si les propriétés ci-dessous sont vérifiées :*

1.2.2. *Presque sûrement les trajectoires de* X *sont bornées sur* T,

1.2.3. *Presque sûrement les trajectoires de* X *sont bornées et uniformément continues sur* (T,d_X).

Ce problème a déjà fait l'objet de l'exposé 470 de ce Séminaire : Paul-André Meyer en présentait la solution dans le cas où X est stationnaire ; cette solution partielle utilise certaines caractéristiques de (T,d).

1.3. Nous notons $d(T)$ le diamètre de T ; $B(t,\delta)$ sera la boule fermée de centre t et de rayon δ ; $M(\delta)$ sera le cardinal maximal d'un sous-ensemble S de T qui soit δ-distinguable pour d (i.e. $\forall(s,t)\in S\times S, s=t$ ou $d(s,t)>\delta$); l'espace (T,d) est *homogène* si pour tout couple (s,t) d'éléments de T, il existe une isométrie appliquant s sur t. Nous énonçons, sous forme réduite, le théorème caractérisant la régularité des f.a.g. stationnaires :

THÉORÈME 1.3.- 1) *Si l'intégrale* $\int_0^{d(T)} \sqrt{\operatorname{Log} M(x)}\,dx$ *est finie, alors la f.a.g. séparable* X, *stationnaire ou non, est p.s. à trajectoires bornées et uniformément continues sur* (T,d) (Dudley, 67).

2) *Inversement, si* (T,d) *est homogène et si* X *est p.s. à trajectoires bornées sur* T, *alors l'intégrale* $\int \sqrt{\operatorname{Log} M(x)}\,dx$ *est finie. En conséquence, si* (T,d) *est homogène, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

$$(1.2.2),\ (1.2.3),\ (1.3.3 : \int \sqrt{\operatorname{Log} M(x)}\,dx < \infty)\ .\ \text{(Fernique, 74)}$$

Ce théorème a fait l'objet, depuis 10 ans, de nombreuses extensions et applications, par exemple en théorie des espaces de Banach et en Analyse harmonique (cf. Marcus et Pisier, 81), d'où l'intérêt en vue d'applications plus larges d'une caractérisation analogue pour la régularité de toutes les f.a.g. séparables.

1.4. Des résultats partiels

Au début de 1985, les données initiales étaient les suivantes :

1) X a p.s. des trajectoires bornées si et seulement si $E\sup_T X$ est fini ; X a p.s. des trajectoires uniformément continues sur (T,d) si et seulement si la limite $\lim_{\delta\to 0} E\{\sup[|X(s)-X(t)|, d(s,t)\le\delta]\}$ est nulle (Fernique, Landau et Shepp, 70).

2) Les propriétés 1.2.2 et 1.2.3 ne sont pas équivalentes (Dudley, 67).

3) Aucune des propriétés 1.2.2 et 1.2.3 n'est équivalente à 1.3.3 (Dudley, 73); la propriété 1.2.2 implique que $\delta^2 \operatorname{Log} M(\delta)$ est borné ; la propriété 1.2.3 implique que $\delta^2 \operatorname{Log} M(\delta)$ tend vers zéro avec δ (Dudley, Sudakov, 73).

L'étude nécessitait donc l'utilisation de nouvelles caractéristiques de (T,d); elles ont été introduites à partir des travaux de Preston (71, 72).

1.4.4. *Notations* : nous notons G l'ensemble des applications $g :]0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continues et strictement décroissantes telles que $g(1) = 0$ et $g(uv) \le g(u)+g(v)$; nous notons g_0 la fonction $\sqrt{\operatorname{Log}\frac{1}{(\cdot)}}$, c'est un élément de G ; Talagrand utilise uniquement g_0. Pour tout espace métrique $\mathcal{U}$, d désignera la distance, $M(\mathcal{U})$ sera l'ensemble des probabilités sur $(\mathcal{U},d)$ muni de la topologie étroite. Pour tout couple (g,m) de $G\times M(\mathcal{U})$, nous posons :

$$a(g,m) = \sup\left\{\int g[m(B(t,x))]dx, t\in\mathcal{U}\right\},$$
$$a(g,\mathcal{U}) = \inf\{a(g,m), m\in M(\mathcal{U})\},$$
$$\bar{a}(g,\mathcal{U}) = \inf\left\{a(h,\mathcal{U}), h\in G, h\ge g, \lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{g(x)} = +\infty\right\}.$$

Le résultat partiel suivant justifie ces notations et constitue la première étape et le prototype du résultat principal de Talagrand ; la lettre C désigne ici et dans la suite des constantes absolues.

THÉORÈME (1.4.5.).- *Pour que* X *ait p.s. des trajectoires bornées, il suffit que :*

1.4.5.1.
$$a(g_0,T) < \infty$$

on a alors :

$$E\sup_T X \le C\, a(g_0,T).$$

(1.4.6.) *Pour que* X *ait p.s. des trajectoires bornées et uniformément continues, il suffit que :*

1.4.6.1.
$$\bar{a}(g_0,T) < \infty.$$

(1.4.7) *Supposons que* X *vérifie la condition suivante :*

Il existe un espace ultramétrique $\mathcal{U}$, *une application* ψ *de* $\mathcal{U}$ *sur* T *et* *un nombre fini* M *tels que :*

$$\forall (s,t) \in U \times U,\ d(\psi(s),\psi(t)) \leq d(s,t) \leq M d(\psi(s),\psi(t))\ ;$$

sous cette condition, les propriétés 1.2.2 *et* 1.4.5.1 *sont équivalentes, de même les propriétés* 1.2.3 *et* 1.4.6.1. *; on a alors :*

$$a(g_0,T) \leq C M E \sup_T X\ . \qquad \text{(Fernique, 74, 80)}$$

En fonction de ces énoncés, on conjecturait sans trop y croire (conjectures des mesures majorantes) que les équivalences ci-dessus étaient générales.

1.4.8. *Remarque.*- Au sens grossier, la condition 1.3.3 est claire ; elle exige que pour x assez grand, $M(x)$ vaille 1 et donc que $d(T)$ soit fini ; elle exige aussi que le nombre des petites boules disjointes ne soit pas trop grand, que (T,d) soit précompact. Les conditions 1.4.5.1 et 1.4.6.1. sont du même type ; elles impliquent l'existence de probabilités pour lesquelles aucune petite boule n'a de mesure trop petite ; le nombre des petites boules disjointes n'est donc pas trop grand : (T,d) est précompact et g contrôle sa précompacité ; c'est nécessaire pour la régularité des trajectoires (cf. 1.4.3). La proposition suivante montre la maniabilité des quantités $a(g,m)$, $a(g,U)$, $\bar{a}(g,U)$.

1.4.9. PROPOSITION.- *Soit* g *un élément de* G, *alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1) *L'application* $(t,m) \longrightarrow \int g[m(B(t,x))]dx$ *est s.c.i. sur* $U \times M(U)$*; de même l'application* $m \longrightarrow a(g,m)$ *est s.c.i. sur* $M(U)$.

2) *Pour toute partie* S *de* U, *on a :* $a(g,S) \leq 2a(g,U)$ *et même* $a(g,S) \leq a(g,U)$ *si* U *est ultramétrique ; en particulier* $d(U) \leq 2a(g,U)/g(1/2)$.

3) *Si* $(S_n, n \in \mathbb{N})$ *est une suite croissante de parties de* U *de réunion dense, alors on a :* $\lim a(g,S_n) \leq 2a(g,U) \leq 2 \lim a(g,S_n)$ *; si* S *est dense dans* U, *on a :* $a(g,S) = a(g,U)$.

4) *Supposons qu'il existe au moins un élément* h *de* G *tel que* $\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{g(x)} = +\infty$ *; alors* $\bar{a}(g,U)$ *est fini si et seulement si il existe une probabilité* m *sur* U *telle que :*

$$a(g,m) < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{\delta\to 0} \sup_{t\in U} \int_0^\delta g[m(B(t,x))]dx = 0\ .$$

5) *Soient* U *et* T *deux espaces métriques et* ψ *une contraction de* U *dans* T, *alors*

$$a(g,\psi(U)) \leq a(g,U)\ .$$

2. LES RÉSULTATS FONDAMENTAUX DE TALAGRAND

2.0. Pour résoudre les conjectures ci-dessus, Talagrand les ramène à un problème d'évaluation : *Trouver une constante absolue* C *telle que pour tout f.a.g.* X *sur tout ensemble* fini T *(muni de la distance* $d = d_X$ *), on ait :*

2.0.1. $$a(g_0,T) \le C\,E \sup_T X \ .$$

Pour établir l'évaluation ci-dessus, Talagrand utilise la solution partielle 1.4.7 en approchant l'espace (T,d) par des espaces ultramétriques adéquats :

THÉORÈME 2.1.- *Il existe une constante absolue* C *telle que pour tout espace métrique fini* T *et tout élément* g *de* G *, il existe un espace ultramétrique* $\mathcal{U}$ *, une bijection contractante* ψ *de* $\mathcal{U}$ *sur* T *, un espace ultramétrique* S *et une application* φ *de* S *dans* T *tels que :*

$$\forall (s,t) \in S \times S\ ,\ d(\varphi(s),\varphi(t)) \le d(s,t) \le C\, d(\varphi(s),\varphi(t))\ ,$$

$$d(\mathcal{U}) \le d(T)\ ,$$

$$a(g,\mathcal{U}) \le C\, a(g,S) \le C^2\, a(g,T)\ . \qquad \text{(Talagrand 85.1)}$$

Si l'espace T n'est pas fini, on ne sait pas l'approcher efficacement par des espaces ultramétriques (sauf si $\bar{a}(g,T)$ est fini). Le théorème 2.1 a pourtant le corollaire suivant, suffisant pour les applications :

COROLLAIRE 2.1.1.- *Il existe une constante absolue* C *telle que pour tout élément* g *de* G *et tout espace métrique* T *, il existe une probabilité discrète* m *sur* T *telle que :*

$$\sup_{t\in T} \int g\left\{\sup_{d(s,t)\le x} m\{s\}\right\} dx \le C\, a(g,T)\ . \qquad \text{(Talagrand 86)}$$

Nous ne démontrerons pas le théorème 2.1, renvoyant au prochain article de Talagrand ; la preuve résulte d'applications itératives de la proposition :

PROPOSITION 2.1.5.- *Soient* g *un élément de* G *et* T *un espace métrique fini ; soit de plus* $(T_k, k\in[1,n])$ *un recouvrement de* T *; il existe alors un index partiel non vide* $K \subset [1,n]$ *tel que*

$$a(g,T) \le \inf\{a(g,T_k), k \in K\} + 2d(T)g(1/1+\mathrm{Card}\ K)\ .$$

2.2. Applications à la régularité des fonctions aléatoires gaussiennes

THÉORÈME 2.2 (Talagrand, 85.1).- *Soient* T *un ensemble et* X *une f.a.g. séparable sur* (T,d_X) *; dans ces conditions :*

1) *Pour que* X *soit p.s. à trajectoires bornées, il faut et il suffit que* $a(g_0,T)$ *soit fini.*

2) *Pour que* X *soit p.s. à trajectoires bornées et uniformément continues,*

il faut et il suffit que $\bar{a}(g_o,T)$ *soit fini.*

Nous démontrons seulement la première partie du théorème. Tenant compte de 1.4.5, il suffit de montrer que si X est p.s. à trajectoires bornées, alors $a(g_o,T)$ est fini. Soit alors T' une partie finie de T ; utilisant les éléments U,ψ,S,φ liés à T' et g_o par le théorème 2.1, on obtient par 1.4.9.5 :

$$a(g_o,T') = a(g_o,\mathcal{U}(\psi)) \leq a(g_o,\mathcal{U}) \ ;$$

le théorème 2.1 et l'énoncé 1.4.7 fournissent :

$$a(g_o,\mathcal{U}) \leq C\ a(g_o,S) \leq C\,E \sup_S X\circ\varphi$$

et par suite en utilisant 1.4.1 et 1.4.9.3

$$a(g_o,T) \leq \sup_{T'} a(g_o,T') \leq C\,E\sup_T X < \infty \ ,$$

c'est le résultat.

2.3. Représentations régulières de fonctions aléatoires gaussiennes régulières

2.3.0. Soit (Y_n) une suite de v.a. gaussiennes centrées ; en utilisant par exemple l'inégalité de Jensen, on constate que $E\sup_{\mathbb{N}}|Y|$ se majore par $3\sup|E\,Y_n^2\,\mathrm{Log}(n+1)|^{1/2}$; on en déduit que si la suite $(E\,Y_n^2\,\mathrm{Log}(n+1))$ est bornée ou tend vers zéro, alors la suite (Y_n) a p.s. la même propriété. Dans sa note aux Comptes Rendus (85.2), Talagrand montre que la régularité de toute f.a.g. peut être déduite de la régularité d'une telle suite :

THÉORÈME 2.3.- *Soient* T *un ensemble et* X *une f.a.g. séparable sur* (T,d_X) ; *pour que* X *ait p.s. ses trajectoires bornées, il faut et il suffit qu'il existe une suite* (Y_n) *de v.a. gaussiennes centrées et une suite* (a_n) *d'applications de* T *dans* $\mathbb{R}$ *telles que :*

2.3.1. $$\sup_{t\in T}\sum_{n=1}^{\infty}|a_n(t)| \leq 1 \ ,$$

2.3.2. $$\sup_{n\geq 1} E\,Y_n^2\,\mathrm{Log}(n+1) < \infty \ ,$$

2.3.3. $$\forall t\in T \ , \quad P\{X(t) = Y_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)Y_n\} = 1 \ .$$

De plus, on peut choisir la suite (Y_n) *telle que :*

2.3.4. $$\sup_{n\geq 1} E\,Y_n^2\,\mathrm{Log}(n+1 \leq C(E\sup_T X)^2 \ ,$$

2.3.5. $$\forall n \geq 1 \ , \quad \exists (c,t,t') \in \mathbb{R}^+\times T\times T : Y_n = c(X(t)-X(t')) \ ,$$

2.3.6. $$\exists t \in T : Y_o = X(t) \ .$$

Enfin, pour que X *ait de plus p.s. des trajectoires uniformément continues sur*

(T,d) , *il faut et il suffit qu'on puisse choisir la suite* (Y_n) *vérifiant aussi* :

2.3.7. $$\lim_{n\to\infty} E\,Y_n^2 \operatorname{Log}(n+1) = 0 .$$

Démontrons la nécessité des conditions indiquées ; supposons que X ait p.s. des trajectoires bornées (resp. bornées et uniformément continues), alors le théorème 2.3 et le corollaire 2.1.4 fournissent une probabilité m et une suite (s_n), $n \geq 1$, d'applications de T dans T telles que :

$$\forall n \geq 1 ,\ d(t,s_n(t)) \leq d(T)/2^n \,;\ \forall t \in T ,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(T)}{2^n}\left[g\left[\frac{m(s_n(t))}{2^n}\right] + g\left[\frac{m(s_{n-1}(t))}{2^{n-1}}\right]\right] \leq C\,E\sup_T X ,$$

où g est égal à g_o (resp. g est un élément de G vérifiant $g \geq g_o$ et $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{g_o(x)} = +\infty$). Nous notons s_o l'application de T sur l'un de ses éléments ; pour tout élément t de T , nous formons la série $X(s_o) + \sum_{n=1}^{\infty} [X(s_n(t)) - X(s_{n-1}(t))]$ qui converge en probabilité vers $X(t)$. Pour tout $n \geq 1$ et tout couple $\sigma = (s,s') \in s_n(T) \times s_{n-1}(T)$, nous posons :

2.3.8. $$Y(\sigma) = \frac{X(s) - X(s')}{g\left(\frac{m(s)}{2^n}\right) + g\left(\frac{m(s')}{2^{n-1}}\right)}\ \frac{2^{n-1}}{3d(T)}\ C\,E\sup_T X ,$$

la série précédente s'écrit alors :

2.3.9. $$X(s_o) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\,Y(s_n(t),s_{n-1}(t)) ,$$

où $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n(t)|$ est majoré par 1 . Nous allons évaluer $E\,Y^2(\sigma)$ et montrer que les représentations annoncées résultent d'un simple réarrangement de la série 2.3.9.

Nous posons $K = C\,E\sup_T X$, alors la relation 2.3.8 fournit :

$$\forall n \geq 1 ,\ \forall \sigma \in (s_n , s_{n-1})(T) ,\ E\,Y^2(\sigma) \leq \frac{K^2}{g^2\left(\frac{m(s)}{2^n}\right) + g^2\left(\frac{m(s')}{2^{n-1}}\right)} \leq \frac{K^2}{g^2(1/2)} \ ;$$

pour tout $A > 0$, puisque m est une probabilité, on a par suite :

$$\# \{\sigma \in (s_n , s_{n-1})(T) \ :\ E\,Y^2(\sigma) \geq A^2\} \leq \frac{1}{2^{2n} h^2(K/A)}$$

où h est la fonction réciproque de g . En sommant, on déduit :

$$\# \{\sigma \in \bigcup_{n\geq 1} (s_n , s_{n-1})(T) \ :\ E\,Y^2(\sigma) \geq A^2\} \leq \frac{1}{h^2(K/A)} \ ;$$

on numérote alors l'ensemble $\{\sigma\}$ suivant un ordre (σ_n) décroissant pour $E\,Y^2(\sigma)$; on obtient

$$E\,Y^2(\sigma_1) \leq \frac{K^2}{g^2(1/2)} \quad \text{et} \quad \forall n > 1 \ ,\ E\,Y^2(\sigma_n) \leq \frac{K^2}{g^2(1/\sqrt{n})}$$

la nature de g montre alors (cf. 2.3.0) que la série 2.3.9 est p.s. absolument convergente vers $X(t)$ et que son rérrangement suivant l'ordre de (σ_n) vérifie les propriétés 2.3.1 à 2.3.6 et aussi 2.3.7 si $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{g_o(x)} = +\infty$. La nécessité des conditions est donc établie.

Inversement, sous les conditions 2.3.1 à 2.3.3, la suite (Y_n) est p.s. bornée, de sorte que pour toute partie finie S de T, on a :

$$E \sup_S X \leq \sup_{t \in S} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(t)| \; E \sup_{n \geq 1} |Y_n| \leq 3 \sup_{n \geq 1} [E Y_n^2 \operatorname{Log}(n+1)]^{1/2} ,$$

et la séparabilité de X montre (cf. 1.2.1) qu'elle a p.s. ses trajectoires bornées ; ceci est simple, par contre l'hypothèse supplémentaire 2.3.7 exige une attention particulière ; le schéma ci-dessus permet en effet de montrer dans ce cas que la série $\Sigma a_n Y_n$ est p.s. uniformément convergente sur T, mais les coefficients a_n varient brutalement et les sommes partielles peuvent ne pas être continues sur T. Il faut alors utiliser d'autres propriétés gaussiennes pour montrer que X a p.s. ses trajectoires uniformément continues sur T.

3. APPLICATIONS DES THÉORÈMES DE TALAGRAND

Dès maintenant, les théorèmes précédents ont trouvé des applications probabilistes ou vectorielles.

3.1. Applications probabilistes

Une *fonction aléatoire sous-gaussienne* sur un ensemble T est une fonction aléatoire X telle qu'il existe un nombre τ et une f.a.g. G sur T tels que :

$$\forall (\lambda, s, t) \in \mathbb{R} \times T \times T, E \exp [\lambda(X(s) - X(t))] \leq \exp \tau \lambda^2 E |G(s) - G(t)|^2 ;$$

Les théorèmes de Talagrand montrent que si X est séparable sur (T, d_G) et si G est p.s. à trajectoires bornées (resp. bornées et uniformément continues sur (T, d_G)), alors $a(g_o, T)$ (resp. $\bar{a}(g_o, T)$) est fini et cela suffit pour que X ait la même propriété de régularité ; Talagrand démontre qu'il existe une constante absolue C telle que :

$$E \sup_T X \leq C \tau^{1/2} E \sup_T G .$$

Les théorèmes de Talagrand permettent aussi de caractériser les lois des vecteurs gaussiens à valeurs dans les espaces de Banach séparables et d'en donner d'excellentes représentations (Talagrand, 85.2) ; ce sont en effet des f.a.g. continues sur la boule unité de l'espace dual.

3.2. Applications vectorielles

Soit E un espace de Banach séparable de type 2, on sait qu'une forme quadratique Q sur E' est la covariance d'un vecteur gaussien à valeurs dans E si et seulement si il existe une suite (x_n) d'éléments de E tels que :

$$\forall y \in E' , \quad Q(y,y) = \Sigma \langle x_n, y \rangle^2 , \quad \Sigma \|x_n\|^2 < \infty ;$$

les théorèmes de Talagrand permettent donc des caractérisations alternatives de cette propriété à partir de $\bar{a}(g_0,E_1')$ où E_1' est muni de la distance définie par Q ; ils permettent aussi des représentations de ces formes quadratiques. Cette étude s'applique en particulier aux opérateurs de Hilbert-Schmidt sur les espaces de Hilbert ; elle s'étend aussi aux opérateurs de type 2.

3.3. *Remarque*.- Les théorèmes de régularité des f.a.g. stationnaires ont connu (cf. Marçus et Pisier, 81) des extensions à des f.a.g. stationnaires non gaussiennes obtenues par mélange aléatoire de f.a.g. stationnaires. Ces extensions utilisent essentiellement le fait que pour toute f.a.g. stationnaire X, sur $\mathbb{R}$ par exemple, la quantité $a(g_0,[0,1])$ se calcule à partir de la seule mesure de Lebesgue normalisée m_0. Cette simplification n'a pas d'analogue pour le maniement des mélanges aléatoires des f.a.g. non stationnaires ; ceci réduit sensiblement pour l'instant le champ des applications directes des théorèmes de Talagrand et ouvre ce même champ à la recherche.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R.M. DUDLEY 67 - *The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of gaussian processes*, J. Functional Analysis, 1(1967), 290-330.

[2] R.M. DUDLEY 73 - *Sample functions of the gaussian process*, Ann. of Prob. 1 (1973), 66-103.

[3] X. FERNIQUE 70 - *Intégrabilité des vecteurs gaussiens*, C.R. Acad. Sci., Paris A 270, 1698-1699.

[4] X. FERNIQUE 74 - *Des résultats nouveaux sur les processus gaussiens*, C.R. Acad. Sci., Paris, A 278, 363-365.

[5] X. FERNIQUE 78 - *Caractérisation de processus à trajectoires majorées ou continues*, Lectures Notes in Mathematics, 649(1978), 691-706.

[6] X. FERNIQUE 80 - *Mesures majorantes, majoration et continuité de fonctions aléatoires, exemples de construction*, Lecture Notes in Mathematics, 860 (1981), 124-137.

[7] H.J. LANDAU et L.A. SHEPP 70 - *On the supremum of a gaussian process*, Sankhya, A, 32(1971), 369-378.

[8] M.B. MARCUS et G. PISIER 81 - *Random Fourier series with applications to harmonic analysis*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1981.

[9] P.-A. MEYER 75 - *Régularité des processus gaussiens [d'après X. Fernique]*, Sém. Bourbaki 1974-75, exposé n° 470, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 514(1976), 256-266.

[10] C. PRESTON 71 - *Banach spaces arising from some integral inequalities*, Indiana U. Math. J. 20(1971), 997-1015.

[11] C. PRESTON 72 - *Continuity properties of some gaussian processes*, Ann. of Math. Statist. 43(1972), 1, 285-292.

[12] V.N. SUDAKOV 73 - *A remark on the criterion of continuity of gaussian sample functions*, Lectures Notes in Mathematics, 330(1973), 444-454.

[13] M. TALAGRAND 85.1 - *Régularité des processus gaussiens*, C.R. Acad. Sci. Paris, 301, Série I, 1985, 379-381.

[14] M. TALAGRAND 85.2 - *La description des processus gaussiens bornés*, C.R. Acad. Sci. Paris, 301, Série I, 1985, 751-753.

[15] M. TALAGRAND 86 - Article en cours de rédaction.

On pourra aussi trouver des exemples d'utilisation des mesures majorantes dans les références suivantes :

[16] B. HEINKEL - *Mesures majorantes et théorème de la limite centrale dans* C(S),Z., Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 38(1977), 339-351.

[17] B. HEINKEL - *Majorizing measures and limit theorems for* c_0*-valued random variables*, Lectures Notes in Mathematics, 990(1983), 136-149.

[18] D. JUKNEVIČIENE - *Sur la condition de mesure majorante pour le théorème limite dans* C[0,1] , Lietuvos Matematikos Rinkinys, à paraître.

[19] C. NANOPOULOS, P. NOBELIS - *Étude de la régularité des fonctions aléatoires et de leurs propriétés limites*, Lecture Notes in Mathematics, 649(1977), 567-590.

[20] M. WEBER - *Analyse infinitésimale de fonctions aléatoires*, Lecture Notes in Mathematics, 976(1981), 384-476.

Xavier FERNIQUE

Université Louis Pasteur
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Laboratoire associé au CNRS
rue du Général Zimmer
F-67084 STRASBOURG CEDEX