FRÉDÉRIC PHAM

Introduction à la résurgence quantique

Astérisque, tome 145-146 (1987), Séminaire Bourbaki,
exp. nº 656, p. 103-110
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1985-1986__28__103_0>

Séminaire BOURBAKI Novembre 1985
38ème année, 1985-86, n° 656

INTRODUCTION À LA RÉSURGENCE QUANTIQUE
[d'après Écalle et Voros]

par Frédéric PHAM

Le *calcul différentiel étranger* d'Écalle est une méthode systématique d'étude des ambiguïtés du procédé de resommation de Borel des séries divergentes, pour une classe très générale de séries formelles appelées "*fonctions résurgentes*". Parmi les nombreux problèmes auxquels cette théorie s'applique (*cf.* notamment [1][2][3]), l'un m'intéresse plus particulièrement : il s'agit des conjectures de Voros ([4]) sur la "méthode semi-classique exacte" (*réf* : Écalle, article en préparation annoncé dans le premier article de [1], et notes manuscrites et exposés informels...).

1. RUDIMENTS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ÉTRANGER

1.1. Les trois "modèles" de fonctions résurgentes

Considérons une série formelle

(1) $$f(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^{-n} \qquad (a_n \in \mathbb{C})$$

dont la "*transformée de Borel*"

(2) $$\varphi(\zeta) = \sum_{n\geq 1} a_n \zeta^{n-1}/(n-1)!$$

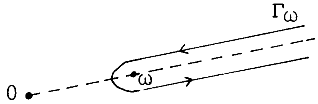
converge au voisinage de l'origine et "*se prolonge sans fin*" sur $\mathbb{C}$ (avec pour seules singularités des points de ramification : *cf.* intermède ci-après).
On peut alors définir la somme de la série (1) par la formule intégrale

(3) $$f(z) = \int_0^\infty e^{-z\zeta}\varphi(\zeta)\,d\zeta$$

(pourvu que φ croisse moins vite qu'une exponentielle à l'infini).
En fait, si le chemin d'intégration de (3) est une demi-droite d'argument ϑ qui évite les points de ramification de φ, l'intégrale (3) est analytique dans le demi-plan $-\vartheta-\frac{\pi}{2}<\operatorname{Arg} z<-\vartheta+\frac{\pi}{2}$. En faisant tourner la demi-droite d'intégration, on définit ainsi par (3) une collection de fonctions analytiques dans divers secteurs angulaires (d'ouverture éventuellement $>2\pi$: par exemple un secteur d'ouverture 3π si φ n'a qu'un seul point singulier). Ces secteurs angulaires se chevauchent, et par Cauchy la différence des deux déterminations de f correspon-

dant à deux secteurs consécutifs est une somme d'intégrales du type

(4) $$f_\omega(z) = \int_{\Gamma_\omega} e^{-z\zeta}\,\varphi(\zeta)\,d\zeta \qquad (cf.\ \text{figure}).$$



(ω = point de ramification de φ).

Sous l'hypothèse que ω est un point de ramification *logarithmique* de φ, c'est-à-dire

(5) $$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\,\varphi_\omega(\zeta-\omega)\,\mathrm{Log}(\zeta-\omega) + \psi_\omega(\zeta-\omega)$$

(avec φ_ω et ψ_ω holomorphes au voisinage de 0), l'intégrale (4) s'écrit encore après translation de la variable d'intégration

(6) $$f_\omega(z) = e^{-\omega z}\int_0^\infty e^{-z\zeta}\,\varphi_\omega(\zeta)\,d\zeta\ .$$

On voit donc que les ambiguïtés du procédé de resommation de Borel sont des exponentiellement petits multipliés par des intégrales de même type que (3), avec φ remplacée par sa "*singularité*" φ_ω (eq. (5)).

En fait, il n'est pas très commode de n'admettre pour φ que des points de ramification logarithmiques : on admettra aussi des *pôles simples*, en convenant que la "singularité" de φ en un pôle simple est

$$(2\pi i)\ \mathrm{res}_\omega\,\varphi\,.\,\delta$$

où δ est la "microfonction de Dirac", qui s'interprète moralement comme la transformée de Borel de 1 :

$$1 = \int_0^\infty e^{-z\zeta}\,\delta(\zeta)\,d\zeta\ .$$

Récapitulons : nous avons considéré 3 types de "fonctions", constituant ce qu'Écalle appelle les "3 *modèles de fonctions résurgentes*" :

1) *le modèle formel* : il s'agit des séries formelles

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad \text{(notez la présence du terme } a_0\text{)}$$

dont la transformée de Borel $a_0\delta + \varphi(\zeta)$ appartient au second modèle :

2) *le modèle convolutif* : il s'agit des "fonctions" $a_0\delta + \varphi(\zeta)$ telles que φ soit un germe en 0 de fonction holomorphe prolongeable sans fin (*cf.* intermède ci-après), avec pour seules singularités des points de ramification logarithmique auxquels peuvent se superposer des pôles simples ;

3) *le modèle sectoriel* : ses éléments sont des collections de fonctions définies dans des secteurs du plan des z par des transformées de Laplace (3) de fonctions de type 2).

Remarquons que *le modèle formel contient en principe toute l'information*, mais qu'en pratique c'est dans le modèle convolutif que se fait le travail. Chacun des trois modèles constitue une algèbre notée $\mathbb{A}_1$, dans laquelle la loi de multiplication est la multiplication usuelle pour les modèles formel et sectoriel, et la convolution pour le modèle 2).

N.B. On peut aussi définir des algèbres plus vastes que $\mathbb{A}_1$, en autorisant des pôles d'ordre > 1 ou même en considérant des microfonctions "ramifiées à l'origine".

1.2. Dérivations étrangères

A tout $\omega \in \mathbb{C}^*$ (plan complexe des ζ), Écalle associe une application Δ_ω de $\mathbb{A}_1$ dans elle-même, qui a la vertu d'être une *dérivation* de cette algèbre. Cette application correspond en gros à la "*prise de singularité*" dans le modèle convolutif (passage de φ à φ_ω dans l'équation (5)). Mais il faut prendre garde de préciser le chemin de prolongement analytique choisi pour définir la détermination de φ dans (5). De façon précise :

1) si le chemin *rectiligne* joignant 0 à ω ne rencontre pas d'autres singularités de φ , $\Delta_\omega\varphi$ est la singularité en ω du prolongement le long de ce chemin ;

2) si ce chemin rectiligne rencontre d'autres singularités, on contourne celles-ci de toutes les façons possibles (par la droite ou par la gauche, mais sans jamais revenir en arrière), et l'on définit $\Delta_\omega\varphi$ comme une somme pondérée des singularités en ω des diverses déterminations de φ ainsi obtenues, avec le coefficient de pondération $\frac{p!q!}{(p+q+1)!}$ où p [resp. q] désigne le nombre de détours par la droite [resp. gauche].

Les dérivations étrangères Δ_ω ne vérifient aucune relation *a priori* : l'algèbre de Lie qu'elles engendrent est *libre* (sur $(\Delta_\omega)_{\omega\in\mathbb{C}^*}$).

L'idée de base du "*calcul différentiel étranger*" est de chercher à reconstruire des fonctions résurgentes à partir des relations vérifiées par leurs dérivées étrangères ("*équations de résurgence*"). Pour cela, on dispose des ingrédients que sont les "*monomes de résurgence*", fonctions résurgentes spéciales vérifiant des équations de résurgence simples.

INTERMÈDE : A PROPOS DE PROLONGEMENT ANALYTIQUE

DÉFINITION.- *Nous dirons qu'un germe de fonction analytique* "se prolonge sans fin" *(Écalle dit : "se prolonge partout sans coupure") si son prolongement analytique sur tout* $\mathbb{C}$ *ne se heurte qu'à des obstacles* isolés, *c'est-à-dire :*

si le prolongement analytique le long d'un chemin λ *se heurte à un obstacle en* ω , *extrémité de* λ , *la détermination obtenue à l'abord de* ω *se prolonge analytiquement sur le revêtement universel d'un disque épointé de centre* ω . [1]

Les exemples suivants de fonctions à prolongement sans fin vont jouer un rôle capital dans la suite.

Ex. 1 La "fonction hyperelliptique" $p(q) = \sqrt{W(q)}$, où $W \in \mathbb{C}[q]$.

Ex. 2 La primitive $z(q) = \int_0^q p(q')dq'$ de la fonction précédente.

[1] Cette définition est légèrement plus restrictive que celle d'Écalle.

Ex. 3 La fonction réciproque $q(z)$ de la précédente (on suppose que 0 n'est pas une racine de W).

Comme $p(q)$, la fonction $z(q)$ a pour points de ramifications les racines $q_1, \dots, q_\nu$ de W , que nous supposerons *simples*. L'ensemble des valeurs limites de $z(q)$ en ses points de ramification forme un ensemble Ω_0 que l'on peut engendrer à partir de ν éléments

$$\omega_j = \int_0^{q_j} p(q')dq' \quad \text{(chemins d'intégration choisis arbitrairement, disons rectilignes)}$$

en les translatant par le *réseau des périodes*

$$\Omega = \sum_{i,j} \mathbb{Z}\omega_{ij} \quad , \quad \omega_{ij} = 2(\omega_j - \omega_i) \ .$$

Remarquons que Ω (donc aussi Ω_0) est en général *dense* sur $\mathbb{C}$, ce qui n'empêche pas la fonction $q(z)$ d'être *prolongeable sans fin avec ramification sur* Ω_0 , et *périodique* (en un sens à préciser) *de réseau* Ω !

2. LA MÉTHODE SEMI-CLASSIQUE EXACTE

2.1. Des approximations de physiciens

Considérons l'équation de Schrödinger à une dimension, indépendante du temps

$$(1) \qquad -\hbar^2 \frac{d^2\psi}{dq^2} + (V(q) - E)\psi(q) = 0$$

(q est la coordonnée de position, $V(q)$ la fonction "potentiel", E l'énergie, $\hbar$ la constante de Planck).

Dans la mesure où l'"impulsion $p(q) = \sqrt{E - V(q)}$ varie "lentement" avec q , de sorte que les opérateurs $\frac{d}{dq}$ et $p(q)$ commutent "presque", l'équation (1) se factorise "approximativement" en deux équations du premier ordre

$$(1)' \qquad \frac{d}{dq}\psi_\pm \simeq \pm\, i\hbar^{-1} p(q)\psi_\pm$$

dont les solutions

$$\psi_\pm \simeq \exp \pm i\hbar^{-1} \int_0^q p(q')dq'$$

ont un comportement oscillant dans la zone où $E > V(q)$, les oscillations étant d'autant plus rapides que la constante $\hbar$ est "petite" (c'est à l'échelle de ces oscillations qu'il faut juger de la "lenteur de variation" de $p(q)$).

L'approximation semi-classique ou approximation BKW (Brillouin, Kramer, Wentzel) consiste à chercher à résoudre l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} \psi_\pm^{BKW} = \varphi_\pm \exp \pm i\hbar^{-1} \displaystyle\int_0^q p(q')dq' \\ \text{où} \quad \varphi_\pm = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n^\pm(q)\hbar^n \ . \end{cases}$$

En reportant (2) dans (1), on trouve que les b_n doivent vérifier un système récurrent d'équations différentielles linéaires du premier ordre (les "équations de transport"), singulières aux "*points tournants*" ou points de ramification de la fonction p (zéros de la fonction $V(q)-E$).

On doit donc résoudre deux difficultés :

1) pour q générique, les séries formelles $\varphi_\pm$ ne sont pas convergentes ;

2) comment "faire le raccord" aux points tournants ?

Notons la bizarrerie de la situation dans un voisinage complexe d'un point tournant : si V est analytique, toute solution $\psi(q)$ de l'équation de Schrödinger doit être holomorphe partout ; mais l'approximation (2) est le produit de deux termes dont chacun est ramifié aux points tournants !

2.2. Préparatifs formels

Plaçons-nous maintenant dans le domaine complexe, et adoptons les notations suivantes :

$W = V-E$ est supposé *polynomial* de degré ν, à racines (points tournants) simples $q_1, q_2, \ldots, q_\nu$ toutes $\neq 0$. On pose

$$z(q) = \int_0^q W(q')^{1/2}\,dq' \qquad \left(= i\int p\,dq \right), \tag{3}$$

et $x = \frac{2}{\hbar}$, de sorte que

$$\psi_\pm^{BKW} = \varphi_\pm\, e^{\pm xz(q)/2} \tag{4}$$

($\varphi_\pm$ série formelle en x^{-1}, à coefficients fonctions analytiques de q, ramifiées aux points tournants).

Les équations de transport peuvent se réécrire formellement

$$\partial_q \varphi_\pm = \rho_\pm(q,x)\,\varphi_\pm\ , \tag{5}$$

où $\rho_+ = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n^+(q)x^{-n}$ est une série formelle en x^{-1} à coefficients analytiques en q sur le revêtement à 2 feuillets de $\dot{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \{q_0, \ldots, q_\nu\}$, tandis que ρ_- est "l'autre détermination" de la même fonction (déduite de ρ_+ par prolongement analytique des coefficients).

Ces équations s'intègrent globalement sur le revêtement universel de $\dot{\mathbb{C}}$ et l'on vérifie que dans tout ouvert, simplement connexe et "à un seul bout", de $\dot{\mathbb{C}}$, il existe une unique solution formelle φ_+ [resp. φ_-] de (5) vérifiant la condition asymptotique

$$\lim_{q\to\infty} \varphi_\pm / (ip)^{-1/2} = 1 \tag{6}$$

(comme série formelle en x^{-1} : tous les coefficients doivent tendre vers 0 sauf le 0-ième qui doit tendre vers 1).

Pour étudier l'ambiguïté des diverses solutions ainsi obtenues, il est commode de fendre le plan par ν coupures joignant chacun des points tournants à l'infini : on obtient ainsi un ouvert simplement connexe "à ν bouts", dans lequel sont définies ν fonctions φ_+ [resp. ν fonctions φ_-], selon le bout choisi pour écrire (6) ; le quotient de deux d'entre elles, relatives à deux bouts consécutifs, sera donné par la "fonction de Voros"

$$V_j(x) = \exp \int_{C_j} \rho_+(q,x)\,dq \in \mathbb{C}[[x^{-1}]] \ ,$$

où C_j est un chemin sans fin qui longe les deux lèvres de la coupure séparant les deux bouts considérés.

2.3. <u>La résurgence quantique</u>

2.3.0. THÉORÈME.- *Les fonctions de Voros* $V_1(x), \ldots, V_\nu(x)$ *, ainsi que les* $\varphi_\pm$ *considérées comme fonctions de* x *à* q *fixé, sont des* fonctions résurgentes *de* x *(modèle formel ou sectoriel).*

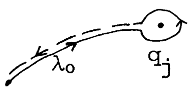
2.3.1. *Équations de résurgence des* $\varphi_\pm$

Fixons $q = q_0$, et $z_0 = z(q_0)$.

La fonction $\varphi(q_0,\cdot)$ aura des dérivées étrangères non nulles pour les valeurs suivantes de ξ (variable conjuguée de x) : faisons parcourir à q un chemin λ_0 , issu de q_0 , tel que $z(q)$ s'éloigne de z_0 *en ligne droite* ; pour certains choix de la direction initiale, le chemin λ_0 va aboutir à un point tournant q_j ; la transformée de Borel de φ_+ [resp. φ_-] a alors une singularité en $-\xi(\lambda_0)$ [resp. $\xi(\lambda_0)$], où

$$\xi(\lambda_0) = \int_{\lambda_0} W^{1/2} = \omega - z_0 \quad , \quad \omega \in \Omega_0 \ ;$$

de plus $\Delta_{z_0-\omega}\varphi_+$ est la fonction de "type φ_- " déduite de φ_+ par prolongement analytique (la variable est q !) le long du lacet $\tilde\lambda_0$ (figure ci-après)



Le lacet $\tilde\lambda_0$

[énoncé analogue pour $\Delta_{-z_0+\omega}\varphi_-$] .

Conclusion.- Pour tout choix de déterminations de φ_+ , φ_- , on a donc des équations de résurgence du type

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta_{z_0-\omega}\varphi_+ &= P^+_\omega(x)\,\varphi_- \\ \Delta_{-z_0+\omega}\varphi_- &= P^-_\omega(x)\,\varphi_+ \end{aligned} \right.$$

où les coefficients de résurgence $P^\pm_\omega(x)$ *sont des expressions rationnelles des* $V_1(x), \ldots, V_\nu(x)$.

Remarque.- Il faut prendre garde au fait que la structure résurgente des fonctions $\varphi_\pm(q,\cdot)$ dépend de leur normalisation : un changement de normalisation se traduit par la multiplication de $\varphi_\pm$ par une fonction de ξ seulement, dont la structure résurgente en général non triviale (*cf.* section 2.3.2 ci-après) va modifier la structure résurgente de $\varphi_\pm$ en ce qui concerne les singularités *fixes* (action non triviale des dérivations étrangères en certaines valeurs de ξ indépendantes de q). Les équations (8) donnent une description complète de la structure résurgente des singularités *mobiles* de $\varphi_\pm$ (quelle que soit la normalisation), mais elles demandent à être complétées par une description des singularités *fixes*.

2.3.2. *Équations de résurgence des* $V_j(x)$

Pour W proche du polynome $q^\nu - 1$, les V_j admettent une indexation naturelle par $j \in \mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z}$ (car les q_j sont proches des racines de l'unité d'ordre ν). Leurs seules dérivées étrangères non nulles sont alors

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta_{n\omega_{ij}} V_i &= +\frac{1}{n} V_i \left[- \frac{V_{i+1} V_{i+2} \cdots V_{j-1}}{V_{j+1} V_{j+2} \cdots V_{i-1}} \right]^n \\ \Delta_{n\omega_{ij}} V_j &= -\frac{1}{n} V_j \left[- \frac{V_{i+1} V_{i+2} \cdots V_{j-1}}{V_{j+1} V_{j+2} \cdots V_{i-1}} \right]^n \end{aligned} \right.$$

($i \neq j$, $\omega_{ij} = 2(\omega_j - \omega_i)$, avec les notations de l'intermède).
L'ensemble des fonctions rationnelles de $V_1, \ldots, V_\nu$ est donc stable par l'action des dérivations étrangères, et forme ainsi une algèbre de résurgence, l'"*algèbre de Voros*".

2.4. Commentaires

Dans le modèle sectoriel, les $\varphi_\pm(q,x)$ sont de *vraies* fonctions, holomorphes dans des secteurs du plan des x *qui tournent quand* q *varie* ; inversement, si l'on fixe $\operatorname{Arg} x$, on aura affaire à une collection de fonctions φ_+, φ_- holomorphes dans des cellules du plan des q séparées par des "lignes de Stokes", et dont les prolongements analytiques d'une cellule à l'autre sont des combinaisons linéaires, *à coefficients dans l'algèbre de Voros*, des φ_+, φ_- de la nouvelle cellule. C'est ainsi que les équations de résurgence nous permettent de construire, par combinaison des objets purement formels du § 2.2, de *vraies solutions globales* de l'équation de Schrödinger. Le fait que ces vraies solutions ne soient pas ramifiées aux points tournants est d'ailleurs un argument-clé pour établir les résultats du § 2.3.1 (*cf.* Voros, [4], § 6, b)). Les équations de résurgence du § 2.3.2 résultent également d'arguments topologiques de Voros ([3], § 9), toujours *modulo le théorème* 2.3.0, conjectural chez Voros. Écalle établit ce théorème en construisant explicitement les $\varphi_\pm$ comme somme infinie (convergente) de fonctions spéciales dont la définition lui est suggérée par les propriétés de résurgence. En fait, la structure résurgente est encore plus riche que je ne l'ai indiqué ici (et donne naissance à de multiples formules de reconstruction des $\varphi_\pm$) : avant la "résurgence quantique", Écalle étudie aussi la "résurgence équationnelle" ou résurgence dans la variable de l'équation différentielle (il s'agit chez lui de la variable z, qu'il utilise de préférence à q).

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. ÉCALLE - *Cinq applications des fonctions résurgentes*, Prépublication mathématique, Université de Paris-Sud 84 T62(1984).

[2] J. ÉCALLE, *Les fonctions résurgentes*, Vol. I, Publications mathématiques de l'Université de Paris-Sud 81-05, Vol II, Publications mathématiques de l'Université de Paris-Sud 81-06, Vol. III, en cours de publication.

[3] B. MALGRANGE - *Travaux d'Écalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques*, Séminaire Bourbaki 1981-82, exp. n° 582, Astérisque 92-93(1982), 59-73.

[4] A. VOROS - *The return of the quartic oscillator (the complex WKB method)*, Ann. Inst. H. Poincaré, 29, n° 3, 1983.

[5] A. VOROS - *Problème spectral de Sturm-Liouville : le cas de l'oscillateur quartique*, Séminaire Bourbaki 1982-83, exp. n° 602, Astérisque 105-106 (1983) 95-104.

[6] A. VOROS - *Schrödinger equation from* O(h) *to* $o(\hbar^\infty)$ (symposium "Path integrals from meV to MeV, ZIF Bielefield, 1985), à paraître.

Frédéric PHAM

Université de Nice
Institut de Mathématiques et
Sciences Physiques
Parc Valrose
06034 NICE CEDEX