Astérisque

JOHN FRANK ADAMS

La conjecture de Segal

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 645, p. 255-260

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__255_0>

Séminaire BOURBAKI
37ème année, 1984-85, n° 645

Juin 1985

LA CONJECTURE DE SEGAL

Par John Frank ADAMS

Ce que Segal a deviné, et Carlsson démontré, c'est pour l'essentiel une propriété forte d'invariance de la cohomotopie équivariante, convenablement complétée. Discutons d'abord la cohomotopie ; il nous faut les idées de l'homotopie équivariante.

Soit G un groupe fini. G opérera sur tous nos espaces. Ces espaces seront des $G-C-W$ complexes ; on les construit comme les $C-W$ complexes, en remplaçant les cellules E^n par des G-cellules $G/H \times E^n$. Si un tel complexe X a un point de base, c'est de forme $x_0 = G/G \times E^0$. Pour les morphismes de cette catégorie, on construit $[X,Y]^G$ comme d'habitude ; on prend les G-applications $f : (X,x_0) \longrightarrow (Y,Y_0)$, et on les répartit en classes de G-homotopie.

Ensuite, on veut stabiliser. Le théorème de Freudenthal marche bien, même si G opère de façon non-triviale sur les coordonnées de suspension. Comme suspension de X on prend donc $S^V \wedge X$. Ici V est une représentation réelle de G ; S^V est son compactifié $V \cup \{\infty\}$, avec ∞ comme point de base, et $X \wedge Y = X \times Y/X \times Y_0 \cup x_0 \times Y$ comme d'habitude. Le groupe stable $\{X,Y\}^G$ est donc la valeur commune de $[S^V \wedge X\ ,\ S^V \wedge Y]^G$ pour tout V suffisamment grand ; ça existe si X est de dimension finie.

Ceci nous donne la cohomotopie. Soit X un $G-C-W$ complexe fini. On pose

$$\tilde{\pi}^n_G(X) = \{X,S^n\}^G$$

au moins si $n \geq 0$. Ici G opère trivialement sur S^n ; les notations S^n et S^V sont compatibles si on convient que n peut indiquer la représentation triviale de G sur R^n. On a

$$\tilde{\pi}^{n+1}_G(S^1 \wedge X) \cong \tilde{\pi}^n_G(X) \ ,$$

ce qui donne $\tilde{\pi}^n_G$ pour tout $n \in Z$.

Ici $\tilde{\pi}$ est un foncteur de cohomologie réduite ; si on nous donne un espace X sans point de base, alors on lui en ajoute un :

$$\pi^n_G(X) = \tilde{\pi}^n_G(X \sqcup P) \ .$$

Pour les complexes infinis, il faut considérer la cohomotopie comme un foncteur à valeurs dans les progroupes. Soit donc X un $G-C-W$ complexe infini ; pour tout sous-complexe fini X_α on a le groupe $\tilde{\pi}_G^n(X_\alpha)$; pour tout inclusion $i : X_\alpha \longrightarrow X_\beta$ on a $i^* : \tilde{\pi}_G^n(X_\beta) \longrightarrow \tilde{\pi}_G^n(X_\alpha)$. On a donc un progroupe

$$\tilde{\pi}_G^n(X) = \{\tilde{\pi}_G^n(X_\alpha),\ i^*\} .$$

La nécessité des progroupes dans ce sujet remonte à Atiyah et Segal [3] .

Discutons ensuite les propriétés d'invariance. En topologie ordinaire, on connait depuis Eilenberg-Steenrod les axiomes auxquels il faut assujettir un foncteur cohomologique. En topologie équivariante, par contre, nous avons plus de choix des propriétés d'invariance à considérer.

Soit $\mathcal{H}$ une classe donnée de sous-groupes $H \subset G$. On dit qu'une G-application $f : X \longrightarrow Y$ est une $\mathcal{H}$-équivalence si l'application des points fixes, $f^H : X^H \longrightarrow Y^H$, est une équivalence d'homotopie ordinaire pour tout $H \in \mathcal{H}$. Soit T un foncteur donné sur les G-espaces ; on dit que T est $\mathcal{H}$-invariant si $T(f)$ est un isomorphisme pour toute $\mathcal{H}$-équivalence f . Si les valeurs de T sont des progroupes, alors on demande que $T(f)$ soit un pro-isomorphisme, cela va sans dire.

Par exemple, prenons $\mathcal{H} = \{\text{tous}\}$, la classe de tous les sous-groupes de G ; alors une $\mathcal{H}$-équivalence est une G-équivalence. Les foncteurs qu'il est raisonnable de considérer sont donc tous $\mathcal{H}$-invariants pour cet $\mathcal{H}$.

Pour une classe $\mathcal{H}$ plus petite, plus d'applications f sont des $\mathcal{H}$-équivalences, et la propriété de $\mathcal{H}$-invariance devient plus forte.

Par exemple, prenons $\mathcal{H} = \{1\}$, la classe réduite au sous-groupe trivial. Si T est $\mathcal{H}$-invariant pour cet $\mathcal{H}$, je dirai que T est Segal-invariant.

Par exemple, c'est le cas pour la cohomologie de Borel. Rappelons que la cohomologie de Borel est définie par

$$\mathrm{Bor}_G^n(X) = H^n(EG \times_G X;C) .$$

Ici EG est un espace contractile sur lequel G opère librement, et pour $X \times_G Y$ on impose la relation $(xg,y) \sim (x,gy)$. Supposons donc qu'une G-applica- $f : X \longrightarrow Y$ est une Segal-équivalence, c'est-à-dire $f^1 : X^1 \longrightarrow Y^1$ est une équivalence d'homotopie ordinaire. Alors

$$EG \times_G X \xrightarrow{1\times f} EG \times_G Y$$

est une équivalence d'homotopie ; elle induit donc un isomorphisme de $H^n(\text{—};C)$.

On sait que par des procédés de localisation on peut construire des foncteurs cohomologiques sensibles aux points-fixes X^H petits. Ils sont $\mathcal{H}$-invariants, où la classe $\mathcal{H}$ contient les sous-groupes H suffisamment grands. Ceci remonte à Segal [9] .

Par contre, en complétant convenablement, on peut parfois obtenir des foncteurs cohomologiques sensibles aux points-fixes X^H grands. Ils sont $\mathcal{H}$-invariants, là où la classe $\mathcal{H}$ contient les sous-groupes H suffisamment petits.

Discutons cette complétion. En homotopie équivariante, tout groupe stable $\{X,Y\}^G$ est un module sur l'anneau $\{S^o,S^o\}^G$. Le calcul de cet anneau, c'est l'analogue équivariant du théorème de Brouwer $\{S^o,S^o\}^1 = Z$. Segal a vu que l'anneau $\{S^o,S^o\}^G$ est l'anneau de Burnside $A(G)$; c'est un anneau de Grothendieck, défini à partir des représentations de permutation de G sur les ensembles finis.

Soit I un idéal de $A(G)$, par exemple l'idéal d'augmentation

$$I = \mathrm{Ker}(A(G) \longrightarrow A(1)) .$$

Et soit $M = \{M_\alpha\}$ un promodule sur $A(G)$, par exemple $\tilde{\pi}^n_G(X) = \{\tilde{\pi}^n_G(X_\alpha)\}$. Alors on a la complétion

$$M^\wedge_I = \left\{ \frac{M_\alpha}{I^s M_\alpha} \right\} ;$$

c'est un progroupe, où s et α parcourent les indices possibles. Par exemple,

$$\tilde{\pi}^n_G(X)^\wedge_I = \left\{ \frac{\tilde{\pi}^n_G(X_\alpha)}{I^s\ \tilde{\pi}^n_G(X_\alpha)} \right\} .$$

THÉORÈME 1.- *Avec* I *l'idéal d'augmentation,* $\pi^*_G(\text{—})^\wedge_I$ *est Segal-invariant.*

C'est à peu près le résultat de Carlsson [4]. L'idée vient de Segal ; c'est calqué sur le résultat suivant d'Atiyah et Segal [3].

THÉORÈME 2.- $K^*_G(\text{—})^\wedge_I$ *est Segal-invariant.*

On peut donner le théorème 1 sous une forme plus classique. Suivant l'idée de Borel, la projection $EG \times X \longrightarrow X$ est l'exemple presque canonique d'une G-application qui est une équivalence d'homotopie ordinaire. Donc

$$\pi^*_G(X)^\wedge_I \longrightarrow \pi^*_G(EG \times X)^\wedge_I$$

est un pro-isomorphisme. D'ailleurs

$$\pi^*_G(EG \times X) \longrightarrow \pi^*_G(EG \times X)^\wedge_I$$

est un pro-isomorphisme aussi ; $\pi^*_G(EG \times X)$ est déjà complet. D'où :

THÉORÈME 3.- *Il y a un pro-isomorphisme naturel*

$$\pi^*_G(X)^\wedge_I \longrightarrow \pi^*_G(EG \times X) .$$

Réciproquement, ceci implique le théorème 1 ; le terme à droite $\pi^*_G(EG \times X)$ est Segal-invariant, c'est facile.

Suivons l'idée de Borel un peu plus loin. On a un pro-isomorphisme naturel

$$\pi^*_G(EG \times X) \longleftrightarrow \pi^*(EG \times_G X) .$$

D'où

THÉORÈME 4.- *Il y a un pro-isomorphisme naturel*

$$\pi_G^*(X)_I^\wedge \longrightarrow \pi^*(EG \times_G X) .$$

Prenons pour X un point.

COROLLAIRE 5.- *Il y a un pro-isomorphisme*

$$\tilde{\pi}_G^*(S^0)_I^\wedge \longrightarrow \pi^*(BG) .$$

Le progroupe de gauche, $\tilde{\pi}_G^*(S^0)_I^\wedge$, remplit la condition Mittag-Leffler. Donc le progroupe de droite, $\pi^*(BG)$, la remplit aussi, et on peut passer à la limite.

COROLLAIRE 6.- *Le Corollaire 5 vaut si on remplace* "pro-isomorphisme" *par* "isomorphisme", $\tilde{\pi}_G^*(S^0)_I^\wedge$ *par la complétion* I-*adique de* $\tilde{\pi}_G^*(S^0)$ *dans la catégorie des groupes, et* $\pi^*(BG)$ *par la cohomotopie représentable de* BG .

COROLLAIRE 7.- *Dans ce sens,* $\pi^n(BG) = 0$ *pour* $n > 0$.

COROLLAIRE 8.- *Et dans ce sens aussi,*

$$\pi^0(BG) \cong A(G)_I^\wedge .$$

C'est la "Burnside ring conjecture". Il est remarquable que le corollaire 6 permet de calculer les groupes $\pi^n(BG)$. Si on veut calculer les groupes de cohomologie - généralisée, la méthode habituelle est la suite spectrale

$$H^p(X;K^q(P)) \Longrightarrow K^{p+q}(X) .$$

Il est exceptionnel qu'on parvienne à un calcul non-trivial de $K^*(X)$ sans connaître les coefficients $K^*(P)$. De plus, dans cette suite spectrale, en vue du corollaire 7, il faut qu'une infinité de groupes $H^p(BG;\pi^q(P))$ non-nuls s'entre-tuent. En principe, ça contient des renseignements pour les homotopistes.

Problème 9.- Donner des estimations explicites de la rapidité de convergence de $\{\pi^n(BG_\alpha)\}$ *vers sa limite* $\pi^n(BG)$ (même pour $G = Z_2, Z_p$) .

Si on veut connaître les groupes de cohomotopie $\pi_G^n(X)$, on peut trouver que la complétion $\pi_G^n(X)_I^\wedge$ est trop éloigné de l'original. On préfèrera peut-être une complétion moins brutale. Alors, soit J un idéal quelconque de $A(G)$.

THÉORÈME 10.- $\pi_G^*(—)_J^\wedge$ *est* $\mathcal{H}$-*invariant, où*

$$\mathcal{H} = \{H | H \in \mathrm{Supp}(P) \ , \ P \supset J\} .$$

Ici P parcourt les idéaux premiers contenant J. Le "support" de P est une classe de conjugaison, contenant les H minimaux tels que P soit l'image inverse de quelque $P' \subset A(H)$.

Cette généralisation du théorème 1 vient de [2] . Pour J et $\mathcal{H}$ convenables, elle donne un résultat semblable au théorème 3. A ce moment, on ne sait pas si l'analogue du théorème 10 est vrai pour la K-théorie équivariante.

Je donnerai quelques renseignements sur la démonstration des théorèmes 1 et 10.

D'abord, il suffit de considérer le cas où G est un p-groupe et la complétion est par rapport à p. Cette réduction est faite par "transfert" ; voir [8] pour le th. 1, [2] pour le th. 10.

Pour les p-groupes G, Carlsson raisonne par induction sur l'ordre de G. Le point-clé est que Carlsson s'inspire de la suite cofibrée

$$EG \sqcup P \longrightarrow S^0 \longrightarrow S^0 \cup C(EG \sqcup P) .$$

Il s'inspire à modifier le spectre représentant la cohomotopie équivariante p-adique. En effet, pour tout foncteur cohomologique équivariant convenable H_G, on peut introduire une suite exacte de la forme suivante :

$$\ldots \longrightarrow H'_G(X) \longrightarrow H_G(X) \longrightarrow H''_G(X) \xrightarrow{d} H'_G(X) \longrightarrow \ldots$$

Ici on peut caractériser $H_G \longrightarrow H''_G$ comme la flèche universelle menant de H_G à un foncteur cohomologique ayant une certaine propriété de $\mathcal{H}$-invariance. Plus précisément, H''_G est $\mathcal{H}$-invariant où $\mathcal{H}$ est la classe $\{> 1\}$ des sous-groupes $H > 1$. Et pour toute flèche bonne, on peut introduire un groupe relatif et une suite exacte. C'est la suite exacte fondamentale de Carlsson.

Après quelques réductions préliminaires du problème, Carlsson se ramène à démontrer que $H_G(X)$ est nul, où H_G est la cohomotopie équivariante p-adique réduite, et X est un espace de son choix avec X^1 contractile et $X^G \simeq S^0$. Carlsson veut donc calculer $H'_G(X)$ et $H''_G(X)$ dans son cas. L'hypothèse de récurrence permet de calculer $H''_G(X)$; c'est la raison d'être de H''_G. Pour $H'_G(X)$, il y a deux voies :

a) $H'_G(X)$ est défini à l'aide des G-espaces libres. On peut donc ramener la question à l'homotopie ordinaire, et la résoudre à l'aide de, comme Segal me l'a dit, "that damn spectral sequence of yours".

b) D'ailleurs, on peut généraliser la suite spectrale d'Adams au monde équivariant, et puis on peut l'appliquer plus directement.

Deux cas se séparent :

(i) Si G n'est pas un p-groupe élémentaire abélien, alors $H'_G(X) = 0$ et $H''_G(X) = 0$, donc $H_G(X) = 0$.

(ii) Si G est un p-groupe élémentaire abélien, alors $H'_G(X)$ et $H''_G(X)$ ne sont pas nuls, mais l'homomorphisme de bord d est un isomorphisme. Ici le calcul de $H'_G(X)$ est plus sérieux ; c'est du W. H. Lin [7] pour $G = Z_2$, J. Gunawardena [5,6] pour $G = Z_p$, [1] pour le cas général.

En tout cas, le résultat est vrai. On peut se demander s'il y a une démonstration sans calcul. Mais pour d'autres foncteurs, on a trouvé par calcul que les analogues vraisemblables du théorème 1 sont faux. Si c'est le calcul qui dit oui ou non, alors le calcul est probablement essentiel, bien qu'on souhaiterait l'améliorer autant que possible.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. F. ADAMS, J.H. GUNAWARDENA et H. MILLER - *The Segal conjecture for elementary abelian* p-*groups*, à paraître dans Topology.

[2] J. F. ADAMS, J.-P. HAEBERLY, S. JACKOWSKI et J. P. MAY - *A generalisation of the Segal conjecture*, en préparation.

[3] M. F. ATIYAH et G. B. SEGAL - *Equivariant* K-*theory and completion*, Journ. of Differential Geometry 1 (1969), 1-18.

[4] G. CARLSSON - *Equivariant stable homotopy and Segal's Burnside ring conjecture*. Annals of Math., 120 (1984), 189-224.

[5] J.H. GUNAWARDENA - *Segal's conjecture for cyclic groups of (odd) prime order*, J. T. Knight Prize Essay, Cambridge 1980.

[6] J.H. GUNAWARDENA - *Cohomotopy of some classifying spaces*, thèse, Cambridge, 1981.

[7] W. H. LIN - *On conjectures of Mahowald, Segal and Sullivan*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 87 (1980), 459-458.

[8] J. P. MAY et J. E. Mc CLURE - *A reduction of the Segal conjecture*, Canadian Math. Soc. Proceedings vol. 2, part. 2 (1982), 209-222.

[9] G. B. SEGAL - *Equivariant* K-*theory*, I.H.E.S., Publ. Math. 34 (1968), 129-151.

John Frank ADAMS

Department of Pure Mathematics and
Mathematical Statistics
University of Cambridge
16 Mill Lane
GB-CAMBRIDGE CB2 1SB