Astérisque

JEAN-BENOÎT BOST

Tores invariants des systèmes dynamiques hamiltoniens

Astérisque, tome 133-134 (1986), Séminaire Bourbaki,
exp. n° 639, p. 113-157
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1984-1985__27__113_0>

© Société mathématique de France, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire BOURBAKI
37e année, 1984-85, n° 639 Février 1985

TORES INVARIANTS DES SYSTÈMES DYNAMIQUES HAMILTONIENS

[d'après Kolmogorov, Arnold, Moser, Rüssmann, Zehnder, Herman, Pöschel,...]

par Jean-Benoît BOST

0.1. Cet exposé se veut une *introduction* à la "théorie K.A.M.", c'est-à-dire à la théorie des orbites quasipériodiques des systèmes dynamiques et de leurs perturbations, initiée par Kolmogorov en 1954, puis développée, quelques années plus tard, par Arnold et Moser.

Nous traiterons surtout du "théorème K.A.M." relatif aux systèmes dynamiques hamiltoniens, connu sous le nom de *théorème des tores invariants*. Ce théorème affirme qu'un système dynamique hamiltonien voisin d'un système complètement intégrable possède encore "beaucoup" de tores lagrangiens invariants. Ce résultat admet des applications remarquables à divers problèmes classiques de la physique mathématique. En mécanique céleste, par exemple, il permet d'exhiber "beaucoup" d'orbites quasi-périodiques dans le problème à n corps, et d'établir la stabilité de certaines orbites périodiques. Le théorème des tores invariants montre aussi que, contrairement à l'intuition physique, l'hypothèse ergodique de Boltzmann n'est pas vérifiée par un système hamiltonien générique.

Les versions fines du théorème des tores invariants, nécessaires pour la plupart de ces applications, sont malheureusement assez lourdes à énoncer, et leurs démonstrations possèdent un caractère technique certain. Cependant, les méthodes "à convergence rapide avec lissage", utilisées par Moser dans ses premières démonstrations, ont permis d'établir des théorèmes généraux d'analyse non-linéaire (les théorèmes des fonctions implicites "à la Nash-Moser"), que l'on peut appliquer en retour à la démonstration des "théorèmes K.A.M.". Aussi, nous n'avons pas cherché, dans cet exposé, à formuler en détail les énoncés les plus précis connus aujourd'hui des "théorèmes K.A.M.", mais plutôt à en présenter des versions (relativement) simples, dont on puisse donner des démonstrations au moyen des théorèmes "à la Nash-Moser" les moins techniques.

L'exposé se divise en trois parties. La première consiste en un survol des principaux résultats de la "théorie K.A.M." et de certaines de leurs conséquences, suivi de quelques remarques sur leurs démonstrations. La seconde, indépendante de la première, expose d'après R.S. Hamilton ([66]), un théorème des fonctions impli-

cites "à la Nash-Moser", valable dans les espaces de Fréchet de fonctions C^∞. Dans la troisième partie, ce théorème est utilisé pour démontrer, suivant Herman ([27]), une version du théorème des tores invariants.

0.2. Je tiens à remercier chaleureusement R. Douady, dont les remarques m'ont permis d'écrire le § 1.3 dans sa forme actuelle, et M. Herman, qui m'a autorisé à présenter le contenu non publié de [27] et m'a apporté de précieux conseils lors de la préparation de cet exposé.

0.3. Notations

- Si M et N sont deux variétés C^∞ (resp. $\mathbb{R}$-analytiques) et $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $C^r(M,N)$ (resp. $C^\omega(M,N)$) l'ensemble des applications C^r (resp. $\mathbb{R}$-analytiques) de M vers N ; $C^r(M) := C^r(M;\mathbb{R})$; $C^\omega(M) := C^\omega(M,\mathbb{R})$.

Si g est un difféomorphisme de M sur N et X un champ de vecteurs sur M, g_*X désigne le champ de vecteurs sur N défini par :

$$(g_*X)(y) = Dg(g^{-1}(y)).X(g^{-1}(y)) \ .$$

- Si M est une variété C^∞ compacte, et si $i \in \mathbb{N}$, $C^i(M,\mathbb{R}^p)$ est muni de la topologie d'espace de Banach définie par la convergence uniforme sur M des jets d'ordre i ; cette topologie est appelée C^i-topologie. L'espace $C^\infty(M,\mathbb{R}^p)$ est muni de la topologie d'espace de Fréchet borne supérieure des C^i-topologies, appelé C^∞-topologie. Si, de plus, N est une variété C^∞, on définit encore, pour tout $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ la C^r-topologie sur $C^r(M,N)$ (par exemple, en plongeant N dans un espace $\mathbb{R}^p$ et $C^r(M,N)$ dans $C^r(M,\mathbb{R}^p)$).

- $\mathbb{T}^N := \mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$; on désigne par π l'application canonique $\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{T}^N$; si $\vartheta \in \mathbb{T}^N$ et $t \in \mathbb{R}^N$, on définit de façon évidente la somme $\vartheta + t$; si $\lambda \in \mathbb{R}^N$, on pose $R_\lambda := (\mathbb{T}^N, \mathbb{T}^N, \vartheta \longrightarrow \vartheta + \lambda)$. Le fibré tangent à $\mathbb{T}^N$ est canoniquement isomorphe au fibré trivial $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$. L'espace $X^\infty(\mathbb{T}^N)$ des champs de vecteurs C^∞ sur $\mathbb{T}^N$ s'identifie donc à $C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N)$, et si g est une application différentiable de $\mathbb{T}^N$ vers $\mathbb{R}^p$ (resp. un difféomorphisme de $\mathbb{T}^N$), sa différentielle s'identifie à une application de $\mathbb{T}^N$ vers $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^p)$ (resp. $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^N$), qu'on notera ∂g . Aux § 3.2-3.5, le fibré cotangent à $\mathbb{T}^N$ sera aussi identifié au fibré trivial $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$, et, si $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{T}^N)$, on notera df pour $\left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \vartheta_N}\right)$.

- $C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p,0) := \{u \in C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p) \mid u(0) = 0\}$. $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N;0)$ désigne le groupe des difféomorphismes C^∞ de $\mathbb{T}^N$ homotopes à l'identité et fixant $0 \in \mathbb{T}^N$. Ce groupe s'identifie à l'ouvert Ω de $C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N,0)$ défini par la condition

$$u \in \Omega \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{T}^N \ , \ I + \partial u(x) \in GL(\mathbb{R}^N))$$

au moyen de l'application $u \longmapsto \mathrm{Id}_{|\mathbb{T}^N} + u$. $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N;0)$ est muni de la topo-

logie déterminée par cette identification.
$\mathrm{Diff}^{\omega}(\mathbb{T}^N,0) := \mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbb{T}^N,0) \cap C^{\omega}(\mathbb{T}^N,\mathbb{T}^N)$.

- D_R^N désigne la boule fermée de centre 0 et de rayon R dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$.

1. LE THÉORÈME DES TORES INVARIANTS DE KOLMOGOROV-ARNOLD-MOSER ET QUELQUES UNES DE SES CONSÉQUENCES

1.1. Systèmes dynamiques hamiltoniens complètement intégrables

1.1.1. Depuis W.R. Hamilton, on sait écrire les équations du mouvement d'un système mécanique conservatif à f degrés de liberté sous forme "canonique" :

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad , \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (1 \le i \le n) \ . \tag{1.1.1}$$

Les "coordonnées généralisées" q_i et leurs "moments conjugués" p_i constituent des coordonnées (locales) dans l'espace des phases de dimension $2n$, qui décrit l'ensemble des états du système, et $H = H(q,p)$ est une fonction différentiable sur cet espace des phases, appelée hamiltonien du système.

L'intérêt du formalisme de Hamilton réside dans le fait que les équations du mouvement (1.1.1) conservent leur forme "canonique" dans tout système de "coordonnées canoniques", i.e. tout système de coordonnées $(q_i',p_i')_{1\le i\le n}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} dq_i' \wedge dp_i' = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i \ .$$

Par l'utilisation de coordonnées canoniques ingénieuses, les mathématiciens du XIXe siècle (en particulier Jacobi, Liouville et Kowalevska) ont su résoudre complètement les équations du mouvement de divers systèmes mécaniques.

1.1.2. *Rappels de géométrie symplectique* (cf. [1], [2])

a La mécanique de Hamilton est modélisée mathématiquement au moyen de la notion de variété symplectique.

Rappelons qu'une *variété symplectique* C^{∞} est une variété C^{∞} (de dimension paire) munie d'une 2-forme C^{∞} fermée, partout non dégénérée. La variété symplectique associée à un système mécanique conservatif est son espace des phases M , muni de la 2-forme σ qui possède l'expression $\sum_i dq_i \wedge dp_i$ dans tout système de coordonnées canoniques (q_i,p_i) . L'évolution dans le temps du système, décrite par les équations (1.1.1), définit un champ de vecteurs X_H sur M , caractérisé aussi par l'équation intrinsèque :

$$i_{X_H}\sigma = dH \ . \tag{1.1.2}$$

Plus généralement, l'équation (1.1.2) définit le *champ de vecteurs hamiltonien* X_H associé à une fonction C^{∞} H définie sur un ouvert d'une variété symplectique (M,σ) ; H est appelé alors un *hamiltonien* de X_H , et le flot de X_H , le *flot*

hamiltonien de H .

Si F et G sont deux fonctions C^∞ sur un ouvert de (M,σ) , on définit encore leur *crochet de Poisson*

$$\{F,G\} := X_G F = \sigma(X_F, X_G) = -X_F G \quad ;$$

il vient alors :

$$X_{\{F,G\}} = -[X_F, X_G] \ .$$

On dit que F et G sont *en involution* lorsque $\{F,G\} = 0$, i.e. lorsque les flots hamiltoniens de F et G commutent.

Rappelons aussi qu'une application f d'un ouvert d'une variété symplectique (M,σ) vers une variété symplectique (M',σ') est dite *symplectique* ou *canonique* lorsque $f^*\sigma' = \sigma$.

b Dans cet exposé, nous travaillerons principalement avec la variété $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$, qui s'identifie au fibré cotangent $T^*\mathbb{T}^N$. En tant que telle, elle est munie naturellement d'une structure symplectique, définie par la 2-forme fermée $\sigma = \sum_{i=1}^{N} d\vartheta_i \wedge dI_i$, où $(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_N,I_1,\ldots,I_N)$ désigne un point courant sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$. Les "coordonnées" ϑ_i sont parfois appelées variables d'angle, et les I_i , variables d'action. Nous écrirons souvent $\frac{\partial}{\partial\vartheta}$ pour $\left(\frac{\partial}{\partial\vartheta_i}\right)_{1\le i\le N}$ et $\frac{\partial}{\partial I}$ pour $\left(\frac{\partial}{\partial I_i}\right)_{1\le i\le N}$.

Le fibré tangent $T(\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N)$ possède une trivialisation canonique évidente, qui nous permettra d'assimiler les champs de vecteurs sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ aux applications de $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ vers $\mathbb{R}^{2N}$. En particulier, le champ de vecteurs hamiltonien X_H possède l'expression

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial I} ; -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}\right) .$$

Rappelons enfin comment la méthode des fonctions génératrices permet de paramétrer les plongements symplectiques de $\mathbb{T}^N \times D_R^N$ vers $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ voisins de l'identité : soit f un tel plongement ; il existe $S \in C^\infty(\mathbb{T}^N \times D_R^N)$ et $t \in \mathbb{R}^N$, proches de 0 , tels que le graphe de f admette comme équations en $(\vartheta,I,\vartheta',I') \in \mathbb{T}^N \times D_R^N \times \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$:

$$\text{(1.1.3)} \qquad \begin{cases} \vartheta = \vartheta' + \frac{\partial S}{\partial I}(\vartheta',I) \\ I' = I + \frac{\partial S}{\partial \vartheta}(\vartheta',I) + t \ ; \end{cases}$$

récriproquement, si $(S,t) \in C^\infty(\mathbb{T}^N \times D_R^N) \times \mathbb{R}^N$ est proche de 0 , les équations (1.1.3) définissent un plongement symplectique $f : (\vartheta,I) \longrightarrow (\vartheta',I')$ voisin de l'identité . Les applications f obtenues par ce procédé à partir des couples (S,t) où $t = 0$ sont appelées *globalement canoniques* ; elles sont caractérisées par le fait que, si l'on pose :

$$\tau = \sum_{i=1}^{N} I_i d\vartheta_i \ ,$$

la 1-forme $f^*\tau - \tau$, *a priori* fermée (puisque $d\tau = \sigma$), soit exacte (cf. [13]).

1.1.3. *Systèmes complètement intégrables*

Si H est une fonction C^∞ sur un ouvert de $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ de la forme $\mathbb{T}^N \times V$ indépendante des variables d'angle ϑ_i , le flot hamiltonien de H est particulièrement simple. En effet, X_H s'écrit alors :

$$X_H = (\omega_1,\dots,\omega_N;0,\dots,0)$$

où les $\omega_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}$ ne dépendent que des variables d'action $I_1,\dots,I_N$. Le flot de X_H vaut donc au temps t :

$$\mathbb{T}^N \times V \longrightarrow \mathbb{T}^N \times V$$

$$(\vartheta_1,\dots,\vartheta_N,I_1,\dots,I_N) \longmapsto (\vartheta_1 + t\omega_1,\dots,\vartheta_N + t\omega_N,I_1,\dots,I_N) \ ;$$

il laisse invariant les tores $\mathbb{T}^N \times \{I\}$, et, sur chacun d'eux, est quasi-périodique de fréquences $\omega_1(I),\dots,\omega_N(I)$.

Dans ces conditions nous dirons que le *hamiltonien* H *est complètement intégrable.*

Plus généralement, si (M,σ) est une variété symplectique de dimension $2N$, $\mathcal{U}$ un ouvert de M et H un hamiltonien sur $\mathcal{U}$ tel que $\mathcal{U}$ soit globalement invariant par X_H , on dit que *le flot hamiltonien de* H *est complètement intégrable sur* $\mathcal{U}$ s'il existe N fonctions $F_1,\dots,F_N$ dans $C^\infty(\mathcal{U})$, intégrales premières de X_H (i.e. : $\forall i$, $\{F_i,H\} = X_H F_i = 0$) en involution (i.e.: $\forall i,j$, $\{F_i,F_j\} = 0$) telles que, en tout point $x \in \mathcal{U}$:

$$dF_1(x) \wedge \dots \wedge dF_N(x) \neq 0 \ . \tag{1.1.4}$$

Le lien entre "flots hamiltoniens complètement intégrables" et "hamiltoniens complètement intégrables sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ " est assuré par le résultat suivant, dû à Liouville et Arnold ([5], [2]) : *Si* N *fonctions* C^∞ , $F_1,\dots,F_N$, *définies sur un ouvert* $\mathcal{U}$ *d'une variété symplectique* (M,σ) *de dimension* $2N$ *sont en involution et vérifient* (1.1.4) *en tout point de* $\mathcal{U}$ *et si, pour un certain* $c = (c_i)_{1\le i\le N}$ *de* $\mathbb{R}^N$, *la variété* $N_c = \{x \in \mathcal{U} \mid \forall i,\ F_i(x) = c_i\}$ *est non vide, compacte et connexe, alors* N_c *possède un voisinage dans* M *"symplectomorphe" à un ouvert* $\mathbb{T}^N \times V$ *de* $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$, *muni de sa structure symplectique naturelle, de telle sorte que les variables d'action ne dépendent que des* F_i *(les variétés* N_c *deviennent des tores* $\mathbb{T}^N \times \{I\}$ *dans* $\mathbb{T}^N \times V$ *) ; en particulier, exprimés dans les variables angle-action* $(\vartheta,I) \in \mathbb{T}^N \times V$, *les hamiltoniens* $H = F_i$ *sont complètement intégrables.*

Par ailleurs, la connaissance d'une "intégrale complète" de l'équation de Hamilton-Jacobi pour un hamiltonien $H = F_1$ défini sur M fournit des fonctions F_1 , F_2 , ... , F_N en involution et assure que le flot hamiltonien de H est

complètement intégrable sur l'ouvert défini par la condition (1.1.4).

L'intérêt porté aux flots hamiltoniens complètement intégrables tient d'abord au fait que divers systèmes dynamiques étudiés classiquement en mécanique et en géométrie en fournissent des exemples remarquables. En fait, tout système conservatif classique, à N degrés de liberté, dont l'on sache "résoudre" les équations du mouvement possède N intégrales premières $\mathbb{R}$-analytiques en involution, "indépendantes" $F_1,\dots,F_N$, explicitement connues, et admet un flot hamiltonien complètement intégrable sur l'ouvert de l'espace des phases défini par (1.1.4) (cet ouvert est le complémentaire d'un ensemble analytique de codimension au moins 1). Les systèmes de cette sorte sont qualifiés eux aussi de complètement intégrables. En voici quelques exemples : l'oscillateur harmonique ; le point matériel soumis à une force centrale dérivant d'un potentiel ; le solide mobile autour d'un point fixe (Poinsot) ; le solide pesant, symétrique, mobile autour d'un point fixe situé sur son axe de symétrie (Lagrange) ; le point matériel se déplaçant sans frottement sur un ellipsoïde (Jacobi - le flot hamiltonien se confond ici avec le flot géodésique).

Cependant, les flots complètement intégrables sont exceptionnels parmi les flots hamiltoniens. Ainsi, si (M,σ) est une variété symplectique compacte, l'ensemble des $H \in C^\infty(M)$ tels qu'il existe un ouvert non vide V dans M, sur lequel le flot hamiltonien de H soit complètement intégrable, est maigre dans $C^\infty(M)$ (cela découle des résultats de généricité en dynamique hamiltonienne établis par Robinson ; cf. [49], [37], [1]). D'autre part, de nombreux systèmes mécaniques classiques ne sont pas complètement intégrables. Par exemple, n (>2) masses ponctuelles dans l'espace obéissant aux lois de la gravitation newtonienne ("problème à n corps"), le solide pesant mobile autour d'un point fixe, ou le point matériel se déplaçant sans frottement sur une surface convexe constituent des systèmes non complètement intégrables en général (peut-être devrait-on dire plutôt "non complètement intégrés" ; les preuves de non-intégrabilité absolument rigoureuses sont difficiles et peu nombreuses ; cf. [7]).

1.1.4. *Perturbations des systèmes complètement intégrables*

Reprenons l'exemple du problème à n corps. Lorsque les masses de $n-1$ des corps deviennent infiniment petites, le système se découple en $n-1$ problèmes de Kepler et est donc complètement intégrable. On peut étudier les trajectoires du problème à n corps lorsque toutes les masses, sauf une, sont très petites, en les considérant comme des perturbations des trajectoires de ce système complètement intégrable , faciles à calculer (il s'agit là de la méthode des perturbations en mécanique céleste, qui remonte à Clairaut, Lagrange, ...).

Des considérations analogues s'appliquent aux autres exemples cités plus haut.

Par ailleurs, la théorie des formes normales de Birkhoff montre que, au voisinage d'un point stationnaire stable dans l'approximation linéaire, un flot hamiltonien peut, en général, être considéré comme une perturbation d'un flot hamiltonien complètement intégrable (cf. [6], [2]).

Ainsi, un système hamiltonien non intégrable peut souvent être considéré comme une perturbation d'un système complètement intégrable. On est mené ainsi à se demander de quelles propriétés des systèmes complètement intégrables les systèmes hamiltoniens voisins héritent. Par exemple, qu'advient-il des tores invariants par le flot hamiltonien d'un hamiltonien H_0 complètement intégrable sur $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ lorsque H_0 est perturbé en un hamiltonien proche dans la C^∞-topologie, mais quelconque par ailleurs ?

Ce type de question - auquel s'étaient attaqués de nombreux mathématiciens du siècle dernier, dont Dirichlet et Weierstrass - trouve une réponse grâce au théorème des tores invariants de Kolmogorov, Arnold et Moser ; ce théorème affirme que, si pour une valeur I_0 des variables d'action, les fréquences $(\omega_1(I_0),\dots,\omega_N(I_0))$ satisfont à une condition diophantienne, et si la matrice hessienne de $H_0 = H_0(I)$ en I_0 est inversible, alors le flot hamiltonien assicié à une "petite perturbation" de H_0 est quasi-périodique de mêmes fréquences, sur un tore de dimension N plongé dans $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$, invariant par le flot et "proche" du tore $\mathbb{T}^N \times \{I_0\}$.

1.2. Le théorème des tores invariants

1.2.1. Voici trois variantes du théorème des tores invariants. Nous démontrerons la première dans la troisième partie de l'exposé. En fait, il est possible de déduire les théorèmes 1.2.2 et 1.2.3 du théorème 1.2.1, et les théorèmes 1.2.2 et 1.2.3 l'un de l'autre (R. Douady, [20], [21]).

THÉORÈME 1.2.1.– *Soient* H_0 *un hamiltonien complètement intégrable sur* $\mathbb{T}^N \times D_R^N$ *(i.e. un élément de* $C^\infty(D_R^N)$ *) et* I_0 *un point de* $\mathring{D}_R^N$.

Supposons que H_0 *et* I_0 *vérifient les hypothèses suivantes :*

.(TI$_1$) *Le vecteur formé des* N *premières composantes de* X_{H_0} *sur le tore* $\mathbb{T}^N \times \{I_0\}$ *satisfait à une condition diophantienne faible. En d'autre termes, si nous posons*

$$\alpha = \left(\frac{\partial H_0}{\partial I_1}(I_0),\dots,\frac{\partial H_0}{\partial I_N}(I_0)\right)$$

il existe deux constantes τ *et* $c > 0$ *telles que*

$$\text{(D)} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\} \ , \quad \left|\sum_{i=1}^N k_i\alpha_i\right| \geq c\left(\sum_{i=1}^N |k_i|\right)^{-\tau} .$$

.(TI$_1'$) *La matrice* $\left\{\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}(I_0)\right\}_{1\leq i,j\leq N}$ *est inversible.*

Alors H_0 *possède un voisinage* W *dans* $C^\infty(\mathbb{T}^N \times D_R^N)$ *tel que, pour tout hamil-*

tonien H *dans* W , *on puisse trouver un tore* $\mathcal{T}_H$ *de dimension* N *plongé dans* $\mathbb{T}^N \times \mathring{D}_R^N$ *invariant par le flot hamiltonien de* H , *en sorte que :*

i) $\mathcal{T}_H$ *soit le graphe d'une application* u_H *dans* $C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathring{D}_R^N)$;

ii) $\mathcal{T}_H$ *soit une sous-variété lagrangienne de* $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ (*i.e.* $\sigma_{|\Lambda^2 T\mathcal{T}_H} = 0$) ;

iii) *le flot hamiltonien de* H *restreint à* $\mathcal{T}_H$ *soit conjugué au flot hamiltonien de* H_0 *restreint à* $\mathbb{T}^N \times \{I_0\}$, *i.e. au flot du champ constant* α *sur* $\mathbb{T}^N$; *plus précisément, il existe un difféomorphisme* $g_H \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N, 0)$ *tel que, en notant* $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *le flot hamiltonien de* H *et* $\tilde{f}_t = g_H \circ R_{t\alpha} \circ g_H^{-1}$, *on ait*

$$\forall \vartheta \in \mathbb{T}^N \ , \quad f_t(\vartheta, u_H(\vartheta)) = (\tilde{f}_t(\vartheta), u_H \circ \tilde{f}_t(\vartheta)) \ ;$$

iv) u_H *et* g_H *dépendent continûment de* H ;

$u_{H_0} = I_0$ (*donc* $\mathcal{T}_{H_0} = \mathbb{T}^N \times \{I_0\}$) *et* $g_{H_0} = \mathrm{Id}_{|\mathbb{T}^N}$.

THÉORÈME 1.2.2 (Tores invariants d'énergie fixée).— Mêmes hypothèses que dans le théorème 1.2.1, hormis la condition (TI_1') remplacée par :

(TI_2') *La matrice* $(N+1) \times (N+1)$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}(I_0) & \frac{\partial H_0}{\partial I_i}(I_0) \\ \frac{\partial H_0}{\partial I_j}(I_0) & 0 \end{pmatrix}$ *est inversible.*

Mêmes conclusions que dans le théorème 1, hormis iii) et iv) remplacées par :

iii) H *prenne la valeur constante* $H_0(I_0)$ *sur* $\mathcal{T}_H$, *et le flot hamiltonien de* H *restreint à* $\mathcal{T}_H$ *soit conjugué au flot d'un champ constant sur* $\mathbb{T}^N$ *colinéaire à* α ; *plus précisément, il existe un difféomorphisme* $g_H \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N, 0)$ *et* $\lambda(H) \in \mathbb{R}$ *tels que, en notant* $(f_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *le flot hamiltonien de* H *et* $\tilde{f}_t = g_H \circ R_{t\lambda(H)\alpha} \circ g_H^{-1}$, *on ait*

$$\forall \vartheta \in \mathbb{T}^N \ , \quad f_t(\vartheta, u_H(\vartheta)) = (\tilde{f}_t(\vartheta), u_H \circ \tilde{f}_t(\vartheta)) \ .$$

iv) u_H , g_H *et* $\lambda(H)$ *dépendent continûment de* H ;

$u_{H_0} = I_0$, $g_{H_0} = \mathrm{Id}$ *et* $\lambda(H_0) = 1$.

THÉORÈME 1.2.3.— *Soit* f_0 *un difféomorphisme symplectique de* $\mathbb{T}^{N-1} \times D_R^{N-1}$ *qui s'écrive :* $f_0(\vartheta, I) = (\vartheta + \omega(I), I)$, *où* $\omega \in C^\infty(D_R^{N-1}, \mathbb{R}^{N-1})$ *et soit* I *un point de* $\mathring{D}_R^{N-1}$.

Supposons que f_0 *et* I_0 *vérifient les hypothèses suivantes :*

.(TI_3) *Le vecteur* $\beta = \omega(I_0)$ *satisfait à une condition diophantienne forte, i.e. il existe deux constantes* τ *et* $c > 0$ *telles que :*

$$(D') \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\} \ , \quad \left| \sum_{i=1}^{N-1} k_i \beta_i + k_N \right| \geq c \left(\sum_{i=1}^{N} |k_i| \right)^{-\tau} .$$

.(TI_3') *La différentielle* $\frac{\partial \omega}{\partial I}(I_0)$ *est inversible.*

Alors f_0 *possède un voisinage* W *dans l'espace des applications globalement canoniques* C^∞ *de* $\mathbb{T}^{N-1} \times D_R^{N-1}$ *vers* $\mathbb{T}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1}$ (*muni de la* C^∞-*topologie*) *tel que, pour toute* $f \in W$, *on puisse trouver un tore* $\mathcal{T}_f$ *de dimension* $N-1$,

plongé dans $\mathbb{T}^{N-1} \times \mathring{D}_R^{N-1}$ *invariant par* f *, de sorte que :*

i) $\mathcal{T}_f$ *soit le graphe d'une application* u_f *dans* $C^\infty(\mathbb{T}^{N-1}, \mathring{D}_R^{N-1})$;

ii) $\mathcal{T}_f$ *soit une sous-variété lagrangienne de* $\mathbb{T}^{N-1} \times \mathbb{R}^{N-1}$;

iii) f *restreinte à* $\mathcal{T}_f$ *soit conjuguée à* f_0 *restreinte à* $\mathbb{T}^{N-1} \times \{I_0\}$ *, i.e. à la translation* R_β *sur* $\mathbb{T}^{N-1}$ *; plus précisément, il existe un difféomorphisme* $g_f \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^{N-1}, 0)$ *tel que, en notant* $\tilde{f} = g_f \circ R_\beta \circ g_f^{-1}$ *, on ait :*

$$\forall \vartheta \in \mathbb{T}^{N-1} \quad , \quad f(\vartheta, u_f(\vartheta)) = (\tilde{f}(\vartheta), u_f \circ \tilde{f}(\vartheta)) \ ;$$

iv) u_f *et* g_f *dépendent continûment de* f *;*
$u_{f_0} = I_0$ *(donc* $\mathcal{T}_{f_0} = \mathbb{T}^{N-1} \times \{I_0\}$ *) et* $g_{f_0} = \mathrm{Id}_{|\mathbb{T}^{N-1}}$.

1.2.2. Les conditions (D) ou (D') sont des conditions de mauvaise approximation de α ou β par des familles rationnellement dépendantes. D'après un théorème classique de Dirichlet, l'exposant τ figurant dans ces conditions vérifie nécessairement : $\tau \geq N-1$. Par ailleurs, si $\tau > N-1$, l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}^N$ (resp. $\beta \in \mathbb{R}^{N-1}$) satisfaisant à (D) (resp. (D')) pour c fixé est un fermé fermé d'intérieur vide, dont le complémentaire relativement à un compact quelconque voit sa mesure de Lebesgue tendre vers 0 avec c .

Les conditions (TI') sont des conditions de non-dégénérescence sur la dépendance en I des fréquences $\frac{\partial H_0}{\partial I_i}$, ou encore, de non-linéarité sur H_0 . Si, par exemple, (TI_1') est vérifiée, l'application $\frac{\partial H_0}{\partial I} : D_R^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ réalise un difféomorphisme d'un voisinage ouvert V de I_0 dans $\mathring{D}_R^N$ sur son image $\frac{\partial H_0}{\partial I}(V)$.

Lorsqu'il en va ainsi, et que c est suffisamment petit, V contient un fermé K de mesure de Lebesgue non nulle, tel que (TI_1) et (TI_1') soient satisfaites en tout point $\tilde{I}_0 \in K$. On peut alors appliquer le théorème 1.2.1 pour chacune de ces valeurs de $\tilde{I}_0$. Davantage, il est possible de choisir le voisinage W indépendant de $\tilde{I}_0 \in K$ (cela découle, par exemple, d'un examen détaillé de la démonstration donnée en troisième partie). Par conséquent, *si* $H_0 \in C^\infty(D_R^N)$ *vérifie* (TI_1') *en* $I_0 \in \mathring{D}_R^N$ *, et si* U *est un voisinage de* I_0 *, alors il existe un ensemble compact* $K \subset U$ *de mesure de Lebesgue non nulle et un voisinage* W *de* H_0 *dans* $C^\infty(\mathbb{T}^N \times D_R^N)$ *tels que :*

a) $\frac{\partial H_0}{\partial I}$ *réalise un difféomorphisme d'un voisinage ouvert de* K *contenant* I_0 *sur un ouvert de* $\mathbb{R}^N$ *;*

et que, pour tout $H \in W$ *:*

b) *il existe dans* $\mathbb{T}^N \times D_R^N$ *une famille de tores lagrangiens* $(\mathcal{T}_{H,\tilde{I}_0})_{\tilde{I}_0 \in K}$ *invariants par le flot de* X_H *;*

c) *pour tout* $\tilde{I}_0$ *de* K *,* X_H *soit conjugué sur* $\mathcal{T}_{H,\tilde{I}_0}$ *au champ de vecteurs constants* $\frac{\partial H_0}{\partial I}(\tilde{I}_0)$ *sur* $\mathbb{T}^N$ *;*

(d'après a) les tores $\mathcal{T}_{H,\tilde{I}_0}$ peuvent être aussi paramétrés par les fréquences $\frac{\partial H_0}{\partial I}(\tilde{I}_0)$ qui forment un compact de mesure non nulle).

Si, à l'opposé des considérations précédentes, on ne s'intéresse qu'à un seul tore invariant par le flot hamiltonien, il n'est pas nécessaire de supposer H_0 complètement intégrable pour disposer de la conclusion du théorème 1.2.1. En effet, celui-ci est encore valable si l'on y remplace la condition :

$$H_0 \in C^\infty(D_R^N)$$

par :

$$\mathbb{T}^N \times \{I_0\} \quad \textit{est invariant par le flot hamiltonien de} \quad H_0 \ ,$$

c'est-à-dire :

$$\forall \vartheta \in \mathbb{T}^N \ , \quad \frac{\partial H}{\partial \vartheta}(I_0,\vartheta) = 0 \ ,$$

et la condition (TI_1') par :

$$\textit{la matrice} \quad \left\{\int_{\mathbb{T}^N} \frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j}(I_0,\vartheta)\,d\vartheta\right\}_{1\le i,j\le N} \quad \textit{est inversible.}$$

La démonstration du théorème 1.2.1 présentée dans la troisième partie de l'exposé s'adapte à cette version plus générale (sous les hypothèses précédentes, les lemmes 3.3.1 et 3.3.2 sont encore valables, et admettent des démonstrations semblables à celles des § 3.4 et 3.5, mais plus complexes dans certains détails).

Les théorèmes 1.2.2 et 1.2.3 admettent des généralisations analogues (cf. [63]).

1.2.3. Nous présentons maintenant des formulations équivalentes des conclusions du théorème 1.2.1.

a Soit $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathring{D}_R^N)$ et soit $Gr\ u$ $(\subset \mathbb{T}^N \times \mathring{D}_R^N)$ son graphe.

Lemme 1.2.4.— Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

i) *$Gr\ u$ est une sous-variété lagrangienne de $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ (i.e. $\sigma_{|\Lambda^2 TGr\,u} = 0$) ;*

ii) *la 1-forme différentielle sur $\mathbb{T}^N$ $\sum_{i=1}^n u_i d\vartheta_i$ est fermée ;*

iii) *le difféomorphisme* $\mathcal{U} : \begin{array}{ccc} \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N \\ (\vartheta, I) & \longmapsto & (\vartheta, I + u(\vartheta)) \end{array}$ *est symplectique.*

Ce lemme est une conséquence immédiate des définitions.

Lemme 1.2.5.— Supposons $Gr\ u$ lagrangienne et donnons-nous un hamiltonien H, défini au voisinage de $Gr\ u$. Pour que $Gr\ u$ soit (globalement) invariant par le flot hamiltonien de H, il faut et il suffit que H soit constant sur $Gr\ u$.

Démonstration.— Définissons un difféomorphisme symplectique $\mathcal{U}$ de $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$ comme dans le lemme précédent. La sous-variété $Gr\ u$ est invariante par le flot de X_H si et seulement si $\mathcal{U}^{-1}(Gr\ u)$ est invariant par le flot de $\mathcal{U}_*^{-1} X_H$.

Or :

$$\mathcal{U}^{-1}(Gr\ u) = \mathbb{T}^N \times \{0\}$$

et, puisque $\mathcal{U}$ est symplectique

$$\mathcal{U}^{-1}{}_* X_H = X_{H\circ\mathcal{U}} = \left(\frac{\partial(H\circ\mathcal{U})}{\partial I} ; -\frac{\partial(H\circ\mathcal{U})}{\partial\vartheta}\right) .$$

Le lemme est maintenant évident.

Ainsi, la conjonction de l'invariance de $\mathcal{T}_H$ par le flot hamiltonien de H et des conditions i) et ii) du théorème 1.2.1 est équivalente aux conditions suivantes sur $u_H = (u_1,\dots,u_n)$:

$$\begin{cases} u_H \in C^\infty(\mathbb{T}^N;D_R^N) \ ; \\ \sum_{i=1}^N u_i d\vartheta_i \ \text{ est une 1-forme fermée sur } \mathbb{T}^N \ ; \\ H \circ (Id,u_H) \ \text{ est une fonction constante sur } \mathbb{T}^N . \end{cases}$$

b Comme toute 1-forme fermée sur $\mathbb{T}^N$ peut s'écrire $df + \sum_{i=1}^N t_i d\vartheta_i$, où $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ et $t \in \mathbb{R}^N$, nous voyons aussi que déterminer une variété lagrangienne de la forme $\mathcal{G}r\ u$ invariante par le flot hamiltonien de H revient à trouver $t \in \mathbb{R}^N$, $E \in \mathbb{R}$, et une fonction f qui vérifie l'équation aux dérivées partielles du premier ordre sur $\mathbb{T}^N$:

$$H\left(\vartheta,\left(\frac{\partial f}{\partial \vartheta_i}(\vartheta)\right)_{1\le i\le N} + t\right) = E \ ;$$

ou, autrement dit, trouver $E \in \mathbb{R}$ et une solution de la forme :

$$\varphi : x \longmapsto \overline{f}(x) + \langle t,x\rangle \tag{1.2.1}$$

où $\overline{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ est $\mathbb{Z}^N$-périodique, de l'équation différentielle du premier ordre sur $\mathbb{R}^N$:

$$\widetilde{H}\left(x,\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\right)_{1\le i\le N}\right) = E \tag{1.2.2}$$

où $\widetilde{H} = H \circ (\pi,Id)$.

Remarquons que l'équation (1.2.2) possède localement de nombreuses solutions (fournies par la méthode d'intégration de Hamilton-Jacobi) ; la difficulté du problème en question réside en la détermination d'une solution de la forme (1.2.1), i.e. d'une solution globale qui satisfasse aux conditions aux limites imposées par la périodicité.

c Considérons maintenant l'assertion iii) du théorème 1.2.1. Elle est trivialement équivalente à la suivante :

$$X_{H|\mathcal{T}_H} = (g_H,u_H \circ g_H)_*\alpha \ .$$

Comme $X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial I}, -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}\right)$ et que l'application $(\vartheta,I) \longmapsto \vartheta$ restreinte à $\mathcal{G}r\ u_H$ est un difféomorphisme sur $\mathbb{T}^N$, elle s'écrit encore :

$$\frac{\partial H}{\partial I} \circ (Id,u_H) = g_{H*}\alpha \ .$$

d Enfin, lorsque i), ii) et iii) du théorème 1.2.1 sont réalisées, on peut composer les difféomorphismes symplectiques :

$$\mathcal{U} : (\vartheta,I) \longmapsto (\vartheta,I+u_H(\vartheta))$$

et

$$\mathcal{U}' : (\vartheta,I) \longmapsto (g_H(\vartheta),{}^t\partial g_H(\vartheta)^{-1}\, I) \ ,$$

et l'on obtient ainsi un difféomorphisme symplectique :

$$U'' = U \circ U' \ : \ (\vartheta, I) \longmapsto (g_H(\vartheta), u_H \circ g_H(\vartheta) + {}^t\partial g_H(\vartheta)^{-1} I)$$

tel que

$$H \circ U''(\vartheta, I) = E + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i I_i + O(I^2) \qquad (E \in \mathbb{R}) \ . \tag{1.2.3}$$

Il en découle que déterminer un tore invariant $\mathcal{T}_H$ satisfaisant à i), ii) et iii) est équivalent à construire un difféomorphisme symplectique U'' de $\mathbb{T}^N \times \mathbb{R}^N$, de la forme :

$$U'' \ : \ (\vartheta, I) \longmapsto (\vartheta + a(\vartheta) \ , b(\vartheta) + c(\vartheta) I)$$

où $a, b, c \in C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}^N)$, et vérifiant (1.2.3).

1.2.4. Les premières versions du théorème des tores invariants (annoncées par Kolmogorov, puis démontrées par Arnold) concernaient les tores invariants $\mathbb{R}$-analytiques des systèmes hamiltoniens $\mathbb{R}$-analytiques. Voici un tel théorème "$\mathbb{R}$-analytique", simple à énoncer (on peut le démontrer, par exemple, en adaptant la preuve de Zehnder dans [63]) :

THÉORÈME 1.2.5.– *Soit* $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, *soit* $H_\varepsilon(\vartheta, I)$ *un hamiltonien sur* $\mathbb{T}^N \times \mathring{D}_R^N$ *dépendant du paramètre* $\varepsilon \in]-\delta, \delta[$ *et soit* $I_0 \in \mathring{D}_R^N$.

Supposons que H_ε *s'écrive :*

$$H_\varepsilon(\vartheta, I) = H_0(I) + \varepsilon H_1(\vartheta, I, \varepsilon) \ ,$$

avec $H_0 \in C^\omega(\mathring{D}_R^N)$ *et* $H_1 \in C^\omega(\mathbb{T}^N \times \mathring{D}_R^N \times]-\delta, \delta[)$, *et que* H_0 *vérifie les conditions* (TI_1) *et* (TI_1') *du théorème* 1.2.1.

Il existe alors $\delta' \in]0, \delta]$, *et pour tout* $\varepsilon \in]-\delta', \delta'[$, $u_\varepsilon \in C^\omega(\mathbb{T}^N, \mathring{D}_R^N)$ *et* $g_\varepsilon \in \mathrm{Diff}^\omega(\mathbb{T}^N, 0)$, *tels que :*

i) *le graphe* $\mathcal{T}_\varepsilon$ *de* u_ε *soit une sous-variété lagrangienne de* $\mathbb{T}^N \times \mathring{D}_R^N$, *invariante par le flot hamiltonien de* H_ε ;

ii) *le flot hamiltonien de* H_ε *restreint à* $\mathcal{T}_\varepsilon$ *soit conjugué au flot du champ constant* α *sur* $\mathbb{T}^N$ *par le difféomorphisme* $(\vartheta \longmapsto (g_\varepsilon(\vartheta), u_\varepsilon \circ g_\varepsilon(\vartheta)))$;

iii) $u_\varepsilon(\vartheta)$ *et* $g_\varepsilon(\vartheta)$ *soient des fonctions analytiques de* $(\vartheta, \varepsilon) \in \mathbb{T}^N \times]-\delta', \delta'[$, *telles que* $u_0 = I_0$ *et* $g_0 = \mathrm{Id}_{|\mathbb{T}^N}$.

D'après les remarques du n° 1.2.3, les conditions i) et ii) sont équivalentes à :

i)' $$\frac{\partial u_{\varepsilon,i}}{\partial \vartheta_j} = \frac{\partial u_{\varepsilon,j}}{\partial \vartheta_i} \qquad (1 \le i < j \le N) \ ;$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} H_\varepsilon \circ (\mathrm{Id}, u_\varepsilon) = 0 \ ;$$

ii)' $$\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial I} \circ (g_\varepsilon, u_\varepsilon \circ g_\varepsilon) = \frac{\partial g_\varepsilon}{\partial \vartheta} . \alpha \ .$$

Le théorème 1.2.5 apporte une réponse à un problème ancien, considéré notam-

ment par Weierstrass et Poincaré. Comme Poincaré l'a montré ([4], n° 125-128 et 147), lorsque les conditions (TI_1) et (TI_1') sont satisfaites, on peut calculer par récurrence sur n des fonctions $u_n \in C^\omega(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N)$ et $g_n \in C^\omega(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N,0)$ telles que les séries formelles en ε :

$$u_\varepsilon = I_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n u_n \quad \text{et} \quad g_\varepsilon = Id + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon^n g_n$$

vérifient (formellement) i)' et ii)' ; de plus, les u_n et g_n sont uniquement déterminés par ces propriétés. Les séries u_ε et g_ε, ou plutôt $u_\varepsilon \circ g_\varepsilon$ et g_ε, forment un exemple de ce que Poincaré appelle *séries de Lindstedt* ([4], chapitre IX). La question de leur convergence était restée ouverte jusqu'aux travaux de Kolmogorov et Arnold. Le théorème 1.2.5 y répond par l'affirmative, contrairement à l'opinion de Poincaré, qui, toutefois, dans *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, n'excluait pas absolument la convergence des séries de Lindstedt considérées ici ([4], fin du n° 149) :

> *"Ne peut-il arriver que les séries (2) convergent quand on donne aux x_i^0 certaines valeurs convenablement choisies ?*
>
> *Supposons, pour simplifier, qu'il y ait deux degrés de liberté : les séries ne pourraient-elles pas, par exemple, converger quand x_1^0 et x_2^0 ont été choisis de telle sorte que le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ soit incommensurable, et que son carré soit au contraire commensurable (ou quand le rapport $\frac{n_1}{n_2}$ est assujetti à une autre condition analogue à celle que je viens d'énoncer un peu au hasard) ?*
>
> *Les raisonnements de ce Chapitre ne me permettent pas d'affirmer que ce fait ne se présentera pas. Tout ce qu'il m'est permis de dire, c'est qu'il est fort invraisemblable."*

(Les séries (2) sont les séries de Lindstedt $u_\varepsilon \circ g_\varepsilon$ et g_ε ; Poincaré discute le cas $N = 2$ et désigne par (x_1^0,x_2^0) et (n_1,n_2) ce qui est noté ici I_0 et α .)

1.3. Les théorèmes 1.2.1, 1.2.2 et 1.2.3 admettent des versions plus raffinées :

i) d'une part, on sait en établir des variantes où les conditions de régularité C^∞ sur les hamiltoniens et les tores invariants sont remplacées par des conditions d'analyticité réelle (cf. 1.2.4), ou, au contraire, par des conditions de régularité C^r, r fini ;

ii) d'autre part, il est possible de minorer la "taille" des ouverts W, en fonction, notamment, de la constante c figurant dans les conditions diophantiennes ;

iii) enfin, on peut montrer que la réunion des tores invariants, qui sont paramétrés par un ensemble de fréquences $\frac{\partial H_0}{\partial I}(K)$ "de grosse mesure" (cf. 1.2.2), est elle-même "de grosse mesure" : dans le théorème 1.2.1, si la condition (TI_1') est

vérifiée en tout point I_o de D_R^N, la mesure de Lebesgue du complémentaire dans $\mathbb{T}^N \times D_R$ des tores invariants par X_H tend vers 0 lorsque H tend vers H_o. Cette propriété est réliée à la dépendance différentiable au sens de Whitney des tores invariants en les fréquences $\frac{\partial H_o}{\partial I},\ldots,\frac{\partial H_o}{\partial I}$ (qui varient dans le fermé d'intérieur vide $\frac{\partial H_o}{\partial I}(K)$; cf. 1.2.2).

Dans bon nombre d'applications du théorème des tores invariants, il importe de disposer des compléments évoqués en ii) et iii). De ce point de vue, le meilleur énoncé du théorème des tores invariants publié à ce jour est dû à Pöschel ([48]) (à propos de i) et ii), on pourra se reporter aussi à [47] ; que les tores invariants "aient une grande mesure de Lebesgue" avait été établi par Arnold, dans le cas $\mathbb{R}$-analytique, cf. [10], [11], [13] ; à propos de iii), on pourra consulter encore [34], [60] et [17]).

Le théorème de Pöschel permet d'étudier les flots hamiltoniens au voisinage d'un point stationnaire stable dans l'approximation linéaire ([48], § 5.c) ; en particulier, il permet d'établir pour des hamiltoniens ou des applications canoniques suffisamment différentiables les diverses versions du théorème des tores invariants discutées par Arnold dans [2], App. 8 (en utilisant les procédés de réductions les unes aux autres de ces diverses versions donnés dans [21] et [63]).

Mentionnons aussi qu'en combinant les résultats de Pöschel ([48], § 5.c) et le procédé de réduction du théorème 1.2.2 (tores invariants *d'énergie fixée*) au théorème 1.2.1 ([21]), on obtient une démonstration complète du "théorème K.A.M." sur lequel repose l'étude par Markus et Meyer de la non-ergodicité des systèmes hamiltoniens ([37], p. 39), et donc, de leur théorème de non-ergodicité générique ([37], p. 54) :

THÉORÈME 1.3.– *Soit* (M,σ) *une variété symplectique compacte. Soit* $\mathcal{E}$ *l'ensemble des hamiltoniens* $H \in C^\infty(M)$ *dont l'ensemble des valeurs régulières contient un intervalle* I, *d'intérieur non vide, tel que le flot hamiltonien de* H *ne soit ergodique sur aucune des hypersurfaces* $H^{-1}(E)$, $E \in I$.

L'ensemble $\mathcal{E}$ *est résiduel dans* $C^\infty(M)$.

Enfin, signalons le rôle des versions du théorème des tores invariants évoquées en iii) pour l'étude du flot géodésique et du spectre du laplacien sur les variétés riemanniennes ([34], [18]).

1.4. Le théorème des courbes translatées

1.4.1. Avec le théorème des tores invariants, le "théorème K.A.M." qui admet les applications à l'étude des systèmes dynamiques les plus importantes est le suivant ([50], [27]) :

THÉORÈME 1.4.1.– *Soit* $J \subset \mathbb{R}$ *un intervalle compact* $(\mathring{J} \neq \emptyset)$, *soit* $\omega \in C^\infty(J,\mathbb{R})$

telle que $\omega' > 0$ *, et soit* $r_0 \in \mathring{J}$.

Posons, si $\lambda \in \mathbb{R}$ *et si* $(f,g) \in C^\infty(\mathbb{T} \times J)^2$:

$$t_\lambda : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R} \quad (\vartheta, r) \longmapsto (\vartheta, r+\lambda) \qquad \text{et} \qquad T_{f,g} : \mathbb{T} \times J \longrightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R} \quad (\vartheta, r) \longmapsto (\vartheta + \omega(r) + f(\vartheta, r), r + g(\vartheta, r)) .$$

Si $\alpha = \omega(r_0)$ *satisfait à une condition diophantienne forte, i.e. s'il existe des constantes* $c > 0$ *et* $\tau \geq 1$ *telles que :*

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \quad , \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{c}{q^{1+\tau}} \quad ,$$

alors il existe un voisinage W *de* $(0,0)$ *dans* $C^\infty(\mathbb{T} \times J)^2$ *, tel que, pour tout* $(f,g) \in W$ *, on puisse trouver* $\psi \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathring{J})$ *,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $h \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}, 0)$ *de sorte que :*

i) *le graphe de* ψ *soit globalement invariant par* $t_\lambda^{-1} \circ T_{f,g}$ *;*

ii) *la restriction de* $t_\lambda^{-1} \circ T_{f,g}$ *au graphe de* ψ *soit conjuguée à la rotation* R_α *de* $\mathbb{T}$ *par le difféomorphisme :* $\vartheta \longmapsto (h(\vartheta), \psi \circ h(\vartheta))$ *; autrement dit :*

$$T_{f,g}(h(\vartheta), \psi \circ h(\vartheta)) = (h(\vartheta + \alpha), \psi \circ h(\vartheta + \alpha) + \lambda) ;$$

iii) λ *,* ψ *et* g *dépendent continûment de* (f,g) *;*

$\lambda = 0$ *,* $\psi = r_0$ *et* $h = \mathrm{Id}_{|\mathbb{T}}$ *lorsque* $(f,g) = (0,0)$.

Ce théorème, dû à Rüssmann ([50]), est souvent appelé *théorème des courbes translatées* ; en effet, sous l'action de $T_{f,g}$, la courbe $Gr\,\psi$, graphe de ψ , est globalement translatée de λ suivant la seconde coordonnée.

Lorsque, de plus, $T_{f,g}$ vérifie la propriété suivante, appelée *propriété d'intersection :*

(PI) $$\forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}, \mathring{J}) \quad , \quad T_{f,g}(Gr\,\varphi) \cap Gr\,\varphi \neq \emptyset$$

$$(Gr\,\varphi := \{(\vartheta, \varphi(\vartheta)), \vartheta \in \mathbb{T}\}) ,$$

λ est nécessairement nul et $Gr\,\psi$ est invariant par $T_{f,g}$. Le cas particulier du théorème 1.4.1 pour les applications $T_{f,g}$ vérifiant *(PI)* est dû à Moser ([39]) et est connu sous le nom de *théorème des courbes invariantes*. Puisque toute application globalement canonique de $\mathbb{T} \times D_R$ $(= \mathbb{T} \times [-R,R])$ vers $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$ vérifie automatiquement la propriété d'intersection (cf. [13], App. 33), le théorème 1.2.3 avec $N = 2$ est à son tour un cas particulier du théorème des courbes invariantes.

Comme le théorème des tores invariants, les théorèmes des courbes tranlatées et des courbes invariantes admettent des versions plus fines que celles énoncées ici. Notamment, leurs versions en différentiabilité finie ont été très précisément étudiées par Rüssmann ([55]) et Herman ([29]).

1.4.2. Le théorème des courbes invariantes permet d'établir la stabilité de points fixes de difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$ préservant une mesure ; il possède de ce fait

de nombreuses applications (Moser [44], [45]), en particulier à l'étude des caustiques et des billards dans les courbes convexes ([20], [34]) et à la stabilité des orbites périodiques en mécanique céleste ([42], [58]). Nous présentons maintenant ce résultat de stabilité, dans sa forme la moins élaborée.

Soient U et V deux voisinages ouverts de 0 dans $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to V$ un difféomorphisme C^∞ tel que $f(0) = 0$. Supposons que f vérifie les conditions suivantes :

i) *il existe une mesure borélienne positive* μ *sur* U, *de support* U, *telle que* $f_*\mu$ *coïncide avec* μ *sur* $U \cap V$.

ii) 0 *est un* point fixe elliptique *de* f, i.e., *les valeurs propres de* $Df(0)$ *sont de module* 1 *et non réelles.*

Soient $\lambda = e^{ia}$ et $\bar{\lambda}$ ces valeurs propres. Si a n'est pas multiple entier de $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{2\pi}{3}$, alors f admet une *forme normale de Birkhoff* au voisinage de 0 ([6], [2], [16]) : il existe un difféomorphisme C^∞ de $\mathbb{R}^2$, h, tel que $h(0) = 0$ et que, en identifiant $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$:

$$h^{-1} \circ f \circ h(z) = z e^{i(a+b|z|^2)} + R_4(z)$$

où : $b \in \mathbb{R}$ et $R_4(z) = O(|z|^4)$.

De plus, la non-nullité du "premier invariant de Birkhoff" b ne dépend que de f.

Exprimé dans les coordonnées "polaires symplectiques" $(\vartheta, r) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^*$ définies par $z = \sqrt{r} e^{2\pi i \vartheta}$, $h^{-1} \circ f \circ h$ détermine, pour $r_1 > r_2 > 0$ suffisamment petits, un plongement de $\mathbb{T} \times [r_1, r_2]$ dans $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$. Ces plongements sont des perturbations du plongement $(\vartheta, r) \longmapsto (\vartheta + \frac{a}{2\pi} + \frac{b}{2\pi} r, r)$ et vérifient (PI), d'après la condition i) de préservation d'une mesure. En leur appliquant une version suffisamment précise du théorème des courbes invariantes ([39], [50], [55], [29]), on obtient l'existence d'une famille de courbes $(\Gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$, invariantes par f entourant 0 et tendant vers 0 (il existe en fait une famille de telles courbes paramétrée par un ensemble de Cantor). Si U_n est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ à l'intérieur de Γ_n, la famille $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base de voisinages de 0 invariants par 0. On prouve ainsi le *théorème de stabilité de Moser* ([44]) :

THÉORÈME 1.4.2.– *Si* f *vérifie* i) *et* ii) *et si* :

$$\lambda \notin \{1, i, e^{2\pi i/3}, -1, e^{-2\pi i/3}, -i\} \quad et \quad b \neq 0,$$

alors 0 *est un point fixe stable de* f.

En fait, ce théorème est encore valable si l'on suppose f, non plus de classe C^∞, mais seulement de classe C^4 ([44], [55], [29]).

Signalons enfin que le théorème des courbes translatées a été utilisé par

Chenciner ([16]) dans l'étude des systèmes dynamiques non-conservatifs (bifurcations des points fixes elliptiques).

1.5. Autres "théorèmes K.A.M."

1.5.1. *Autres versions du théorème des tores invariants*

Le théorème des tores invariants admet une variante qui s'applique aux hamiltoniens non autonomes, mais périodiques en le temps, des hamiltoniens complètement intégrables ([2], [63]).

Pour diverses applications à la mécanique céleste du théorème des tores invariants, il importe d'en connaître des versions où figurent des conditions de non-dégénérescence moins restrictives que dans les théorèmes du § 1.2. De telles versions ont été établies par Arnold ([11]), Moser ([41]), et Lieberman ([35], [36]).

Il existe aussi une théorie due à Graff, des tores invariants de dimension $< N$, admettant une structure hyperbolique, des systèmes à N degrés de liberté ([23] ; voir aussi [63] et [47]).

1.5.2. *Solutions quasi-périodiques des équations différentielles ordinaires*

Les méthodes développées pour établir les théorèmes des tores invariants ou de la courbe invariante s'appliquent aussi à l'étude des trajectoires quasi-périodiques des flots non-conservatifs ; on pourra consulter sur ce point les travaux de Moser ([41], [44]).

Ces méthodes s'appliquent encore à l'étude de l'équation de Schrödinger unidimensionelle à coefficients quasi-périodiques (Dinaburg-Sinaï [19], Rüssmann [54] ; voir aussi [28], [59], [14], [46]).

1.5.3. *Formes normales des champs de vecteurs et des difféomorphismes du tore*

THÉORÈME 1.5.1.– *Si un vecteur* α *dans* $\mathbb{R}^N$ *vérifie une condition diophantienne faible :*

$$\text{(D)} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\} \quad , \quad \left|\sum_{i=1}^{N} k_i\alpha_i\right| \geq c\left(\sum_{i=1}^{N} |k_i|\right)^{-\tau} \qquad (c > 0 \; ; \; \tau \geq N-1)$$

le champ de vecteur constant α *possède un voisinage dans* $X^\infty(\mathbb{T}^N)$ *dont tout élément* v *peut s'écrire :*

$$v = \lambda + h_*\alpha$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^N$ *et* $h \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N, 0)$.

THÉORÈME 1.5.2.– *Si* $\beta \in \mathbb{R}^N$ *satisfait une condition diophantienne forte :*

$$\text{(D')} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}^{N+1} \setminus \{0\} \quad , \quad \left|\sum_{i=1}^{N} k_i\beta_i + k_{N+1}\right| \geq c\left(\sum_{i=1}^{N+1} |k_i|\right)^{-\tau} \qquad (c > 0 \; ; \; \tau \geq N),$$

la translation R_β *possède un voisinage dans* $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N)$ *dont tout élément peut s'écrire :*

$$f = R_\lambda \circ h \circ R_\beta \circ h'^{-1}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}^N$ *et* $h \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N,0)$.

Ces théorèmes sont dus à Arnold ([9]) et Moser ([40]). Nous donnons au § 3.1 une démonstration du théorème 1.5.1 ; la plupart des éléments de la démonstration du théorème des tores invariants y apparaissent, sous une forme simplifiée. Les théorèmes 1.5.1 et 1.5.2 font ainsi figure de "banc d'essai" pour les démonstrations de la "théorie K.A.M." ; le premier "théorème K.A.M." dont une démonstration ait été publiée est d'ailleurs la version $\mathbb{R}$-analytique du théorème 1.5.2.

Signalons aussi que le théorème 1.5.2 admet d'importantes applications à l'étude des difféomorphismes du cercle (cas $N=1$; Herman [26]), des groupes de difféomorphismes des variétés, et des feuilletages (Herman [24], Thurston [61]).

1.5.4. *Formes normales des germes de difféomorphismes et de champs de vecteurs holomorphes*

Le premier théorème de stabilité fondé sur la résolution d'un problème de "petits diviseurs" (cf. § 1.6) est antérieur à la "théorie K.A.M.". C'est un théorème de Siegel, qui affirme que, au voisinage d'un point fixe (resp. d'un zéro), un germe de difféomorphisme (resp. de champ de vecteurs) holomorphe est conjugué à sa partie linéaire, pourvu que celle-ci vérifie une certaine condition diophantienne ([56], [57]). Les méthodes introduites par Kolmogorov et Arnold pour établir les "théorèmes K.A.M." permettent d'en donner des démonstrations plus simples ([9], [40], [58]) et plus générales ([51], [38]).

1.6. Quelques remarques sur les démonstrations des "théorèmes K.A.M."

Revenons au théorème 1.5.1. Prouver ce théorème, c'est résoudre, lorsque v est voisin de α , l'équation d'inconnues h et λ :

$$v = \lambda + h_*\alpha \ . \tag{1.6.0}$$

Un premier pas dans la résolution de ce problème consiste à étudier l'équation linéarisée associée, obtenue en substituant à l'application $(\lambda,h) \longmapsto \lambda + h_*\alpha$ son "application affine tangente" en $(0,\mathrm{Id})$. Comme :

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(\mathrm{Id}+t\eta)_*\alpha - \alpha] = \lim_{t\to 0} \partial\eta \circ (\mathrm{Id}+t\eta)^{-1}.\alpha = \partial\eta.\alpha \ ,$$

cette équation linéarisée est l'équation d'inconnues $\lambda \in \mathbb{R}^N$ et $\eta \in C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N,0)$:

$$v = \lambda + \alpha + \partial\eta.\alpha \ .$$

Pour qu'elle soit résoluble, il est nécessaire et suffisant que α vérifie une condition diophantienne (D) ; en effet :

Lemme 1.6.– *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}^N$. *Posons pour tout* $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p)$:

$$L_\alpha u = \partial u.\alpha \quad \left(= \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{\partial u}{\partial \vartheta_i}\right) .$$

a) *L'opérateur* L_α *prend ses valeurs dans :*

$$C_0^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p) = \left\{ v \in C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p) \,\middle|\, \int_{\mathbb{T}^N} v(\vartheta)\,d\vartheta = 0 \right\} .$$

b) *Lorsque la famille* $(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$ *est linéairement indépendante sur* $\mathbb{Q}$, L_α *restreint à* $C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p,0)$ *est injectif.*

c) *L'application* $\mathcal{L}_\alpha : C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p,0) \longrightarrow C_0^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p)$, $u \longmapsto L_\alpha u$ *est bijective si et seulement si* α *satisfait à une condition diophantienne de la forme* (D).

Lorsque α *vérifie la condition* (D), *on dispose des majorations suivantes, où les* A_i *sont des constantes positives et* r *un entier naturel, et où* $\|\ \|_k$ *désigne une norme sur* $C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p)$ *définissant la* C^k*-topologie :*

(1.6.1) $$\forall v \in C_0^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p) \ , \quad \forall i \in \mathbb{N} \ , \quad \|\mathcal{L}_\alpha^{-1} v\|_i \le A_i \|v\|_{i+r} \ .$$

Démonstration.— L'assertion a) est évidente. Pour établir b) et c), nous allons utiliser la décomposition en séries de Fourier. Rappelons qu'elle établit un isomorphisme entre $C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p)$ et l'espace des suites à décroissance rapide indexées par $\mathbb{Z}^N$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et que pour toute $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p)$, ses coefficients de Fourier :

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^N} e^{-2\pi i \langle k,\vartheta\rangle} f(\vartheta)\,d\vartheta$$

vérifient les inégalités :

(1.6.2) $$\begin{cases} \|f\|_i \le B_i \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^N} \left[\left(1+\sum\limits_{j=1}^N |k_j|\right)^{i+N+1} \|\hat{f}(k)\| \right] \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{Z}^N} \left[\left(1+\sum\limits_{j=1}^N |k_j|\right)^{i} \|\hat{f}(k)\| \right] \le C_i \|f\|_i \end{cases}$$

(B_i et C_i désignent des constantes ne dépendant que de i , N et $\|\ \|_i$).

Il vient :

(1.6.3) $$\widehat{(L_\alpha u)}(k) = 2\pi i \langle k,\alpha\rangle \hat{u}(k) \ .$$

Ces formules montrent que, si la famille $(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ est libre sur $\mathbb{Q}$ et si $L_\alpha u = 0$, alors u est constant sur $\mathbb{T}^N$; cela prouve b). Il découle facilement aussi de (1.6.3) que, si $L_\alpha(C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p)) = C_0^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p)$, alors la famille $(\langle k,\alpha\rangle^{-1})_{k\in\mathbb{Z}^N-\{0\}}$ ne croît pas plus vite qu'une puissance de $\sum\limits_{i=1}^N |k_i|$, i.e., α vérifie une condition diophantienne de la forme (D).

Réciproquement, supposons la condition (D) satisfaite. Alors, pour toute $v \in C_0^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p)$, on peut définir par les conditions :

(1.6.4) $$\begin{cases} \hat{u}(k) = (2\pi i\langle k,\alpha\rangle)^{-1}\hat{v}(k) & \text{si } k \in \mathbb{Z}^N - \{0\} \\ \hat{u}(0) = 0 \end{cases}$$

une application $u \in C_0^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p)$ qui vérifie l'équation $L_\alpha u = v$. Il vient alors : $\mathcal{L}_\alpha[u-u(0)] = v$, ce qui établit la surjectivité de $\mathcal{L}_\alpha$. Enfin, les majorations (1.6.1) découlent immédiatement de (1.6.4), (1.6.2) et (D).

Les quantités $\langle k,\alpha\rangle^{-1}$ dans (1.6.3) sont les fameux *petits diviseurs*, qui ap-

paraissent déjà dans les calculs des perturbations en mécanique céleste et dont la présence est typique des "théorèmes K.A.M.".

Soulignons le fait que, quoique $\mathcal{L}_\alpha$ soit l'inverse d'un opérateur différentiel, le nombre r dans les inégalités (1.6.1) est nécessairement strictement positif (si $N > 1$). En effet, si l'on pose $v(x) = \exp(2\pi i\langle k,x\rangle)$ dans (1.6.1), on obtient une condition diophantienne de la forme (D) vérifiée par α , avec r comme exposant τ ; donc $r \geq N-1$ (sur les valeurs optimales des constantes r et A_i dans (1.6.1), cf. [54], [55]). Ce phénomène, connu sous le nom de *perte de différentiabilité*, rend délicate la démonstration du théorème 1.5.1. Il interdit par exemple de résoudre l'équation non-linéaire (1.6.0) au moyen d'un procédé d'approximations successives usuel (au cours des étapes d'un tel procédé, les pertes de différentiabilité s'accumulent ; cf. § 2.4).

Cette difficulté, liée aux problèmes "de petits diviseurs" non-linéaires, apparaît dans les démonstrations de tous les "théorèmes K.A.M.". La presque totalité de ces démonstrations utilise pour s'en affranchir, entre autres ingrédients, un algorithme de résolution par approximations successives à convergence rapide, telle que la méthode de Newton, et se répartit en trois catégories :

a Les démonstrations des versions $\mathbb{R}$-*analytiques* des "théorèmes K.A.M.".

Ces théorèmes ont été annoncés par Kolmogorov ([32], [33]) et leurs premières démonstrations ont été publiées par Arnold ([9], [10], [11]). Le principe de ces démonstrations est de résoudre une équation non-linéaire portant sur des applications $\mathbb{R}$-analytiques en construisant par la méthode de Newton une suite de solutions approchées, holomorphes sur une suite emboitée de voisinages complexes des points réels. On trouvera encore de telles démonstrations dans [13], [41], [58], [51], [63], [12].

b Les démonstrations employant une méthode "*à convergence rapide avec lissage*".

Utilisée par Moser dans sa démonstration du théorème des courbes invariantes en différentiabilité finie ([39]), cette méthode a donné naissance aux théorèmes des fonctions implicites discutés en deuxième partie (voir aussi [34] et [60]).

c Les démonstrations utilisant le "*lissage analytique*".

Ces démonstrations reposent sur la caractérisation de la classe de différentiabilité des fonctions par la qualité de leurs approximations par des fonctions analytiques, et ramènent donc les démonstrations des "théorèmes K.A.M." avec des données C^r $(r \leq \infty)$ aux "théorèmes K.A.M." analytiques. Ce procédé, introduit par Moser ([40], [43]), est techniquement assez lourd, mais permet d'établir des énoncés très fins des "théorèmes K.A.M.". Il a été employé (avec diverses variantes) par Rüssmann ([50], [55]), Zehnder ([63]), Herman ([26], Annexe) et Pöschel ([47], [48]).

Cependant, Herman a su donner des démonstrations de certains "théorèmes K.A.M.",

qui ne font plus appel à des algorithmes à convergence rapide pour résoudre les difficultés dues aux petits diviseurs, mais utilisent des transformations ingénieuses des équations non-linéaires qui permettent de les résoudre au moyen d'un théorème de point fixe classique. Ces méthodes ont été appliquées aux théorèmes des courbes invariantes et des formes normales des difféomorphismes du cercle et au théorème de Siegel ([29], [30], [31]) ; des méthodes semblables interviennent dans l'étude de la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle ([26], [62]). En plus de leur simplicité, ces nouvelles démonstrations ont comme intérêt de fournir de très bonnes estimations des constantes (sans dimension) donnant la taille des ouverts dont l'existence est affirmée par ces théorèmes ([29], chap. VII) (des estimations explicites de telles constantes ont aussi été données par Rüssmann ([55])).

2. UN THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES "A LA NASH-MOSER"

2.0. Dans cette seconde partie, nous présentons un théorème des fonctions implicites valable dans les espaces de Fréchet de fonctions C^∞.

La méthode sur laquelle repose ce théorème remonte à Nash ([72]), qui l'introduisit afin de démontrer l'existence, pour toute variété riemannienne, d'un plongement isométrique dans un espace euclidien. Elle consiste à résoudre par approximations successives une équation aux dérivées partielles non-linéaire au moyen d'un algorithme "à convergence rapide" tel que la méthode de Newton, en introduisant à chaque étape de l'itération une opération de régularisation de la solution approchée ; ceci a pour objet de compenser les éventuelles "pertes de différentiabilité" (cf. § 1.6 et 2.4 ; en réalité, Nash emploie une famille d'approximations indexée par un réel plutôt que par un entier).

Cette méthode a été utilisée par Moser qui en tira un théorème "d'analyse non-linéaire abstraite" aux applications multiples ([71]). Sergeraert généralisa ce théorème, en introduisant une catégorie convenable d'espaces de Fréchet et d'applications (non-linéaires) ([73]). Hamilton a développé par la suite un formalisme voisin de celui de Sergeraert, mais plus pratique, que nous exposons plus loin ([65] ; [66]).

Les théorèmes de fonctions implicites "à la Nash-Moser" constituent l'un des plus puissants outils de l'analyse non-linéaire, et possèdent des applications extrêmement diverses : aux questions de petits diviseurs, bien sûr, mais encore en géométrie, à l'étude des feuilletages et des déformations des structures complexes ou CR, à la résolution d'équations aux dérivées partielles non-linéaires et de problèmes à frontière libre provenant de la physique, etc...

Nous renvoyons à l'article d'exposition de Hamilton ([66]) pour des références et des exemples de telles applications, ainsi que pour les démonstrations des résultats de cette seconde partie. Le lecteur intéressé par des théorèmes des fonctions implicites plus précis ou plus généraux que celui exposé plus bas pourra consulter les travaux de Hörmander ([67], [68], [69]) et Lojasiewicz et Zehnder ([70]), ou, s'il est concerné par les applications à la géométrie, les travaux de Gromov ([64]).

Signalons enfin que la technique du "lissage analytique" (cf. § 1.6) a donné lieu elle aussi à un théorème des fonctions implicites abstrait (Zehnder [63], [74]).

2.1. Différentiabilité au sens de Gâteaux

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels topologiques, U un ouvert de E et f une application de U vers F ; on dit que f est *de classe* C^1, ou *continûment différentiable au sens de Gâteaux* lorsque :

(i) f est continue

(ii) il existe une application $\begin{array}{l} Df : U \times E \longrightarrow G \\ \quad (x,y) \longmapsto Df(x)y \end{array}$ continue, linéaire en la seconde variable et telle que :

$$\forall (x,y) \in U \times E \ , \ \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[f(x+ty) - f(x)] = Df(x)y \ .$$

Les applications de classe C^k (au sens de Gâteaux) sont définies par récurrence sur k : soit $k \in \mathbb{N} - \{0;1\}$; avec les notations précédentes, f est dite *de classe* C^k lorsqu'elle est de classe C^1 et que Df est de classe C^{k-1} sur l'ouvert $U \times E$ de $E \times E$.

On notera que lorsque E et F sont des espaces vectoriels normés, la définition précédente des applications de classe C^k est moins restrictive que la définition usuelle. Néanmoins, de nombreuses propriétés des dérivées usuelles sont encore vérifiées par les dérivées au sens de Gâteaux dans les espaces de Fréchet. En particulier :

PROPOSITION 2.1.1.– *Soient* E , F *et* G *trois espaces de Fréchet,* U *un ouvert de* E *et* V *un ouvert de* F . *Si* $f : U \longrightarrow V$ *et* $g : V \longrightarrow G$ *sont de classe* C^k $(k \in \mathbb{N}^*)$, $g \circ f$ *est aussi de classe* C^k . *De plus :*

$$D(g \circ f)(x)y = Dg[f(x)].Df(x)y \ .$$

Exemple 2.1.– Soit M une variété C^∞ (dénombrable à l'infini) et soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. L'application

$$\begin{array}{l} F : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M) \\ \qquad \varphi \longmapsto f \circ \varphi \end{array}$$

est une application de classe C^∞ lorsque $C^\infty(M)$ est muni de sa topologie natu-

relle d'espace de Fréchet. Sa différentielle est donnée par la formule :

$$DF(\varphi).\psi = f' \circ \varphi.\psi \ .$$

2.2. Espaces de Fréchet échelonnés et bonnes applications

On appelle *espace de Fréchet échelonné* un espace de Fréchet muni d'une suite croissante de normes qui définisse sa topologie. Si $(E_\alpha, (\| \ \|_i^\alpha)_{i\in\mathbb{N}})$, $\alpha = 1,\dots,N$, sont des espaces de Fréchet échelonnés, l'espace de Fréchet $\bigoplus_{\alpha=1}^{N} E_\alpha$ possède une structure d'espace de Fréchet échelonné naturelle définie par la suite des normes $\| \ \|_i : (x_\alpha) \longmapsto \sum_\alpha \|x_\alpha\|_i^\alpha$.

Exemple 2.2.1.– L'archétype des espaces de Fréchet échelonnés est l'espace $C^\infty(M)$ des fonctions C^∞ sur une variété C^∞ compacte M, muni d'une suite de normes $(\| \ \|_i)_{i\in\mathbb{N}}$, telle que $\| \ \|_i$ définisse la C^i-topologie.

Soient $(E;(\| \ \|_i)_{i\in\mathbb{N}})$ et $(F;(\| \ \|_i)_{i\in\mathbb{N}})$ deux espaces de Fréchet échelonnés, et U un ouvert de E. Une application f de U vers F est appelée *bonne application* si, pour tout point x_0 de U, il existe un voisinage V de x_0 dans U, $r \in \mathbb{N}$ et $C_i \in \mathbb{R}_+$ $(i \in \mathbb{N})$ tels que :

$$\text{(BA)} \quad \forall x \in V \ , \ \forall i \in \mathbb{N} \ , \ \|f(x)\|_i \leq C_i(1 + \|x\|_{i+r}) \ .$$

Exemple 2.2.2.– Si D est un opérateur différentiel linéaire sur une variété compacte M, D est une bonne application de l'espace de Fréchet $C^\infty(M)$, échelonné comme dans l'exemple 2.2.1, à valeurs dans lui-même. Il vérifie les inégalités (BA) en prenant pour r l'ordre de D. Cela justifie l'expression de perte de différentiabilité utilisée parfois pour désigner l'entier r dans des majorations telles que (BA).

On dit que f est une *bonne application* C^k $(k \in \mathbb{N}^*)$ lorsque f est une application de classe C^k (au sens de Gâteaux) et que f, ainsi que ses dérivées successives jusqu'à l'ordre k, sont de bonnes applications (une telle dérivée $D^i f$ est une application à valeurs dans F définie sur l'ouvert $U \times E^i$ de la somme directe de $i+1$ copies de l'espace de Fréchet échelonné E).

On dit que f est une *bonne application* C^∞ si f est une bonne application C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

PROPOSITION 2.2.– *Soient* E, F *et* G *trois espaces de Fréchet échelonnés,* U *un ouvert de* E *et* V *un ouvert de* F. *Si* $f : U \longrightarrow V$ *et* $g : V \longrightarrow G$ *sont de bonnes applications continues (respectivement, de bonnes applications* C^k, $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ *), alors* $g \circ f$ *est une bonne application continue (respectivement, une bonne application* C^k *).*

2.3. Bons espaces de Fréchet

On dit qu'un espace de Fréchet échelonné $(E,(\|\ \|_i)_{i\in\mathbb{N}})$ est un *bon espace de Fréchet* s'il existe une famille $(S(t))_{t\in]1;+\infty[}$ d'applications linéaires continues de E dans E, et des constantes $r\in\mathbb{N}$ et $C_{p,q}\in\mathbb{R}_+$ $((p,q)\in\mathbb{N}^2)$ telles que : si $(k,n)\in\mathbb{N}^2$ et $k\le n$, alors

$$\text{(0A)}\quad \forall x\in E\ ,\quad \forall t\in\ ]1,+\infty[\begin{cases}\|S(t)x\|_n \le C_{n,k}t^{n-k}\|x\|_k\\ \|[Id-S(t)](x)\|_k \le C_{k,n}t^{k-n}\|x\|_n\ .\end{cases}$$

Les opérateurs $S(t)$ sont souvent appelés *opérateurs de lissage* ou *d'approximation*.

Exemple 2.3.– L'espace de Fréchet $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ échelonné comme dans l'exemple 2.2.1 est un bon espace de Fréchet. En effet, si $\psi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ vaut 1 sur un voisinage de 0, si φ est la transformée de Fourier de ψ et si $\varphi_t(x)=t^N\varphi(tx)$, on obtient des opérateurs sur $C^\infty(\mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N)$ qui vérifient (0A) en posant : $S(t)f=\varphi_t*f$.

Les inégalités (0A) entraînent des inégalités de convexité sur les normes $\|\ \|_i$ (*inégalités de Hadamard*) :

$$\forall x\in E\ ,\quad \|x\|_\ell \le C(k,n)\,\|x\|_k^{1-\alpha}\|x\|_n^{\alpha}$$
$$k\le\ell\le n\quad ;\quad \ell=(1-\alpha)k+\alpha n$$

(Écrire $\|x\|_\ell \le \|S(t)x\|_\ell + \|[Id-S(t)]x\|_\ell$ et poser $t=\|x\|_n^{1/(n-k)}\|x\|_k^{-1/(n-k)}$).

2.4. Le théorème des fonctions implicites

THÉORÈME 2.4.1.– *Soient* E *et* F *deux bons espaces de Fréchet,* U *un ouvert de* E, f *une bonne application* C^r $(2\le r\le\infty)$ *de* U *dans* F, x_0 *un point de* U *et* $y_0=f(x_0)$.

Supposons qu'il existe un voisinage ouvert V_0 *de* x_0 *dans* U *et une bonne application continue et linéaire en la seconde variable :* $L : V_0\times F\longrightarrow E$, *tels que, si* $x\in V_0$, $Df(x)$ *soit inversible d'inverse* $L(x)$.

Alors x_0 *et* y_0 *possèdent des voisinages ouverts,* V *dans* V_0 *et* W *dans* F *respectivement, entre lesquels* f *établit un bon difféomorphisme* C^r (*i.e.* f *est bijective de* V *sur* W *et* $f^{-1}=W\longrightarrow V$ *est une bonne application* C^r).

De ce théorème d'inversion locale, on déduit le théorème des fonctions implicites suivant :

THÉORÈME 2.4.2.– *Soient* E, F *et* G *trois bons espaces de Fréchet,* U *un ouvert de* $E\times F$, $f : U\longrightarrow G$ *une bonne application* C^r $(2\le r\le\infty)$ *et* $(x_0,y_0)\in U$.

Supposons qu'il existe un voisinage V_0 *de* (x_0,y_0) *et une bonne application continue et linéaire en la seconde variable* $L : V\times G\longrightarrow F$ *telle que, si* $(x,y)\in V$, $D_2f(x,y)$ *soit inversible d'inverse* $L(x,y)$.

Alors x_0 *possède un voisinage* W *sur lequel est définie une bonne application* C^r $g : W \longrightarrow F$ *telle que :*

- $g(x_0) = y_0$
- *pour tout point* x *de* W , $(x,g(x)) \in U$ *et* $f(x,g(x)) = f(x_0,y_0)$.

(Appliquer le théorème 2.4.1 à $h : U \longrightarrow E \times G$ définie par $h(x,y) = (x,f(x,y))$.)

Soulignons que les hypothèses de ces théorèmes sont plus précises que celles des théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites classiques, valables pour les espaces de Banach. Lorsque nous les utiliserons, il faudra établir l'invertibilité d'une différentielle, non pas en un seul point, mais sur tout un ouvert (dans les espaces de Fréchet, ceci ne découle pas de cela en général ; cf. 3.1.3).

Indiquons sommairemant comment se démontre le théorème 2.4.1. Il s'agit de construire un inverse local de f , i.e., de déterminer une solution de l'équation d'inconnue x :

$$f(x) = y \ , \tag{2.4}$$

lorsque y est voisin de y_0 .

La démonstration du théorème d'inversion local classique procède en construisant une solution $x = s(y)$ de cette équation comme limite de l'une des suites $(s_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s'_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} s_0(y) = x_0 & \text{(algorithme de Picard)} \\ s_{n+1}(y) = s_n(y) + \Delta_n(y) & \\ \qquad \text{où } \Delta_n(y) = -L(0).[f(s_n(y)) - y] \ ; & \end{cases}$$

$$\begin{cases} s'_n(y) = x_0 & \text{(algorithme de Newton)} \\ s'_{n+1}(y) = s'_n(y) + \Delta'_n(y) & \\ \qquad \text{où } \Delta'_n(y) = -L(s'_n(y)).[f(s'_n(y)) - y] \ . & \end{cases}$$

Malheureusement, cette méthode ne peut s'appliquer dans la situation présente. En effet, les "inégalités de bonnes applications" dont l'on dispose sur f , L et leurs dérivées ne permettent de majorer $\|\Delta_n(y)\|_k$ ou $\|\Delta'_n(y)\|_k$ à k fixé, que par des expressions en les $\|y\|_i$, où figurent des indices i arbitrairement grands lorsque n tend vers l'infini : il y a "perte de différentiabilité" à chaque étape de l'algorithme.

Lorsque E est un bon espace de Fréchet, les opérateurs de lissage $S(t)$ sur E permettent de pallier cette difficulté, par l'emploi de l'algorithme suivant pour la résolution de (2.4) ([67], [70]) :

$$\begin{cases} \bar{s}_0(y) = x_0 & \\ \bar{s}_{n+1}(y) = \bar{s}_n(y) + \bar{\Delta}_n(y) & \\ \qquad \text{où } \bar{\Delta}_n(y) = -S(t_n)L(\bar{s}_n(y)).[f(\bar{s}_n(y)) - y] \ , & \end{cases}$$

où $t_n \in]1;+\infty[$ croît suffisamment vite avec n ($t_n = \exp\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]$ convient).

Cet algorithme de résolution est une version de l'algorithme de Newton, modifiée par l'insertion des opérateurs de lissage $S(t_n)$. Les inégalités (0A) sur ces opérateurs, jointes aux propriétés de "convergence rapide" de l'algorithme de Newton, permettent d'établir que la suite $(\bar{s}_n(y))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution $s(y)$ de (2.4) pour tout y dans un voisinage de y_0 dans F ; on montre ensuite que s est une bonne application C^r . Tout cela découle de majorations élémentaires quoique assez longues, qui, notamment, font appel aux inégalités de Hadamard.

2.5. Exemples de bons espaces et de bonnes applications

A partir de l'exemple 2.3, on établit aisément que, munis d'une suite de norme $(\| \|_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $\| \|_i$ définisse la C^i-topologie, les espaces $C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^p,0)$ sont de bons espaces de Fréchet.

Par ailleurs, l'exemple 2.3 se généralise comme suit :

PROPOSITION 2.5.1.– *Soit* $V \xrightarrow{\pi} M$ *un fibré vectoriel de rang fini* C^∞ *sur une variété* C^∞ *compacte* M *(éventuellement à bord ou à coins). L'espace* $\Gamma^\infty(M,V)$ *des sections de classe* C^∞ *de ce fibré, muni d'une suite de normes* $(\| \|_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *telle que* $\| \|_i$ *définisse la* C^i*-topologie, est un bon espace de Fréchet.*

Il est remarquable que la plupart des opérateurs définis entre de tels bons espaces de sections C^∞ , que l'on rencontre en analyse et en géométrie, sont de bonnes applications C^∞ . C'est le cas des opérateurs différentiels non-linéaires, comme il découle de la proposition 2.2 et de la proposition suivante :

PROPOSITION 2.5.2.– *Soient* $V_1 \xrightarrow{\pi_1} M$ *et* $V_2 \xrightarrow{\pi_2} M$ *deux fibrés vectoriels de rang fini* C^∞ *sur une variété* C^∞ *compacte* M .

1) *Si* Ω *est un ouvert de* V_1 *et* φ *une application* C^∞ *de* Ω *dans* V_2 *respectant les fibres (i.e.* $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$ *), alors*

$$\Gamma^\infty(M,\Omega) = \{s \in \Gamma^\infty(M,V_1) \mid s(M) \subset \Omega\}$$

est un ouvert de $\Gamma^\infty(M,V_1)$ *et l'application*

$$\Phi : \Gamma^\infty(M,\Omega) \longrightarrow \Gamma^\infty(M,V_2)$$
$$s \longmapsto \varphi \circ s$$

est une bonne application C^∞ *, lorsque* $\Gamma^\infty(M,V_1)$ *et* $\Gamma^\infty(M,V_2)$ *sont munis des structures d'espace de Fréchet échelonné définies dans la proposition précédente.*

2) *Soient* $r \in \mathbb{N}^*$ *et* J^rV_1 *le fibré vectoriel des jets d'ordre* r *de* V_1 . *L'application "jet d'ordre* r*"* $j^r : \Gamma^\infty(M,V_1) \longrightarrow \Gamma^\infty(M,J^rV_1)$ *est une bonne application lorsque* $\Gamma^\infty(M,V_1)$ *et* $\Gamma^\infty(M,J^rV_1)$ *sont munis des structures d'espace de Fréchet échelonné définies dans la proposition précédente.*

(Le 2) est banal ; le 1) est une conséquence des inégalités de Hadamard.)

La résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires fournit aussi des exemples de bonnes applications (cf. [66] pour des exemples et des références).

Pour appliquer les théorèmes du § 2.4 aux problèmes de "petits diviseurs", il nous faudra aussi disposer du résultat suivant :

PROPOSITION 2.5.3.– *L'application*

$$\mathcal{J} : \mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbb{T}^N;0) \longrightarrow \mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbb{T}^N,0)$$
$$h \longmapsto h^{-1}$$

est une bonne application C^{∞} (rappelons que $\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbb{T}^N;0)$ s'identifie à un ouvert du bon espace de Fréchet $C^{\infty}(\mathbb{T}^N;\mathbb{R}^N;0)$; cf. § 0.3). *Sa différentielle est donnée par la formule*

(2.5.1) $$D\mathcal{J}(h).\Delta h = -\partial(h^{-1}).(\Delta h \circ h^{-1}) = -[(\partial h)^{-1}.\Delta h] \circ h^{-1} .$$

(Plus généralement, on peut définir des notions de "bonnes variétés fréchétiques", puis de "bon groupe de Lie fréchétique", et munir d'une telle structure le groupe $\mathrm{Diff}^{\infty}(M)$ des difféomorphismes C^{∞} d'une variété C^{∞} compacte M .)

3. DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DES FORMES NORMALES DES CHAMPS DE VECTEURS SUR $\mathbb{T}^N$ ET DU THÉORÈME DES TORES INVARIANTS

Dans cette dernière partie, les résultats sur les bons espaces de Fréchet exposés dans les paragraphes précédents sont utilisés pour démontrer, d'après Herman ([27]), le théorème des formes normales des champs de vecteurs sur $\mathbb{T}^N$ (théorème 1.5.1) et le théorème des tores invariants (théorème 1.2.1).

Désormais, les espaces vectoriels d'applications C^{∞} sont munis des structures de bons espaces de Fréchet définies au § 2.5.

3.1. Le théorème des formes normales des champs de vecteurs sur $\mathbb{T}^N$

3.1.1. Ce paragraphe est consacré à établir le théorème suivant, qui est une version plus précise du théorème 1.5.1.

THÉORÈME 3.1.1.– 1) *Pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}^N$, *l'application*

$$\Phi_\alpha : \mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbb{T}^N,0) \times \mathbb{R}^N \longrightarrow X^{\infty}(\mathbb{T}^N)$$
$$(h,\lambda) \longmapsto \lambda + h_*\alpha = \lambda + \partial h \circ h^{-1}.\alpha$$

est une bonne application C^{∞} .

2) *Lorsque* α *vérifie la condition diophantienne*

(D) $\forall k \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$, $\left|\sum_{i=1}^N k_i\alpha_i\right| \geq C\left(\sum_{i=1}^N |k_i|\right)^{-\tau}$ $(C > 0 \ ; \ \tau \geq N-1)$

Φ_α établit un bon difféomorphisme C^∞ entre un voisinage ouvert de $(\mathrm{Id},0)$ dans $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N,0) \times \mathbb{R}^N$ et un voisinage ouvert de α dans $X^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Dans cet énoncé, $\mathbb{R}^N$ est muni de la structure d'espace de Fréchet échelonné évidente (définie par une suite constante de normes). Comme, d'autre part, $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N,0)$ s'identifie à un ouvert de l'espace de Fréchet échelonné $C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N,0)$, qualifier Φ_α de bonne application ou de bon difféomorphisme a bien un sens.

3.1.2. *Démonstration du théorème* 3.1.1.

L'assertion 1) du théorème 3.1.1 découle immédiatement, par composition, des propositions 2.5.2 et 2.5.3. De plus, un calcul très simple (utilisant (2.5.1)) fournit l'expression de $D\Phi_\alpha$:

(3.1.1) $$D\Phi_\alpha(h,\lambda)(\Delta h,\Delta\lambda) = \Delta\lambda + (\partial\Delta h)\circ h^{-1}.\alpha - \partial^2 h\circ h^{-1}.(\partial(h^{-1}).(\Delta h\circ h^{-1}),\alpha)$$
$$(h \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N,0) \ ; \ \Delta h \in C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N,0) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}^N \ ; \ \Delta\lambda \in \mathbb{R}^N) .$$

Cette expression se simplifie si l'on pose :

(3.1.2) $$\Delta h = \partial h.E \ ;$$

en effet, il vient alors :

(3.1.3) $$\begin{aligned} D\Phi_\alpha(h,\lambda).(\Delta h,\Delta\lambda) &= \Delta\lambda + [\partial(\partial h.E).\alpha - \partial^2 h.(E,\alpha)]\circ h^{-1} \\ &= \Delta\lambda + (\partial h.\partial E.\alpha)\circ h^{-1} . \end{aligned}$$

Pour établir l'assertion 2), nous allons appliquer le théorème 2.4.1 (théorème d'inversion locale) à $f = \Phi_\alpha$, $x_0 = (\mathrm{Id},0)$ et $y_0 = \alpha$. Il nous faut donc inverser $D\Phi_\alpha(h,\lambda)$ pour tout (h,λ) dans un voisinage de $(\mathrm{Id},0)$ dans $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N,0) \times \mathbb{R}^N$.

D'après (3.1.3), si $(h,\lambda) \in \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N,0) \times \mathbb{R}^N$ et $\eta \in X^\infty(\mathbb{T}^N)$ l'équation d'inconnue $(\Delta h,\Delta\lambda) \in C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N,0) \times \mathbb{R}^N$:

(3.1.4) $$D\Phi_\alpha(h,\lambda)(\Delta h,\Delta\lambda) = \eta$$

s'écrit, après le changement d'inconnue (3.1.2) :

$$\Delta\lambda + (\partial h.\partial E.\alpha)\circ h^{-1} = \eta ,$$

ou encore :

(3.1.5) $$(\partial h)^{-1}.\Delta\lambda + \mathcal{L}_\alpha E = (\partial h)^{-1}.(\eta\circ h) ,$$

où nous avons posé, comme dans le lemme 1.6 :

$$\mathcal{L}_\alpha E = \partial E.\alpha .$$

Comme $\int_{\mathbb{T}^N}(\mathcal{L}_\alpha E)(\vartheta)\,d\vartheta = 0$, il découle de (3.1.5) :

$$\left(\int_{\mathbb{T}^N}(\partial h)^{-1}(\vartheta)\,d\vartheta\right)\Delta\lambda = \int_{\mathbb{T}^N}[(\partial h)^{-1}.\eta\circ h](\vartheta)\,d\vartheta .$$

Lorsque h appartient à un voisinage ouvert V de Id dans $\mathrm{Diff}^{\infty}(\mathbb{T}^N,0)$, suffisamment petit dans la C^1-topologie, alors $\int_{\mathbb{T}^N}(\partial h)^{-1}(\vartheta)d\vartheta$ est inversible et l'équation précédente possède une solution $\Delta\lambda$ unique. De plus, l'application

$$\begin{aligned} L_2 : V \times C^{\infty}(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N) &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (h,\eta) &\longmapsto \Delta\lambda \end{aligned}$$

ainsi définie est linéaire en η et continue (et donc est une bonne application continue).

Ainsi, lorsque $h \in V$, l'équation (3.1.4) est équivalente à :

$$\begin{cases} \Delta\lambda = L_2(h,\eta) \\ \mathcal{L}_{\alpha}((\partial h)^{-1}.\Delta h) = (\partial h)^{-1}.\eta \circ h - (\partial h)^{-1}.L_2(h,\eta) \ . \end{cases}$$

Par construction de L_2, l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{T}^N$ du second membre de la dernière équation est nulle. Nous pouvons donc utiliser le lemme 1.6, qui montre que, si $h \in V$, l'équation (3.1.4) admet comme unique solution dans $C^{\infty}(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N,0) \times \mathbb{R}^N$:

$$(\Delta h,\Delta\lambda) = (\partial h.\mathcal{L}_{\alpha}^{-1}[(\partial h)^{-1}\eta \circ h - (\partial h)^{-1}.L_2(h,\eta)], L_2(h,\eta)) \ .$$

De plus, les inégalités 1.6.1 et les propositions 2.2 et 2.5.2 montrent que $(\Delta h,\Delta\lambda)$ est une "bonne fonction continue" de (h,λ,η) sur $V \times \mathbb{R}^N \times C^{\infty}(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N)$.

Par conséquent, les hypothèses du théorème 2.4.1 sont vérifiées par l'application Φ_{α} au point $(Id,0)$; cela démontre 2).

3.1.3. *Remarques*.— a) Le théorème 3.1.1. possède l'interprétation "géométrique" suivante (figure 1) :

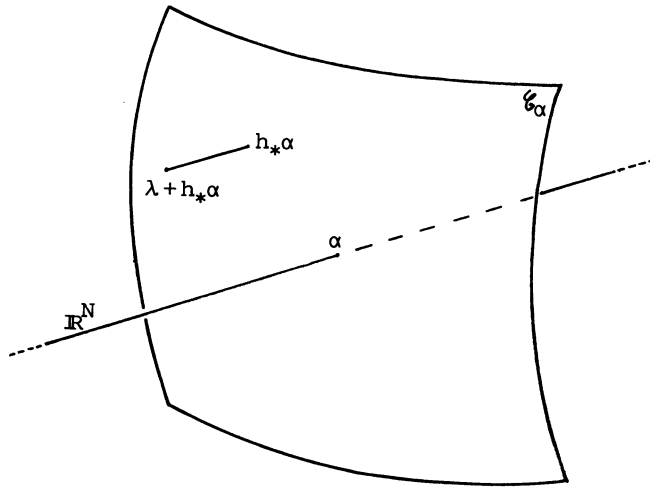

Figure 1

Si α *vérifie une condition diophantienne, alors, dans l'espace* $X^\infty(\mathbb{T}^N)$ *, les champs de vecteurs conjugués au champ de vecteur constant par des difféomorphismes proche de l'identité constituent, au voisinage du champ* α *, une sous-variété (fréchétique)* $\mathcal{E}_\alpha$ *de codimension* N *, transversale en* α *à l'espace* $\mathbb{R}^N \subset X^\infty(\mathbb{T}^N)$ *des champs de vecteurs constants sur* $\mathbb{T}^N$ *.*

b) Lorsque $h = \mathrm{Id}$, l'expression (3.1.1) de la différentielle de Φ_α se simplifie en :

$$D\Phi_\alpha(\mathrm{Id},\lambda)(\Delta h,\Delta\lambda) = \Delta\lambda + \mathcal{L}_\alpha.\Delta h$$

et inverser $D\Phi_\alpha(h,\lambda)$ se réduit à inverser $\mathcal{L}_\alpha$. C'est l'action par translation à gauche de $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N,0)$ sur lui-même qui a permis de ramener encore à l'inversion de $\mathcal{L}_\alpha$ l'inversion de $D\Phi_\alpha(h,\lambda)$ lorsque h est voisin, mais distinct, de Id . En effet, le changement d'inconnue (3.1.2) n'est autre chose que l'expression infinitésimale de la translation à gauche par h , qui envoie un voisinage de Id sur un voisinage de h (en considérant Δh et E comme des "infinitésimaux", (3.1.2) s'écrit : $h + \Delta h = h \circ (\mathrm{Id}+E)$).

c) Considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi'_\alpha : \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N,0) \times \mathbb{R}^N &\longrightarrow X^\infty(\mathbb{T}^N) \\ (h,\lambda) &\longmapsto h_*(\alpha+\lambda) \ . \end{aligned}$$

Comme Φ_α , c'est une bonne application C^∞ , de plus, sa différentielle coïncide en $(\mathrm{Id},0)$ avec celle de Φ_α , et est donc un "bon isomorphisme" de $C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N,0) \times \mathbb{R}^N$ sur $X^\infty(\mathbb{T}^N)$. Cependant, l'image de Φ'_α n'est pas un voisinage de $\alpha = \Phi'_\alpha(\mathrm{Id},0)$ (en effet, tout champ de vecteurs dans l'image de Φ'_α est conjugué à un champ de vecteurs constants, et donc, s'il possède une orbite périodique, toutes ses orbites sont périodiques ; or, comme on le vérifie aisément, α est adhérent dans $X^\infty(\mathbb{T}^N)$ aux champs de vecteurs qui possèdent des orbites périodiques de période inférieure à T en nombre fini, pour tout $T > 0$; en fait, les champs de vecteurs de cette sorte sont résiduels dans $X^\infty(\mathbb{T}^N)$).

Cet exemple montre que le théorème d'inversion locale 2.4.1 n'est plus valable si les hypothèses sur l'invertibilité de $Df(x)$ sont remplacées par la seule hypothèse d'existence d'une bonne application inverse de $Df(x)$ (il montre même que cette condition n'implique pas l'invertibilité de $Df(x)$ pour tout x suffisamment proche de x_0 ; en effet, on vérifie sans difficulté que, si $\alpha+\lambda$ ne satisfait pas à une condition diophantienne, alors $D\Phi'_\alpha(h,\lambda)$ n'est pas inversible).

3.2. La fin de l'exposé est consacrée à la démonstration du théorème des tores invariants (théorème 1.2.1). Nous allons en fait établir le théorème plus précis que voici :

THÉORÈME 3.2.– *Soient* $H_o \in C^\infty(D_R^N)$ *et* $I_o \in \mathring{D}_R^N$ *vérifiant les hypothèses du théorème* 1.2.1. *Il existe un voisinage ouvert* W *de* H_o *dans* $C^\infty(\mathbb{T}^N \times D_R^N)$ *et une bonne application* C^∞ :

$$W \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}, 0) \times \mathbb{R}^N \times \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N, 0)$$
$$H \longmapsto (f_H, t_H, g_H)$$

tels que :

a) *pour tout* $H \in W$, *si l'on pose* $u_H = df_H + t_H$, *alors* :

α) $u_H(\mathbb{T}^N) \subset \mathring{D}_R^N$;

β) $H \circ (\mathrm{Id}, u_H)$ *est constante sur* $\mathbb{T}^N$;

γ) $\frac{\partial H}{\partial I} \circ (\mathrm{Id}, u_H) = g_{H*}\alpha \qquad (\in C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}^N) \simeq X^\infty(\mathbb{T}^N))$.

b) $f_{H_o} = 0$; $t_{H_o} = I_o$; $g_{H_o} = \mathrm{Id}$.

(Le théorème 1.2.1 découle du théorème 3.2, d'après 1.2.3 a et c.)

3.3. Plan de la démonstration du théorème 3.2.

La démonstration du théorème 3.2 va procéder en deux étapes.

3.3.1. La première étape consistera à paramétrer les applications $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathring{D}_R^N)$ telles que $\frac{\partial H}{\partial I} \circ (\mathrm{Id}, u)$ soit conjugué au champ constant α . Plus précisément, nous démontrerons au § 3.4 le lemme suivant (figure 2) :

Lemme 3.3.1.– *Posons* :

$$\mathcal{U} = \{(u,t) \in C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N \mid \forall \vartheta \in \mathbb{T}^N ,\ u(\vartheta) + t \in \mathring{D}_R^N\} ,$$

et

$$X : C^\infty(\mathbb{T}^N \times D_R^N) \times \mathcal{U} \longrightarrow X^\infty(\mathbb{T}^N)$$
$$(H,u,t) \longrightarrow \frac{\partial H}{\partial I} \circ (\mathrm{Id}\,,\, u+t) .$$

1) $\mathcal{U}$ *est un voisinage ouvert de* $(I_o, 0)$ *dans* $C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}^N) \times \mathbb{R}^N$ *et* X *est une bonne application* C^∞ .

2) *Il existe un voisinage ouvert* $\mathcal{V}$ *de* (H_o, I_o) *dans* $C^\infty(\mathbb{T}^N \times D_R^N) \times C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}^N)$ *et deux bonnes applications*

$$T : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^N \quad \text{et} \quad \varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N, 0)$$

telles que : - *pour tout couple* $(H,u) \in \mathcal{V}$:

$$(H,u,T(H,u)) \in \mathcal{U} \quad \text{et} \quad X(H,u,T(H,u)) = \varphi(H,u)_*\alpha .$$

- $T(H_o, I_o) = 0$; $\varphi(H_o, I_o) = \mathrm{Id}$.

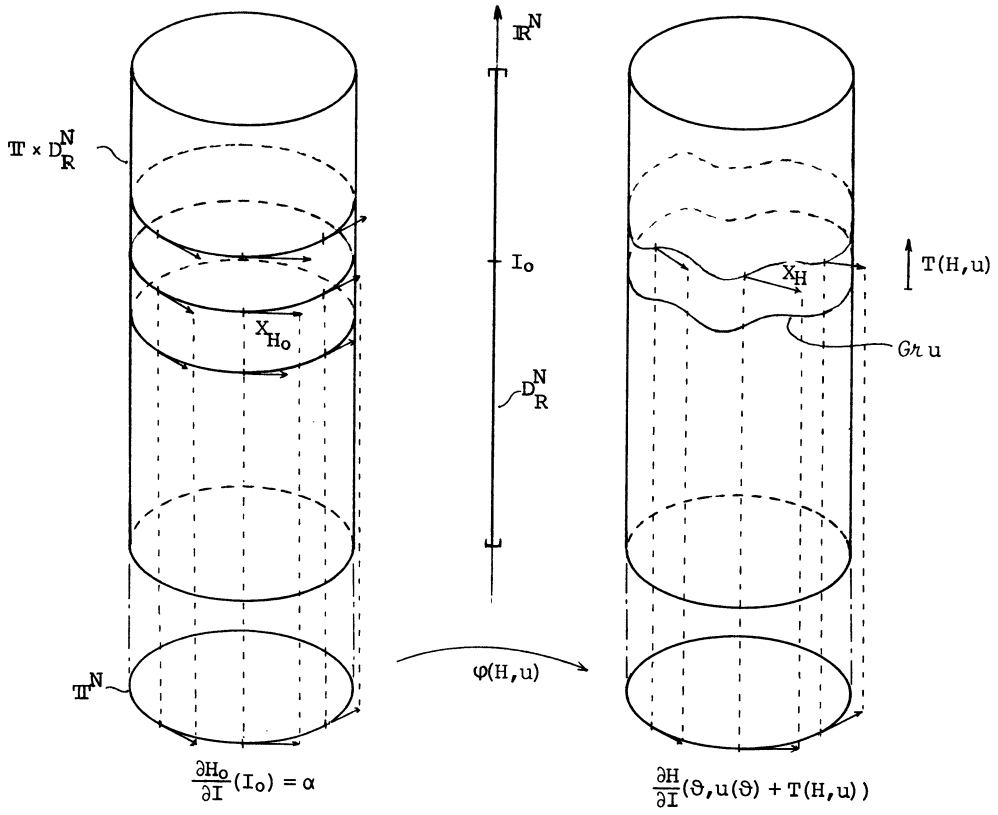

Figure 2

Comme le théorème 3.1, ce lemme admet une interprétation géométrique (figure 3). Puisque α satisfait à une condition diophantienne, les champs de vecteurs sur $\mathbb{T}^N$ conjugués à α forment au voisinage de α une sous-variété $\mathscr{C}_\alpha$ de codimension N de $X^\infty(\mathbb{T}^N)$ (cf. 3.1.3). L'application $X(H,u,.)$ est transversale à cette sous-variété, et l'ensemble des u proches de I_o tels que $\frac{\partial H}{\partial I} \circ (Id,u)$ soit conjugué à α constitue, pour chaque H voisin de H_o, une sous-variété de codimension N de $C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathring{D}_R^N)$ transversale à la variété des applications constantes.

L'argument heuristique suivant "établit" la transversalité de $X(H,u,.)$ à $\mathscr{C}_\alpha$: il vient immédiatement : $D_3X(H_o,I_o,0)(\Delta t) = \frac{\partial^2 H_o}{\partial I^2}(I_o).\Delta t$; comme $\frac{\partial^2 H_o}{\partial I^2}(I_o)$ est inversible, l'image de $D_3X(H_o,I_o,0)$ est $\mathbb{R}^N$ $(\subset X^\infty(\mathbb{T}^N))$; or $\mathbb{R}^N$ est transversal en α à $\mathscr{C}_\alpha$ (cf. 3.1.3).

La construction rigoureuse de T et φ s'appuiera sur le théorème 2.4.2 (théorème des fonctions implicites) et sur le lemme 1.6, et sera analogue à la démonstration du théorème 3.1.

3.3.2. Dans la seconde étape de la démonstration, nous appliquerons le lemme 3.3.1 aux $u \in C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathring{D}^N_R)$ de la forme $u = df + I_0$. Nous montrerons que, si $H \in C^\infty(\mathbb{T}^N \times D^N_R)$ est suffisamment proche de H_0, il existe $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}, 0)$ tel que $df + I_0$ appartienne à $\mathcal{U}$ et que $u_H = df + I_0 + T(H, df + I_0)$, qui satisfait par construction les conditions α) et γ) du théorème 3.2 (avec $g_H = \varphi(H, df + I_0)$), vérifie aussi la condition β).

De façon précise, nous établirons au § 3.5 le lemme suivant (figure 4).

Lemme 3.3.2.– *Soient*

$$V' = \{(H,f) \in C^\infty(\mathbb{T}^N \times D^N_R) \times C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}, 0) \mid (H, df + I_0) \in V\}$$

et

$$\begin{aligned} G = V' &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^N) \\ (H,f) &\longmapsto H \circ (\mathrm{Id}, df + I_0 + T(H, df + I_0)) \ . \end{aligned}$$

1) *V' est un voisinage ouvert de $(H_0, 0)$ dans $C^\infty(\mathbb{T}^N \times D^N_R) \times C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}, 0)$ et G est une bonne application C^∞.*

2) *Il existe un voisinage W de H_0 dans $C^\infty(\mathbb{T}^N \times D^N_R)$ et une bonne application C^∞ :*

$$F : W \longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}, 0)$$

tels que : - *pour tout $H \in W$, $(H, F(H))$ appartienne à V' et $G(H, F(H))$ soit une fonction constante ;*

- $F(H_0) = 0$.

Le théorème 3.2 découle directement de ce lemme, en posant :

$$f_H = F(H) \ ;$$

$$t_H = I_0 + T(H, dF(H) + I_0) \ ;$$

$$g_H = \varphi(H, df_H + t_H) \ .$$

Pour démontrer le lemme 3.3.2, nous utiliserons à nouveau le théorème 2.4.2. L'inversion des différentielles nécessaire pour l'application de ce théorème fera appel au lemme 1.6, combiné à quelques résultats très simples sur les familles de bonnes applications linéaires inversibles, d'intérêt indépendant, que nous donnons en appendice (§ 3.6).

Dans les deux prochains paragraphes, nous emploierons, sans y faire explicitement référence, les propositions 2.2, 2.5.1, 2.5.2 et 2.5.3.

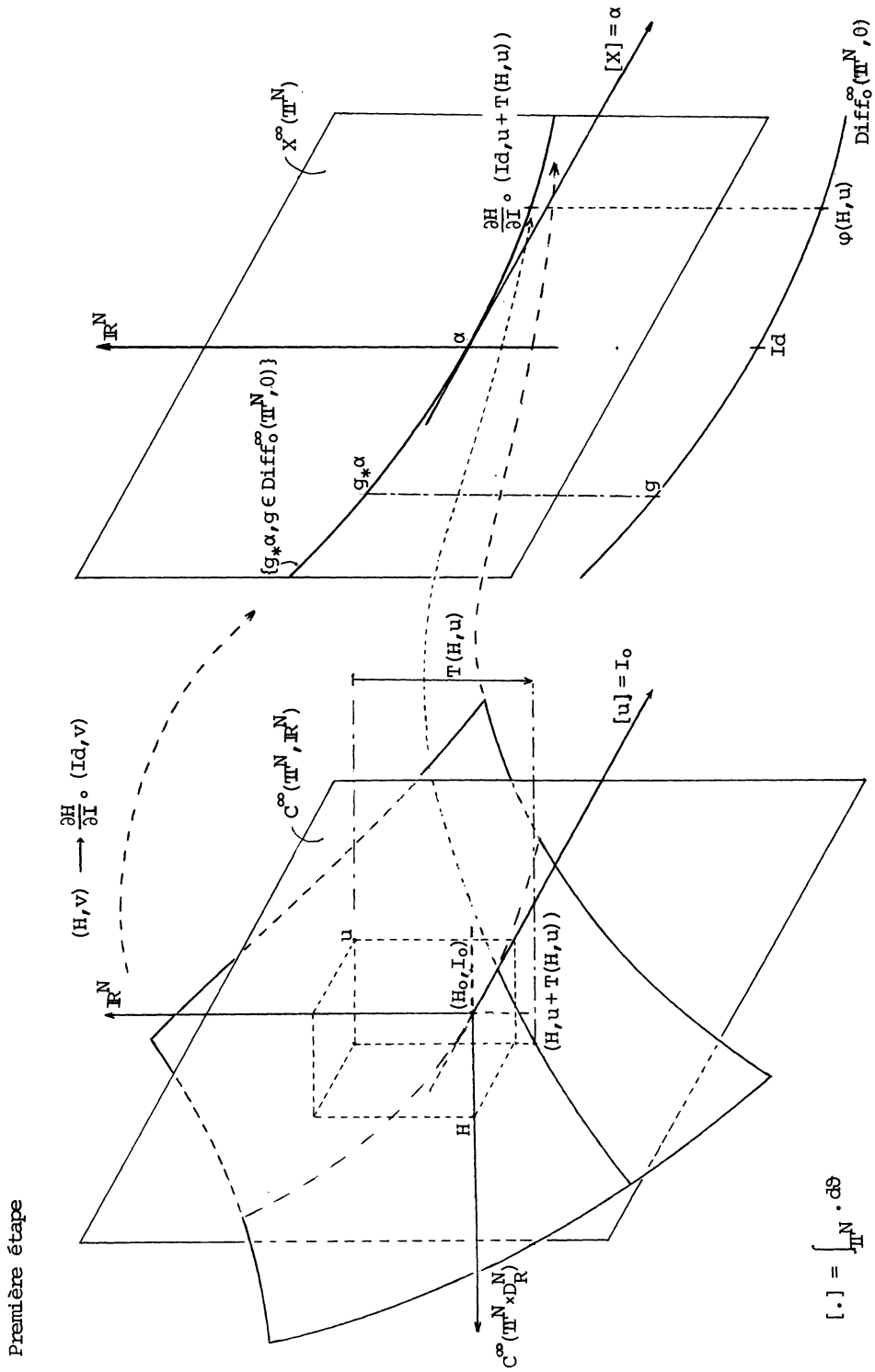
Première étape
$(H,v) \longrightarrow \frac{\partial H}{\partial I} \circ (Id,v)$
$\mathbb{R}^N$
$C^\infty(\mathbb{T}^N \times D_R^N)$
$C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N)$
(H_0,I_0)
$(H,u+T(H,u))$
$T(H,u)$
$[u]=I_0$
$[\cdot] = \int_{\mathbb{T}^N} \cdot d\theta$
$X^\infty(\mathbb{T}^N)$
$\{g_*\alpha, g \in Diff_0^\infty(\mathbb{T}^N,0)\}$
$g_*\alpha$
α
$\frac{\partial H}{\partial I} \circ (Id,u+T(H,u))$
$[X]=\alpha$
$\varphi(H,u)$
$Diff_0^\infty(\mathbb{T}^N,0)$
Id
g

Figure 3

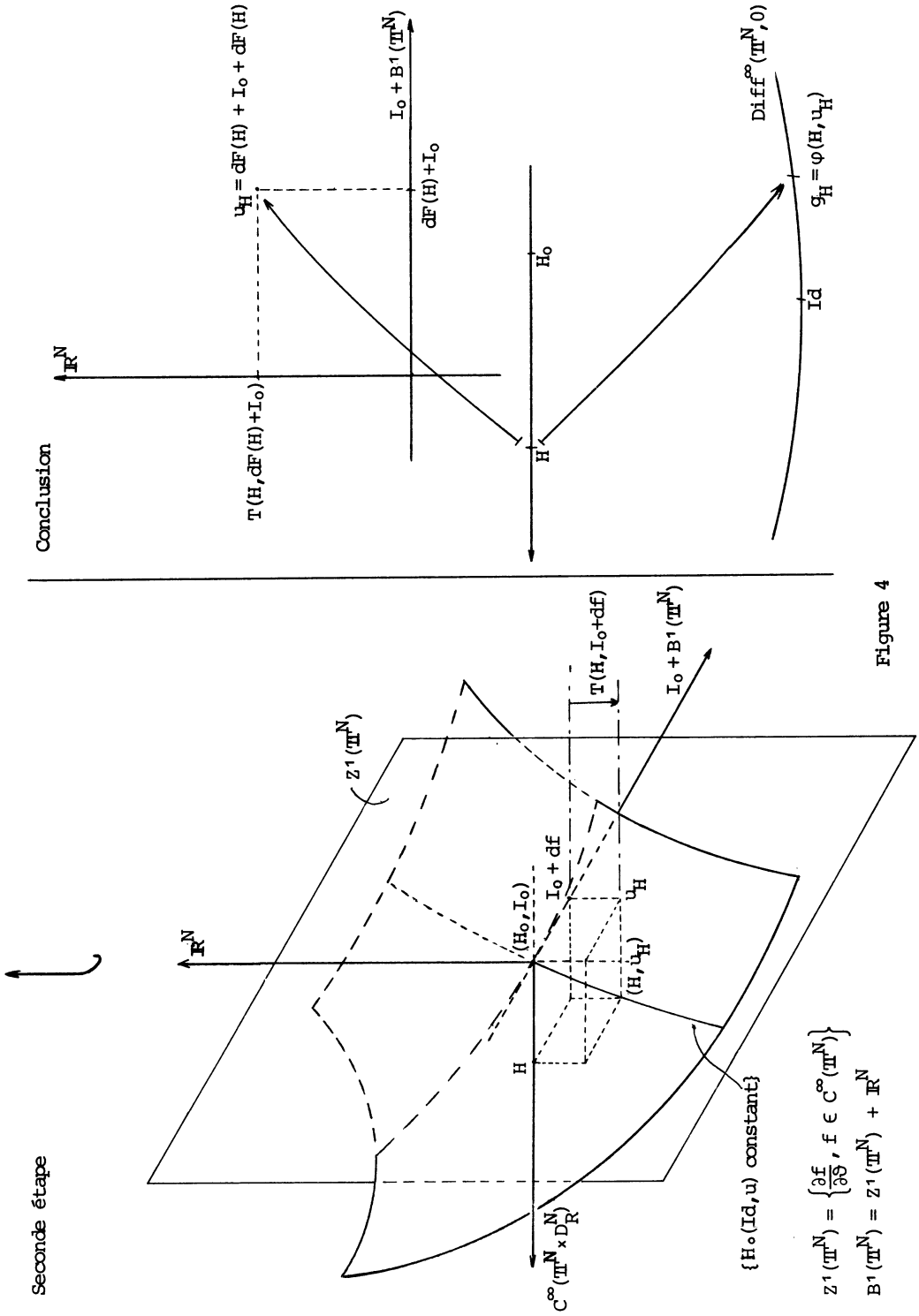
Conclusion
$\mathbb{R}^N$
$T(H, dF(H)+I_o)$
$u_H = dF(H) + I_o + dF(H)$
$I_o + B^1(\mathbb{T}^N)$
$dF(H)+I_o$
H'
H_o
$\mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N, 0)$
$g_H = \varphi(H, u_H)$
Id
Seconde étape
$\mathbb{R}^N$
$Z^1(\mathbb{T}^N)$
(H_o, I_o)
$I_o + df$
$T(H, I_o+df)$
$I_o + B^1(\mathbb{T}^N)$
u_H
(H, u_H)
H
$C^\infty(\mathbb{T}^N \times D^N_R)$
$\{H_o(Id, u)$ constant$\}$
$Z^1(\mathbb{T}^N) = \left\{\frac{\partial f}{\partial \theta}, f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)\right\}$
$B^1(\mathbb{T}^N) = Z^1(\mathbb{T}^N) + \mathbb{R}^N$

Figure 4

3.4. Démonstration du lemme 3.3.1

Posons :

$$\overline{X} : C^\infty(\mathbb{T}^N \times D_R^N) \times \mathcal{U} \times \mathrm{Diff}^\infty(\mathbb{T}^N,0) \longrightarrow X^\infty(\mathbb{T}^N)$$
$$(H,u,t,g) \longrightarrow X(H,u,t) - g_*\alpha = \frac{\partial H}{\partial I} \circ (\mathrm{Id},u+t) - \partial g \circ g^{-1}.\alpha \ .$$

C'est une bonne application C^∞ qui s'annule en $(H_0,I_0,0,\mathrm{Id})$. Le lemme découlera donc du théorème 2.4.2 lorsque nous aurons montré que la différentielle de $\overline{X}$ par rapport à t et g est inversible par une bonne application sur un voisinage de $(H_0,I_0,0,\mathrm{Id})$.

Un calcul très simple fournit l'expression de cette différentielle :

$$D_{3,4}\overline{X}(H,u,t,g) : \mathbb{R}^N \times C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N,0) \longrightarrow X^\infty(\mathbb{T}^N) \simeq C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N)$$
$$(\Delta t,\Delta g) \longmapsto \frac{\partial^2 H}{\partial I^2} \circ (\mathrm{Id},u+t).\Delta t$$
$$- [(\partial\Delta g) \circ g^{-1}.\alpha - \partial^2 g \circ g^{-1}(\partial(g^{-1}).(\Delta g \circ g^{-1}),\alpha)] \ .$$

Etant donné η dans $C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N)$, nous devons résoudre l'équation en $(\Delta t,\Delta g)$:

(3.4.1) $$D_{3,4}\overline{X}(U,u,t,g)(\Delta t,\Delta g) = \eta \ .$$

Pour cela, procédons, comme en 3.1.2, au changement d'inconnue :

$$\Delta g = \partial g.E \ ;$$

l'équation (3.4.1) s'écrit alors, en posant $M = \frac{\partial^2 H}{\partial I^2} \circ (\mathrm{Id},u+t)$:

$$M \circ g.\Delta t - \partial g.\partial E.\alpha = \eta \circ g \ ,$$

ou encore :

(3.4.2) $$\partial E.\alpha = -(\partial g)^{-1}.(\eta \circ g) + (\partial g)^{-1}.(M \circ g).\Delta t \ .$$

Posons :

$$A(H,u,t,g) = \int_{\mathbb{T}^N} [(\partial g)^{-1}.M \circ g](\vartheta)\, g\vartheta$$

et

$$B(g)\eta = \int_{\mathbb{T}^N} [(\partial g)^{-1}.(\eta \circ g)](\vartheta)\, d\vartheta \ ;$$

A et B ainsi définies sont de (bonnes) applications continues. Comme $\int_{\mathbb{T}^N} (\mathcal{L}_\alpha.E)(\vartheta)\, d\vartheta = 0$, nous avons nécessairement :

$$A(H,u,t,g).\Delta t = B(g)\eta \ .$$

Lorsque (H,u,t,g) est dans un voisinage ouvert V suffisamment petit de $(H_0,I_0,0,I)$, $A(H,u,t,g)$ est une matrice inversible (en effet : $A(H_0,I_0,0,\mathrm{Id}) = \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2}(I_0)$) et nécessairement :

$$\Delta t = A(H,u,t,g)^{-1}.B(g)\eta \ .$$

Le second membre de (3.4.2) est maintenant déterminé ; par construction, c'est un élément de $C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N)$, "bonne fonction continue" de

$(H,u,t,g,\eta) \in V \times C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N)$, dont l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{T}^N$ est nulle. D'après le lemme 1.6, (3.4.2) possède une unique solution E dans $C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R}^N,0)$, et les majorations (1.6.1) montrent que E aussi est une "bonne fonction continue" de (H,u,t,g,η) . Il en est de même de $\Delta g = \partial g.E$.

Nous avons ainsi montré que (3.4.1) possède une unique solution $(\Delta t,\Delta g)$, qui dépend de manière convenable de H , u , t , g et η . Cela termine la démonstration du lemme 3.3.1.

Remarque 3.4.– Au prochain paragraphe, il nous faudra connaître l'expression de la différentielle en la seconde variable de T , en (H_0,I_0) . Pour l'obtenir, différencions l'identité :

$$\overline{X}(H,u,T(H,u),\varphi(H,u)) = 0$$

par rapport à u au point $(H,u) = (H_0,I_0)$. Nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \circ (Id,I_0).[\Delta u + D_2T(H_0,I_0)\Delta u] - \partial(D_2\varphi(H_0,I_0).\Delta u).\alpha = 0 \ ,$$

puis, en prenant l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{T}^N$:

$$D_2T(H_0,I_0)\Delta u = -\int_{\mathbb{T}^N} \Delta u(\vartheta)\,d\vartheta \ .$$

3.5. Démonstration du lemme 3.3.2

Posons :

$$\begin{aligned} G : V' \times \mathbb{R} &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^N) \\ (H,f,E) &\longrightarrow G(H,f) - E = H_0(Id,df + I_0 + T(H,df + I_0)) - E \ . \end{aligned}$$

C'est une bonne application C^∞ qui s'annule en $(H_0,0,H_0(I_0))$. Comme $G(H,f)$ est une fonction constante si et seulement s'il existe E tel que $G(H,f,E) = 0$, le lemme découlera du théorème 2.4.2 lorsque nous aurons montré que la différentielle de G par rapport à f et E est inversible par une bonne application continue sur un voisinage de $(H_0,0,H_0(I_0))$.

Un calcul très simple fournit l'expression de cette différentielle :

$$\begin{aligned} D_{2,3}G(H,f,E) : C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R},0) \times \mathbb{R} &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^N) \\ (\Delta f,\Delta E) &\longrightarrow \widetilde{D}_{2,3}G(H,f,E)\ (\Delta f,\Delta E) + K(H,f,E)(\Delta f,\Delta E) \ , \end{aligned}$$

où

$$\widetilde{D}_{2,3}G(H,f,E)(\Delta f,\Delta E) = \langle \frac{\partial H}{\partial I} \circ (Id,df + I_0 + T(H,df + I_0)),d\Delta f\rangle - \Delta E \ ,$$

$$K(H,f,E)\ (\Delta f,\Delta E) = \langle \frac{\partial H}{\partial I} \circ (Id,df + I_0 + T(H,df + I_0)),D_2T(H,df + I_0)d\Delta f\rangle \ .$$

Pour inverser $D_{2,3}G(H,f,E)$, nous allons appliquer le lemme 3.6.3, avec :

- $\mathbb{E} = C^\infty(\mathbb{T}^N \times D_R^N) \times C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R},0) \times \mathbb{R}$; $\mathbb{F} = C^\infty(\mathbb{T}^N,\mathbb{R},0) \times \mathbb{R}$; $\mathbb{G} = C^\infty(\mathbb{T}^N)$;
- $\Omega = V' \times \mathbb{R}$; $L = \widetilde{D}_{2,3}G$ et $\ell = K$ (ce sont de bonnes applications linéaires en $\mathbb{F}$)

- $x_0 = (H_0, 0, H_0(I_0))$.

La conclusion du lemme 3.6.3 sera exactement l'invertibilité cherchée de $D_{2,3}G$ sur un voisinage de $(H_0, 0, H_0(I_0))$.

Montrons donc que les hypothèses de ce lemme sont satisfaites :

a) $L = \widetilde{D}_{2,3}G$ est inversible sur $\Omega = V' \times \mathbb{R}$ par une bonne application C^1 .

En effet, pour tout (H,f) dans V' , nous avons :

$$\frac{\partial H}{\partial I} \circ (Id, df + I_0 + T(H, df + I_0)) = \varphi(H, df + I_0)_* \alpha ,$$

et donc, en posant $g = \varphi(H, df + I_0)$:

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_{2,3}G(H,f,E).(\Delta f, \Delta E) &= \langle g_* \alpha, d\Delta f \rangle - \Delta E \\ &= (d(\Delta f \circ g).\alpha - \Delta E) \circ g^{-1} . \end{aligned}$$

Par conséquent, η étant donné dans $C^\infty(\mathbb{T}^N)$, l'équation d'inconnue $(\Delta f, \Delta E)$:

$$\widetilde{D}_{2,3}G(H,f,E)(\Delta f, \Delta E) = \eta$$

est équivalente à :

$$d(\Delta f \circ g).\alpha - \Delta E = \eta \circ g .$$

D'après le lemme 1.6, elle admet comme unique solution $(\Delta f, \Delta E)$ dans $C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}, 0) \times \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \Delta E = -\displaystyle\int_{\mathbb{T}^N} \eta \circ g(\vartheta)\, d\vartheta \\ \Delta f = \left[\mathcal{L}_\alpha^{-1} (\eta \circ g - \displaystyle\int_{\mathbb{T}^N} \eta \circ g(\vartheta)\, d\vartheta) \right] \circ g^{-1} \end{cases}$$

Compte tenu des majorations (1.6.1), cela établit le résultat requis.

b) Pour établir que l'application K possède la propriété (P), factorisons la de la manière suivante :

$$K(H,f,E) = A(H,f,E).K'(H,f,E)$$

où

$$\begin{aligned} K'(H,f,E) \ : \ C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}, 0) \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ (\Delta f, \Delta E) &\longmapsto D_2T(H, df + I_0).\delta\Delta f \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A(H,f,E) \ : \ \mathbb{R}^N &\longrightarrow C^\infty(\mathbb{T}^N) \\ J &\longmapsto \langle \frac{\partial H}{\partial I} \circ (Id, df + I_0 + T(H, df + I_0)), J \rangle . \end{aligned}$$

$K' = ((x, \Delta f, \Delta E) \longmapsto K'(x)(\Delta f, \Delta E))$ et $A = ((x,J) \longmapsto A(x)J)$ sont de bonnes applications C^∞ sur, respectivement, $V' \times \mathbb{R} \times C^\infty(\mathbb{T}^N, \mathbb{R}, 0)$ et $V' \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Comme K' prend ses valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie, K' vérifie donc la propriété (P) sur un voisinage de $(H_0, 0, H_0(I_0))$. Le lemme 3.6.1 montre alors qu'il en va de même de $K = AK'$.

c) $\ell(x_0) = K(H_0, 0, H_0(I_0))$ est nul. En effet :

$$K_0(H_0,0,H_0(I_0)).(\Delta f,\Delta E) = \langle \alpha, D_2T(H_0,I_0)d\Delta f\rangle ,$$

et, d'après la remarque 3.4 :

$$D_2T(H_0,I_0).d\Delta f = 0 .$$

3.6. Appendice

Soient $(\mathbb{E},(\| \|_n))$, $(\mathbb{F},(\| \|_n))$ et $(\mathbb{G},(\| \|_n))$ trois espaces de Fréchet échelonnés, Ω un ouvert de $\mathbb{E}$, et k une application linéaire en la seconde variable :

$$k : \Omega \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{G}$$
$$(x,y) \longmapsto k(x)y .$$

Nous dirons que k vérifie la *propriété* (P) *sur* Ω s'il existe des entiers naturels s et ℓ , et une suite $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de constantes positives telles que :

$\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall (x,\tilde{x}) \in \Omega^2$, $\forall y \in \mathbb{F}$,

(P_1) $$\|k(x)y\|_m \leq A_m(1+\|x\|_{m+s})\|y\|_\ell$$

(P_2) $$\|k(x)y-k(\tilde{x})y\|_m \leq A_m(\|x-\tilde{x}\|_{m+s} + \|x\|_{m+s}\|x-\tilde{x}\|_s)\|y\|_\ell$$

Exemple.— Si k est une bonne application C^1 sur $\Omega \times \mathbb{F}$ et si $k(\Omega)\mathbb{F}$ est dans un sous-espace de dimension finie de $\mathbb{G}$, alors k vérifie la propriété (P) au voisinage de tout point de Ω (en effet, toutes les normes $\| \|_n$ sont alors équivalentes sur $k(\Omega)\mathbb{F}$).

Lemme 3.6.1.— *Conservons les notations précédentes. Si* $(\mathbb{H},(\| \|_n))$ *désigne un quatrième espace de Fréchet échelonné et si* A *est une bonne application* C^1 *linéaire en la seconde variable :*

$$A : \Omega \times \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{H}$$
$$(x,z) \longmapsto A(x)z ,$$

alors l'application :

$$Ak : \Omega \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{H}$$
$$(x,y) \longmapsto A(x)k(x)y$$

vérifie la propriété (P) *au voisinage de tout point de* Ω .

Lemme 3.6.2.— *Soient* $\mathbb{E}$ *et* $\mathbb{F}$ *deux espaces de Fréchet échelonnés,* Ω *un ouvert de* $\mathbb{E}$ *et* $k : \Omega \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$ *une application linéaire en la seconde variable vérifiant la propriété* (P) *sur* Ω .

Soit $x_0 \in \Omega$. *Si* $k(x_0) = 0$, *alors* x_0 *possède un voisinage ouvert* Ω' *dans* Ω *tel que, en tout point* x *de* Ω' , $Id_F + k(x)$ *soit inversible et que :*

$$(Id+k)^{-1} : \Omega' \times \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}$$
$$(x,y) \longrightarrow (Id+k(x))^{-1}.y$$

soit une bonne application continue.

Lemme 3.6.3.– *Soient* $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ *et* $\mathbb{G}$ *trois espaces de Fréchet échelonnés,* Ω *un ouvert de* $\mathbb{E}$, x_0 *un point de* Ω , *et* L *et* ℓ *deux applications linéaires en la seconde variable de* $\Omega \times \mathbb{F}$ *vers* $\mathbb{G}$.

Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :

a) *En tout point* x *de* Ω , $L(x)$ *est inversible, et l'application :*

$$\begin{aligned} L^{-1} : \Omega \times \mathbb{G} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (x,y) &\longrightarrow L(x)^{-1}z \end{aligned}$$

est une bonne application C^1 .

b) *L'application* ℓ *vérifie la propriété* (P) *au voisinage de* x_0 .

c) $\ell(x_0) = 0$.

Alors x_0 *admet un voisinage ouvert* Ω' *dans* Ω , *tel que, en tout point* x *de* Ω' , $L(x) + \ell(x)$ *soit inversible et que :*

$$\begin{aligned} (L+\ell)^{-1} : \Omega' \times \mathbb{G} &\longrightarrow \mathbb{F} \\ (x,z) &\longrightarrow (L(x) + \ell(x))^{-1}z \end{aligned}$$

soit une bonne application continue.

Le lemme 3.6.1 se démontre sans difficulté à partir des inégalités vérifiées par les bonnes applications A et DA .

Pour établir le lemme 3.6.2, on remarque que, lorsque k satisfait à (P_1) et (P_2), $k(x)$ se prolonge en une application du complété $\hat{\mathbb{F}}_\ell$ de $(\mathbb{F}, \| \ \|_\ell)$ à valeurs dans $\mathbb{F}$ et que $k(x) \in L(\hat{\mathbb{F}}_\ell)$ est fonction continue de x (dans la topogie normique) ; le lemme découle alors de l'identité

$$(Id + k(x))^{-1} = Id - k(x)(Id + k(x))^{-1} ,$$

vérifiée dès que $Id + k(x)$ est inversible dans $L(\hat{\mathbb{F}}_\ell)$.

Le lemme 3.6.3 est une conséquence des lemmes 3.6.1 et 3.6.2.

BIBLIOGRAPHIE

A. *Mécanique hamiltonienne et géométrie symplectique*

On trouvera des exposés modernes de la mécanique analytique dans :

[1] R. ABRAHAM and J.E. MARSDEN - Foundations of Mechanics, 2nd ed., Benjamin/Cummings, Reading, Mass., 1978.

[2] V.I. ARNOLD - Méthodes mathématiques de la mécanique classique, MIR, Moscou, 1974.

Sur la mécanique hamiltonienne avant la "théorie K.A.M.", on pourra consulter les ouvrages classiques :

[3] C.G.J. JACOBI - Vorlesungen über Dynamik, Gesammelte Werke, VIII (Supplementband), Berlin, 1884 - Chelsea, New York, 1969.

[4] H. POINCARÉ - Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 3 vol., Gauthier-Villars, Paris, 1892-1899.

[5] E.T. WHITTAKER - A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies, 4th ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1959.

[6] G.D. BIRKHOFF - Dynamical systems, Colloq. Publ. IX, 2nd ed., Amer. Math. Soc., Providence, R.I, 1966.

Sur les questions d'intégrabilité, on pourra aussi se reporter à :

[7] V.V. KOZLOV - *Integrability and non-integrability in Hamiltonian mechanics*, Russian Math. Surveys 38:1(1983), 1-76.

[8] J. MOSER - *Various aspects of integrable Hamiltonian systems*, Progress in Math. 8, Birkhäuser, Boston (1980), 233-289.

B. *"Théorie K.A.M." et problèmes de petits diviseurs*

[9] V.I. ARNOLD - *Small denominators I. On the mapping of a circle into itself*, Transl. Amer. Math. Soc. serie 2, 46(1965), 213-284.

[10] V.I. ARNOLD - *Small denominators II. Proof of a theorem of A.N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motion under small perturbations of the Hamiltonian*, Russian Math. Surveys 18, n° 5(1963), 9-36.

[11] V.I. ARNOLD - *Small denominators III. Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics*, Russian Math. Surveys 18, n° 6(1963), 85-193.

[12] V.I. ARNOLD - Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires, MIR, Moscou, 1978.

[13] V.I. ARNOLD et A. AVEZ - Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

[14] J. BELLISARD, R. LIMA and D. TESTARD - *A metal-insulator transition for the almost Mathieu model*, Comm. Math. Phys. 88(1983), 207-234.

[15] A. CHENCINER - *La dynamique au voisinage d'un point fixe elliptique conservatif : de Poincaré et Birkhoff à Aubry et Mather*, Séminaire Bourbaki 1983-84, n° 622, Astérisque 121-122(1985), 147-170.

[16] A. CHENCINER - *Bifurcations de points fixes elliptiques*, preprint Université Paris 7 (1984), à paraître aux Publ. Math. IHES.

[17] L. CHIERCHIA and G. GALLAVOTTI - *Smooth prime integrals for quasi-integrable Hamiltonian systems*, Il Nuovo Cimento 67B(1982), 277-295.

[18] Y. COLIN de VERDIÈRE - *Quasi-modes sur les variétés riemanniennes*, Invent. Math. 43(1977), 15-52.

[19] E.I. DINABURG and Ya.G. SINAI - *The one-dimensional Schrödinger equation with a quasi-periodic potential*, Funct. Anal. Appl. 9(1976), 279-289.

[20] R. DOUADY - *Applications du théorème des tores invariants*, Thèse de 3e cycle, Université Paris 7 (juin 1982).

[21] R. DOUADY - *Une démonstration directe de l'équivalence des théorèmes de tores invariants pour difféomorphismes et champs de vecteurs*, C.R. Acad. Sci. Paris 295(1982), 201-204.

[22] R. DOUADY et P. LE CALVEZ - *Exemple de point fixe elliptique non stable en dimension* 4, C.R. Acad. Sci. Paris 296(1983), 895-898.

[23] S.M. GRAFF - *On the continuation of hyperbolic invariant tori for Hamiltonian systems*, Jour. of Diff. Equ. 15(1974), 1-69.

[24] M.R. HERMAN - *Sur le groupe des difféomorphismes du tore*, Ann. de l'Institut Fourier 23(2)(1973), 75-86.

[25] M.R. HERMAN - *Résultats récents sur la conjugaison différentiable*, Proc. of the Internat. Congress of Mathematicians, Helsinki (1978), 811-820.

[26] M.R. HERMAN - *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Publ. Math. IHES 49(1979), 5-234.

[27] M.R. HERMAN - *Démonstration du théorème des courbes translatées par les difféomorphismes de l'anneau ; démonstration du théorème des tores invariants*, manuscrit (1980).

[28] M.R. HERMAN - *Une méthode pour minorer les exposants de Lyapounov*, Preprint Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique (1982).

[29] M.R. HERMAN - *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau*, Volume I : Astérisque 103-104(1983) ; Volume II : Preprint Centre de Math. de l'Ecole Polytechnique, à paraître chez Astérisque.

[30] M.R. HERMAN - *Exemples de fractions rationnelles ayant une orbite dense sur la sphère de Riemann*, Bull. Soc. Math. France 112(1984), 93-142.

[31] M.R. HERMAN - *Simple proof of local conjugacy theorems for diffeomorphisms of the circle with almost every rotation number*, Preprint, MSRI, Berkeley (1984).

[32] A.N. KOLMOGOROV - *Sur la conservation des orbites quasi-périodiques lors d'une petite perturbation du hamiltonien*, (en russe), Dokl. Akad. Nauk 98 n° 4(1954), 527-530.

[33] A.N. KOLMOGOROV - *Théorie générale des systèmes dynamiques et mécanique classique*, (en russe), Proc. of the 1954 Intern. Congress, North Holland, Amsterdam, V1 315-333. Traduction anglaise dans [1], 741-757.

[34] V.F. LAZUTKIN - *The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain*, Math. USSR Izvestija 7(1973), 185-214.

[35] B.B. LIEBERMAN - *Existence of quasiperiodic solutions in the Three-Body-Problem*, Celestial Mechanics 3(1971), 408-426.

[36] B.B. LIEBERMAN - *Quasiperiodic solutions of Hamiltonian systems*, Jour. of Diff. Equ. 11(1972), 109-137.

[37] L. MARKUS and K.R. MEYER - *Generic Hamiltonian systems are neither integrable nor ergodic*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. 144(1974).

[38] J. MARTINET - *Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après A.D. Brjuno)*, Séminaire Bourbaki 1980-81, n° 564, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math. 901(1981), 55-70.

[39] J. MOSER - *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. (1962), 1-20.

[40] J. MOSER - *A rapidly convergent iteration method and nonlinear partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 20(1966), I : 265-315, II : 499-535.

[41] J. MOSER - *Convergent series expansions for quasi-periodic motions*, Math. Ann. 169(1967), 136-176.

[42] J. MOSER - *Lectures on Hamiltonian systems*, Memoirs Amer. Math. Soc. 81(1968), 1-60.

[43] J. MOSER - *On the construction of almost periodic solutions for ordinary differential equations*, Proc. of the Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics, Tokyo (1969), 60-67.

[44] J. MOSER - Stable and random motions in dynamical systems, Ann. Math. Studies n° 77, Princeton Univ. Press, Princeton N.J., 1973.

[45] J. MOSER - *Is the solar system stable ?*, Math. Intelligencer 1(1978), 65-71.

[46] J. MOSER and J. PÖSCHEL - *An extension of a result by Dinaburg and Sinai on quasiperiodic potential*, Comment. Math. Helvetici 59(1984), 39-85.

[47] J. PÖSCHEL - *Über invariante Tori in differenzierbaren Hamiltonschen Systemen*, Bonner Mathematische Schriften 120(1980).

[48] J. PÖSCHEL - *Integrability of Hamiltonian systems on Cantor sets*, Comm. Pure Appl. Math. 35(1982), 653-695.

[49] R.C. ROBINSON - *Generic properties of conservative systems*, Amer. J. of Math. 92(1970), I : 562-603, II : 897-906.

[50] H. RÜSSMANN - *Kleine Nenner I : Über invarianten Kurven differenzierbarer Abbildungen eines Kreisringes*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. (1970), 67-105.

[51] H. RÜSSMANN - *Kleine Nenner II : Bemerkungen zur Newtonschen Methode*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. (1972), 1-10.

[52] H. RÜSSMANN - *On optimal estimates for the solutions of linear partial differential equations of first order with constant coefficients on the torus*, Lect. Notes in Physics 38(1975), 598-624.

[53] H. RÜSSMANN - *Note on sums containing small divisors*, Comm. Pure Appl. Math. 29(1976), 755-758.

[54] H. RÜSSMANN - *On the one-dimensional Schrödinger equation with a quasi-periodic potential*, Ann. New York Acad. Sci. 357(1980), 90-107.

[55] H. RÜSSMANN - *On the existence of invariant curves of twist mappings of an annulus*, Lect. Notes in Math. 1007(1983), 677-712.

[56] C.L. SIEGEL - *Iteration of analytic functions*, Ann. of Math. 43(1942), 607-612.

[57] C.L. SIEGEL - *Über die analytische Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. (1952), 21-30.

[58] C.L. SIEGEL and J.K. MOSER - Lectures on Celestial Mechanics, Springer, Grundlehren Bd. 187(1971).

[59] B. SIMON - *Almost periodic Schrödinger operator : a review*, Adv. Appl. Math. 3(1982), 463-490.

[60] N.V. SVANIDZE - *Small perturbations of an integrable dynamical system with an integral invariant*, Proc. Steklov Inst. of Math. n° 2(1981), 127-151.

[61] W. THURSTON - *Foliations and groups of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc. 80(1974), 304-307.

[62] J.C. YOCCOZ - *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne*, Ann. Sci. E.N.S. 4e s., 17(1984), 333-359.

[63] E. ZEHNDER - *Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems*, Comm. Pure Appl. Math., I : 28(1975), 91-140, II : 29(1976), 49-113.

C. *Théorèmes des fonctions implicites*

[64] M.L. GROMOV - *Smoothing and inversion of differential operators*, Math. USSR Sbornik 17(1972), 381-434.

[65] R.S. HAMILTON - *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Preprint, Cornell University, 1974.

[66] R.S. HAMILTON - *The inverse function theorem of Nash and Moser*, Bull. Amer. Math. Soc. 7(1982), 65-222.

[67] L. HÖRMANDER - *The boundary problem of physical geodesy*, Arch. Rat. Mech. Anal. 62(1976), 1-52.

[68] L. HÖRMANDER - *Implicit function theorems*, Lectures at Stanford University, Summer Quarter 1977.

[69] L. HÖRMANDER - *On the Nash-Moser implicit function theorem*, Preprint.

[70] S. LOJASIEWICZ and E. ZEHNDER - *An inverse function theorem in Fréchet spaces*, Jour. of Funct. Anal. 33(1979), 165-174.

[71] J. MOSER - *A new technique for the construction of solutions of non-linear differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 47(1961), 1824-1831.

[72] J. NASH - *The embedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Math. 63 (1956), 20-63.

[73] F. SERGERAERT - *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications*, Ann. Sci. E.N.S. 4e s., 5(1972), 599-660.

[74] E. ZEHNDER - *Moser's implicit function theorem in the framework of analytic smoothing*, Math. Annalen 219(1976), 105-121.

Jean-Benoît BOST

Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
F-75230 PARIS CEDEX 05