

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

P. DELIGNE

Sommes de Gauss cubiques et revêtements de $SL(2)$

Séminaire N. Bourbaki, 1980, exp. n° 539, p. 244-277

http://www.numdam.org/item?id=SB_1978-1979__21__244_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOMMES DE GAUSS CUBIQUES ET REVÊTEMENTS DE $SL(2)$,

D'APRÈS S.J. PATTERSON

par P. DELIGNE

0. Introduction.

Une somme de Gauss est le produit scalaire d'un caractère additif et d'un caractère multiplicatif d'un corps fini. Si $\mathbb{F}_q$ est un corps fini à q éléments, χ un caractère de $\mathbb{F}_q^*$, et ψ un caractère du groupe additif de $\mathbb{F}_q$, on pose

$$g(\chi, \psi) = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^*} \chi(x) \psi(x).$$

On suppose en principe χ et ψ non triviaux; la somme $g(\chi, \psi)$ est alors de valeur absolue $q^{1/2}$. On parle de somme n -ique si χ est d'ordre n . Pour $a \in \mathbb{F}_q^*$, on a

$$(0.1) \quad g(\chi, \psi(ax)) = \chi(a)^{-1} g(\chi, \psi)$$

En particulier, si χ est d'ordre n , $g(\chi, \psi)^n$ est indépendant de ψ

A chaque nombre premier $p \neq 2$, on peut attacher la somme de Gauss quadratique

$$g_p = \sum_{x \in \mathbb{F}_p^*} \left(\frac{x}{p}\right) \exp(2\pi i x/p)$$

où $\left(\frac{x}{p}\right)$ est le symbole de Legendre : $+1$ si x est un carré mod p et -1 sinon.

Cette somme a été calculée par Gauss : c'est $\sqrt{p}$ ou $i\sqrt{p}$ selon que $p \equiv 1$ ou $-1 \pmod{4}$.

Si on veut, de même, attacher une somme de Gauss n -ique à un idéal premier $\underline{p}$ de l'anneau des entiers $\mathcal{O}$ d'un corps de nombres F , il s'agit de définir un caractère multiplicatif, et d'un caractère additif du corps résiduel $\mathcal{O}/\underline{p}$.

Supposons que F contienne une racine primitive n ième de l'unité, et posons $\mu := \mu_n(F)$. Si $\underline{p}$ est premier à n , on a $\mu \xrightarrow{\sim} \mu_n(\mathcal{O}/\underline{p})$.

Notons t l'isomorphisme réciproque, et posons $q = N\underline{p}$. On note $(x/\underline{p})_n$, ou simplement $(x/\underline{p})$, le caractère $t(x^{(q-1)/n})$ de $(\mathcal{O}/\underline{p})^*$ à valeurs dans μ . Plus généralement, pour $\underline{a}$ un idéal de $\mathcal{O}$ premier à x , de factorisation en idéaux premiers $\underline{a} = \prod \underline{p}_i^{a_i}$, on note $(x/\underline{a})_n$, ou simplement $(x/\underline{a})$, le produit $\prod (x/\underline{p}_i)^{a_i}$ (pour x premier à $\underline{a}$). Pour $\underline{a} = (a)$, on écrit aussi (x/a) . Le lien avec le symbole de Hilbert (§2) est la formule

$$(x/a) = \prod_{v|a} (x, a)_v$$

La loi de réciprocité pour le symbole de Hilbert fournit une loi de réciprocité pour ces symboles.

(*) texte remanié en juillet 1979.

Le symbole (x/a) est un caractère de $(\mathbb{Q}/a)^*$ (et déjà de $(\mathbb{Q}/\pi_{\underline{p}_1})^*$) à valeurs dans μ . Pour en déduire un caractère à valeurs complexes, il suffit de le composer avec un isomorphisme e de μ avec le groupe des racines n ièmes de l'unité de $\mathbb{C}$.

Nous noterons $\underline{e}$ le caractère $\exp(2\pi i x)$ de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, le caractère induit sur $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, ceux qui s'en déduisent sur les $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, via l'isomorphisme $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_p \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, et ceux qui s'en déduisent par des traces : par exemple le caractère $\exp(2\pi i \operatorname{Tr}_{F/\mathbb{Q}} x)$ de F .

Pour construire des caractères additifs des corps résiduels, on dispose de deux méthodes.

1ère méthode : Pour $\underline{p}$ un idéal de $\mathbb{Q}$, de corps résiduel $\mathbb{Q}/\underline{p}$ de caractéristique p , on définit le caractère additif ψ comme composé de la trace : $\mathbb{Q}/\underline{p} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, et du caractère $\underline{e}(x/p)$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

2ème méthode : Nous ne l'explicitons que dans le cas particulier suivant : $n = 3$, et F est le corps $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{-3})$ des racines cubiques de l'unité. Dans toute l'introduction, sauf mention expresse du contraire nous ne considérerons plus que ce cas. Chaque idéal $\underline{a}$ premier à 3 a un unique générateur a congru à 1 mod 3 et on prend comme caractère additif de $\mathbb{Q}/\underline{a}$ le caractère $\underline{e}(a^{-1}x)$.

Pour $\underline{p}$ premier, les sommes de Gauss cubiques obtenues en utilisant les caractères additifs de l'une ou l'autre méthode coïncident : pour $\underline{p} = (\pi)$, avec $\pi \equiv 1(3)$, un calcul facile (cf(0.1)) montre que l'une est le produit de l'autre par $(-1/\pi)$ si $\underline{p}$ est de degré 2, et par $(\bar{\pi}/\pi)$ si $\underline{p}$ est de degré 1. Ces racines cubiques de l'unité sont triviales : $(-1/\pi)$ parce que $(-1)^2 = 1$, et $(\bar{\pi}/\pi)$ pour être réelle : on a à la fois $(\bar{\pi}/\pi)^- = (\pi/\bar{\pi})$ (par transport de structure) et $(\bar{\pi}/\pi)^- = (\pi/\bar{\pi})$ (réciprocité cubique).

La seconde méthode permet d'attacher une somme, encore dite "de Gauss", à un idéal $\underline{a}$ non nécessairement premier :

Pour $\underline{a} = (a)$, avec $a \equiv 1(3)$, on pose

$$(0.2) \quad g(\underline{a}) = \sum_{x \in (\mathbb{Q}/\underline{a})^*} (x/\underline{a}) \underline{e}(a^{-1}x).$$

On a :

(0.3) Si $\underline{a}$ est sans facteur carré, $g(\underline{a}) = (Na)^{\frac{1}{2}}$. Sinon, $g(\underline{a}) = 0$.

(0.4) Multiplicativité tordue : Si $\underline{a} = \underline{a}' \underline{a}''$, avec $\underline{a}'$ et $\underline{a}''$ premiers entre eux, de générateurs a' et a'' congrus à 1 mod 3, on a

$$g(\underline{a}) = (a'/a'')(a''/a') g(a') g(a'')$$

La réciprocité cubique assure que $2(a'/a'') = (a''/a')$. On peut donc remplacer le facteur $(a'/a'')(a''/a')$ par $(a'/a'')^2$.

Pour F et n quelconques, d'après Weil [22], la puissance $n^{\text{ième}}$ de la somme de Gauss $g(p)$, comme fonction de p , est un caractère de Hecke algébrique. On notera que cette puissance $n^{\text{ième}}$ ne dépend pas du choix du caractère additif. Si on considère ce caractère de Hecke comme connu, il s'agit, pour calculer la somme $g(\underline{p})$ elle-même, de déterminer quelle racine $n^{\text{ième}}$ de $g(p)^n$

C'est ce que fait Gauss dans le cas quadratique, et, pour n pair, $n = 2m$, son résultat ramène le calcul de $g(p)^m$ à celui d'un caractère de Hecke algébrique. On dispose aussi de résultats p -adiques (Stickelberger, récemment précisé par Gross-Koblitz [4]), et, pour $n = 3, 4$ et $F = \mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$, d'une expression en terme de produit de valeurs de division de fonctions elliptiques (Matthews [13]).

Dans [19], Patterson montre que l'argument $g(\underline{a})/|g(\underline{a})|$ de $g(\underline{a})$, pour $\underline{a}$ premier à 3 et sans facteur carré, est équidistribué sur le cercle unité. Il utilise le critère de Weyl, et doit donc prouver que pour T entier non nul, on a

$$(0.5) \quad \left| \sum_{\substack{\underline{a} \leq x}} (g(\underline{a})/|g(\underline{a})|)^T \right| \leq o(x).$$

Le théorème taubérien de Wiener-Ikehara permet de déduire une telle estimation de l'holomorphie pour $\text{Re } s \geq 1$ de la série de Dirichlet

$$(0.6) \quad \sum (g(\underline{a})/|g(\underline{a})|)^T \cdot N(\underline{a})^{-s}.$$

L'étude de ces séries est le coeur du problème.

En principe, les mêmes arguments s'appliquent au produit $g(\underline{a})\chi(\underline{a})$, pour χ un caractère de Hecke. La conclusion devient la suivante. Ne considérons que les idéaux sans facteur carré $\underline{a} = (a)$, avec $a \equiv 1(3)$, tels que l'argument de a soit dans un intervalle I du cercle unité. L'argument de $g(\underline{a})^3 = -a^2\bar{a}$ est alors dans l'intervalle opposé $(-1)I$, et celui de $g(\underline{a})$ dans $\{z | z^3 \in (-1)I\}$, ie dans la réunion de 3 intervalles disjoints $I_i (i = 1, 2, 3)$. On trouve que l'argument de $g(\underline{a})$ est une fois sur trois dans chacun d'eux : pour $N_{\underline{a}} < X$, le nombre de fois qu'il est dans l'un d'eux est $\frac{1}{3}(\text{nombre de } \underline{a}) + o(X)$. La même conclusion vaut si impose de plus à a une condition de congruence. On peut interpréter ce résultat comme signifiant qu'il n'y a pas de règle "simple", même statistique, pour déterminer l'argument de la somme de Gauss.

Dans [5], Heath-Brown et Patterson prouvent des résultats analogues pour la somme de Gauss cubique $g(p)$ (p premier) ; ceci contredit une suggestion de Kummer, imprudemment élevée au rang de conjecture par Hasse. Un rôle essentiel est encore joué par la série de Dirichlet (0.6) pour $T = 1$. Après un décalage en s , elle se récrit

$$(0.7) \quad \sum g(\underline{a}) N(\underline{a})^{-s};$$

c'est d'elle que nous parlerons.

La série de Dirichlet (0.7) n'est pas multiplicative. Nous allons donner à la multiplicité tordue (0.4) une écriture adélique. Notations : voir 0.0 et le §2 Soient $\mathbb{A}^f$ l'anneau des adèles à distance finie de F et $(\cdot, \cdot)$ le symbole de Hilbert cubique sur $\mathbb{A}^{f*}$. On définit une extension centrale $\mathbb{A}^{f* \sim}$ de $\mathbb{A}^{f*}$ par μ , munie d'une section $a \longrightarrow [a] = (a, 1)$, en posant $(a, \zeta')(b, \zeta'') = (ab, (a, b)\zeta'\zeta'')$. On a

$$(0.8) \quad [a][b] = [ab] \cdot (a, b).$$

C'est l'extension définie par le 2-cocycle (a, b) . La loi de réciprocité pour les symboles de Hilbert assure que $[\alpha][\beta] = [\alpha\beta]$ pour $\alpha, \beta \in F^* : [\]$ scinde

l'extension au-dessus de F^* . Pour chaque place finie v de F , on définit de même une extension $F_v^{*\sim}$ de F_v^* par μ ; si $v \nmid 3$, on a $[a][b] = [ab]$ pour $a, b \in \mathcal{O}_v^*$; si $v \mid 3$ il faut supposer $a, b \equiv \pm 1 \pmod{3}$. Le produit restreint des $F_v^{*\sim}$, rel. aux $[\mathcal{O}_v^*]$, est une extension de $\mathbb{A}^{f*}$ par $\mu^{(\Sigma)}$ (Σ l'ensemble des places finies). Poussant par l'application "produit" : $\mu^{(\Sigma)} \longrightarrow \mu$, on trouve l'extension $\mathbb{A}^{f*\sim}$.

Pour ϵ un caractère de μ , une fonction f sur $F_v^{*\sim}$ (resp. $\mathbb{A}^{f*\sim}$) sera appelée une ϵ -fonction si $f(\zeta x) = \epsilon(\zeta) f(x)$ pour $\zeta \in \mathbb{U}$. Une ϵ -fonction est uniquement déterminée par sa restriction à $[F_v^*]$ (resp. $[\mathbb{A}^{f*}]$), et on l'identifiera souvent à sa restriction : on décrira son support comme une partie de F^* (resp. $\mathbb{A}^{f*}$)...

Soit, pour chaque v , une ϵ -fonction f_v sur $F_v^{*\sim}$, invariante à droite par un sous-groupe ouvert de $F_v^{*\sim}$. On suppose que, pour presque tout v , f_v est invariante à droite par $[\mathcal{O}_v^*]$, et vaut 1 sur $[\mathcal{O}_v^*]$. Sous ces hypothèses, le produit des f_v — une fonction sur le produit restreint des $F_v^{*\sim}$ — provient d'une ϵ -fonction f sur $\mathbb{A}^{f*\sim}$, invariante à droite par un sous-groupe ouvert. On appellera multiplicative une ϵ -fonction ainsi obtenue, et on écrira $f = \prod f_v$.

(0.9) Exemple : Prenons pour ϵ le prolongement identique de μ . Pour $v \nmid 3$, soit f_v la ϵ -fonction sur $F_v^{*\sim}$, de support $\{x \mid v(x) = 0 \text{ ou } 1\}$, valant 1 sur $[\mathcal{O}_v^*]$, et donnée sur les uniformisantes par

$$f_v([a]) = \sum_{(\mathcal{O}_v/(a))^*} (x, a) \underline{\underline{=}} (a^{-1}x)$$

Pour a une uniformisante, et $u \in \mathcal{O}_v^*$, on a $f_v([au]) = (u, a) f_v([a])$: la fonction f_v est invariante à droite sous $[\mathcal{O}_v^*]$. Pour $v \mid 3$, on prend $f_v([a]) = 1$ si $a \equiv 1 \pmod{3}$ et $f_v([a]) = 0$ sinon. Soit $f = \prod f_v$. La série de Dirichlet (0.7) est

$$\sum_{\lambda \in F^*} f([\lambda]) N\lambda^{-s}.$$

Les propriétés analytiques de la série de Dirichlet (0.7) sont déduites de liens avec certaines fonctions "automorphes" sur $GL(2, \mathbb{C})$. Identifions l'espace homogène $PGL(2, \mathbb{C}) / U(2)$ au demi-espace supérieur $H = \{(z, v) \mid z \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{R}, v > 0\}$ par la décomposition d'Iwasawa :

$$(z, v) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans ce modèle, le groupe unipotent supérieur agit par les $(z, v) \longrightarrow (z+t, v)$, et

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (z, v) = (az, |a|v) \text{ pour } a \in \mathbb{C}^*.$$

Soit $\Gamma(3)$ le sous-groupe de $GL(2, \mathbb{C})$ formé des matrices $\equiv 1 \pmod{3}$. Kubota a découvert que l'on obtenait un caractère de ce groupe en posant, pour

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\chi(\gamma) = (c/a)_3 \quad \text{si } c \neq 0, \quad \text{et } \chi(\gamma) = 1 \quad \text{sinon.}$$

Si on pose $\Gamma_2 = \Gamma(3).GL(2, \mathbb{Z})$, Patterson vérifie que χ se prolonge en un caractère de Γ_2 trivial sur $GL(2, \mathbb{Z})$, qu'on notera encore χ . Le noyau de χ n'est visiblement pas un sous-groupe de congruence. Toutefois

(0.10) Quel que soit $\delta \in GL(2, F)$, les caractères $\chi(\gamma)$ et $\chi(\delta^{-1} \gamma \delta)$ coïncident sur un sous-groupe de congruence de $\Gamma_2 \cap \delta \Gamma_2 \delta^{-1}$.

Notons encore e le plongement identique de μ et introduisons la e^2 fonction multiplicative $\tau = \prod \tau_\nu$ caractérisée par les propriétés suivantes (cf [18] I, Th 8.1 p. 152).

(a) Pour $\nu \nmid 3$, τ_ν est à support dans $\mathbb{Q}_\nu$ et invariante à droite par $\Gamma_{\mathbb{Q}_\nu}^*$.
 (b) Pour $\nu \mid 3$, τ_ν est à support dans $\{x \mid \nu(x) \geq -3\}$ et invariante à droite par $[\{x \mid x \equiv \pm 1 \pmod{3}\}]^\nu$.

(c) Pour d dans $\mathbb{Q}_\nu$, et x respectivement au-dessus de $\mathbb{Q}_\nu$, pour $\nu \nmid 3$, et de $\{x \mid \nu(x) \geq -3\}$, pour $\nu \mid 3$, on a $\tau_\nu(x[d^3]) = \tau(x) \|\cdot\|_\nu$.

(d) Si $\nu \mid 3$, τ_ν vaut 1 sur $[\mathbb{Q}_\nu^*]$, $\|a\|_\nu f_\nu(a)^{-}$ sur les uniformisantes (f_ν comme en 0.10), et 0 sur les éléments de valuation 2.

(e) Si $\nu \mid 3$, et que $x = \omega^j \lambda^k$, avec $\omega = \exp(2\pi i/3)$ et $\lambda = \sqrt{-3}$, on a

$$\begin{aligned} \tau_\nu(x) &= 1 && \text{si } x = \pm \lambda^{-3}; \\ \tau_\nu(x) &= \frac{1}{3} \exp(-j 2\pi i/9) && \text{si } x = \pm \omega^j \lambda^{-1}, \quad j = -1, 0 \text{ ou } 1; \\ \tau_\nu(x) &= 0 && \text{si } (j, k) \text{ n'est pas congru mod 3 à } (0,0) \quad (0,2) \quad (1,2) \\ &&& \text{ou } (2,2). \end{aligned}$$

Posons par ailleurs, pour $w = (z, v) \in H$

$$\underline{K}(w) = v K_{1/3}(4\pi v) \underline{e}(z),$$

où $K_{1/3}$ est la "fonction de Bessel de seconde espèce usuelle" ([18] I p. 129, 134)

Un des résultats principaux de [18] est que la série

$$(0.11) \quad \theta(w) = \sigma v^{2/3} + \sum_{\mu \in F^*} \tau([\mu]) \underline{K} \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \right)$$

$$\sigma = 2^{-1} 3^{-3/2}$$

vérifie $\theta(\gamma w) = \chi(\gamma) \theta(w)$ pour $\gamma \in \Gamma_2$ (et en particulier $\theta(0, v) = \theta(0, v^{-1})$), et est le résidu (en s) d'une série d'Eisenstein E_s -définie par prolongement analytique en un paramètre s - en une valeur de s où apparaît un pôle simple. A un facteur près, la série d'Eisenstein s'obtient en partant de la fonction $\varphi_s(w) = v^s$, et en prenant la somme des $\chi(\gamma) \varphi_s(\gamma w)$ pour $\gamma \in \Gamma_2 / \Gamma_2 \cap B^+$ (notation : voir 0.0.1). Le pôle est en $s = 4/3$.

A des facteurs élémentaires, Γ et ζ près, la série de Dirichlet (0.7) se déduit de $\theta(w)$ par transformation de Mellin. Ceci fournit son comportement analytique, et une équation fonctionnelle.

Patterson appelle θ une "série θ -cubique" par analogie avec le cas classique des formes modulaires holomorphes de poids $1/2$, où la série $\theta(z) = \sum q^{n^2}$ ($q = e^{2\pi iz}$) admet une description analogue comme résidu de séries d'Eisenstein.

Une partie de ces résultats peut être prédite par la théorie des représentations de revêtements de groupes $GL(2, F_v)$. Voici la méthode. Posons comme plus haut $\varphi_s(w) = v^s$, et, pour Γ un sous-groupe de congruence, considérons la série d'Eisenstein.

$$E_{s, \Gamma}(w) = \sum_{\gamma \in \Gamma / \Gamma \cap B^+} \varphi_s(\gamma w).$$

Elle converge pour Rs grand, et admet un prolongement analytique comme fonction méromorphe de s . L'étude des "termes constants" montre que pour $Rs \geq 4/3$, elle est méromorphe en s , sauf au pôle un pôle simple en $s = 4/3$. Notons E_Γ le résidu en $s = 4/3$, et $\mathcal{E}$ l'espace des combinaisons linéaires des fonctions $E(\gamma w)$ pour Γ de congruence et $\gamma \in GL(2, F)$.

Le groupe $GL(2, F)$ agit sur $\mathcal{E}$, par $(\gamma * f)(w) = f(\gamma^{-1}w)$, et pour tout f dans $\mathcal{E}$, il existe un sous-groupe de congruence $\Gamma \subset \Gamma(3)$ tel que $\gamma * f = \chi(\gamma)f$ pour $\gamma \in \Gamma$. Ceci résulte de (0.10). En particulier, $\gamma * f = f$ pour $\gamma \in \Gamma \cap \text{Ker}(\chi)$, ce qui permet de prolonger par continuité l'action de $GL(2, F)$ sur $\mathcal{E}$ en une action du complété $GL(2, F)^\wedge$ de $GL(2, F)$ pour la topologie des sous-groupes $\Gamma \cap \text{Ker}(\chi)$ ($\Gamma \subset \Gamma(3)$ de congruence). L'étude des "termes constants" jointe à une étude "locale" permet de montrer que la représentation $\mathcal{E}$ est irréductible, et de déterminer sa classe d'isomorphie.

Pour $f \in \mathcal{E}$, vérifiant $f(z, v) = f(z + \lambda, v)$ pour λ dans un réseau $L \subset \mathbb{C}$, définissons la fonction $W^*(f)$ sur H par

$$W^*(f)(z, v) = \frac{1}{\text{vol}(\mathbb{C}/L)} \int_{\mathbb{C}/L} f(z + z_1, v) e^{-z_1} dz_1$$

Cette fonction est indépendante du choix de L . De ce que φ_s , et donc les $E_{s, \Gamma}$ sont des fonctions propres du laplacien, on déduit que $W^*(f)$ est le produit de $K(w)$ par une constante $W(f)$. Par ailleurs, la formule d'inversion de Fourier sur $\mathbb{C}/L$, et une étude des termes constants, fournissent un développement

$$f = \sigma(f) v^{2/3} + \sum_{\mu \in F^*} W \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * f \right) K \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \right)$$

Pour une constante $\sigma(f)$ convenable.

La fonctionnelle W est une forme linéaire sur $\mathcal{E}$. Elle vérifie

$$W \left(\begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * f \right) = e^{-v} W(f).$$

pour $\nu \in F$. Ceci, pour l'essentiel (= à un ennui près dû à la place divisant 3), la détermine à un facteur près - d'où une détermination des termes non constants des développements de Fourier des f dans $\mathcal{E}$.

Ces méthodes fournissent le résultat suivant. Soit T l'ensemble des combinaisons linéaires des e^2 -fonctions multiplicatives $\tau' = \prod \tau'_\nu$ sur $A^{f* \sim}$, où a) pour presque tout ν , on a $\tau'_\nu = \tau_\nu$;

b) pour tout ν , τ'_ν est à support compact, ou un translaté à droite de τ_ν .

Pour chaque $\tau' \in T$, il existe alors une unique constante $\sigma(\tau')$, telle que la fonction

$$\theta(\tau'; w) = \sigma(\tau') v^{2/3} + \sum_{\mu \in F^*} \tau'([\mu]) \leq \left(\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \right)$$

vérifie $\theta(\tau', \gamma w) = \chi(\gamma) \theta(\tau', w)$, pour γ dans un sous-groupe de congruence convenable. L'espace $\mathcal{E}$ est l'ensemble des $\theta(\tau'; w)$.

Le groupe $GL(2, F)^\wedge$ n'est pas un produit restreint de groupes locaux. On peut toutefois le comparer à un tel produit, et ramener la démonstration des résultats qui précèdent à l'étude de groupes locaux, et de la "série principale" de leurs représentations. C'est à cette étude qu'est consacré l'essentiel de l'exposé.

La méthode suivie par Patterson [18] est différente. Il commence par prouver des équations fonctionnelles pour des séries de Dirichlet telles que (0.7), et en déduit le caractère automorphe de θ par une variante ([18] 7.1) de la méthode de Weil [23]. Il déduit les équations fonctionnelles requises de l'équation fonctionnelle (pour $s \rightarrow 2 - s$) des séries d'Eisenstein ([11], [12]), en voyant ce qu'elle implique sur les coefficients de Fourier : chacun d'eux, comme fonction de s , est une série de Dirichlet réminiscente de (0.7). Il espère que cette méthode lui fournira encore les propriétés analytiques requises de séries de Dirichlet analogues à (0.7), pour généraliser [5] à des cas où $n > 3$. La méthode exposée ici, par contre, dépend de façon cruciale de ce que n est impair et que $\frac{n-1}{2} = 1$.

Dans le texte, nous nous appesantirons sur la théorie locale, et ne ferons qu'esquisser comment elle s'applique aux résidus de séries d'Eisenstein. Nous ne parlerons ni du double rôle, indiqué ci-dessus, de la série (0.7), pour moi un des grands mystères de la théorie, ni de la détermination du terme constant, ni de la méthode ingénieuse par laquelle Patterson [18] identifie θ , prouvé automorphe, au résidu de la série d'Eisenstein.

0.0 Notations :

0.0.1 Nous désignerons comme suit des sous-groupes de $GL(2)$:

Z : le centre (matrices scalaires) .

T : matrices diagonales. On pose $\text{diag}(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

B, U : sous-groupe de Borel ; son radical unipotent. En particulier :

$$B^+ : \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}; \quad B^- : \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}; \quad U^+ : \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad U^- : \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} .$$

0.0.2 A partir du § 2 on désigne par F soit un corps local (= localement compact non discret), soit un corps global (= extension finie de $\mathbb{Q}$ ou d'un corps $\mathbb{F}_p(t)$). On suppose choisi un entier n , non divisible par la caractéristique de F , et tel que F contienne une racine primitive n ième de l'unité. On note $\mu_n(F)$, ou simplement μ , le groupe des racines n ièmes de l'unité de F .

Pour F global, et v une place de F , l'inclusion de F dans son complé-
té F_v induit un isomorphisme de $\mu_n(F)$ avec $\mu_n(F_v)$, à l'aide duquel nous iden-
tifierons ces deux groupes.

0.0.3 Pour F un corps global, on note $\mathbb{A}$ l'anneau de ses adèles, F_∞ le pro-
duit des F_v pour v place réelle ou complexe, et $\mathbb{A}^f$ l'anneau des adèles finis :
 $\mathbb{A} = F_\infty \times \mathbb{A}^f$.

Si F est un corps de nombres on note $\mathbb{O}$ l'anneau de ses entiers.
Si F est un corps local non archimédien, on note $\mathbb{O}$ l'anneau de sa valuation.
Variante : notations F_v , $\mathbb{O}_v$.

0.0.4 Pour F un corps local (resp. global), nous aurons, à partir du § 3, à con-
sidérer une extension centrale de $G(F)$ (resp. $G(\mathbb{A})$) par μ . On note par un $\sim$
l'image inverse d'un sous-groupe dans cette extension. Par exemple : $T(F)^\sim$, $T(\mathbb{A})^\sim$,
 $G(\mathbb{A}^f)^\sim$,

0.0.5 A partir du § 4, on fixe un caractère fidèle $\epsilon : \mu \hookrightarrow \mathbb{C}^*$. Une représen-
tation d'une extension centrale d'un groupe par μ sera appelée une ϵ -représenta-
tion si chaque $\zeta \in \mu$ agit par multiplication par $\epsilon(\zeta)$. Une fonction sur l'ex-
tension sera appelée une ϵ -fonction si $f(\zeta x) = \epsilon(\zeta) f(x)$ pour $\zeta \in \mu$.

0.0.6 Une représentation π d'un groupe localement compact totalement discontinu
est dite algébrique si le fixateur d'un vecteur est toujours un sous-groupe ouvert,
et admissible si de plus le sous-espace fixé par un sous-groupe ouvert est de dimen-
sion finie. Pour l'extension de la terminologie à d'autres groupes, tels
 $GL(2, \mathbb{A})^\sim$, je renvoie à [6].

0.0.7 A partir du § 5, il nous sera parfois utile de noter additivement la multi-
plication des caractères, et de noter s le caractère $\|x\|^s$; par exemple, d'écrire
 $(\alpha_2 - \alpha_1 - 1)(\lambda)$ pour $\alpha_2(\lambda) \alpha_1(\lambda)^{-1} \|\lambda\|^{-1}$. On appelle partie réelle d'un carac-
tère σ le nombre réel s tel que $\sigma(x) \|x\|^{-s}$ soit unitaire.

1. Extensions centrales de $SL(2)$

Soit F un corps. Rappelons la

Définition 1.1 : (i) Un symbole est une application s de $F^* \times F^*$ dans un groupe abélien (noté multiplicativement), qui est bimultiplicative, et vérifie $s(a,b) = 1$ pour $a + b = 1$.

(ii) On note $K_2(F)$ le quotient de $F^* \otimes F^*$ par le sous-groupe engendré par les $a \otimes b$, pour $a, b \in F^*$ et $a + b = 1$, et $\{x, y\}$ l'image dans $K_2(F)$ de $x \otimes y$; c'est le symbole universel.

Exemple 1.2 Soit n un entier ≥ 1 , premier à l'exposant caractéristique de F , et tel que F contienne les racines n èmes de l'unité. Soit $\bar{F}$ une clôture séparable de F . La suite exacte longue de $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ - cohomologie déduite de la suite exacte de Kummer $1 \rightarrow \mu_n \rightarrow \bar{F}^* \rightarrow \bar{F}^* \rightarrow 1$ fournit des isomorphismes $F^*/F^{*n} \xrightarrow{\sim} H^1(\mu_n)$ et $H^2(\mu_n) \xrightarrow{\sim} \text{Br}(F)_n$, et le cup-produit

$$H^1(\mu_n) \otimes H^1(\mu_n) \rightarrow H^2(\mu_n \otimes \mu_n) = H^2(\mu_n) \otimes \mu_n$$

fournit une application bimultiplicative de $F^* \times F^*$ dans $\text{Br}(F)_n \otimes \mu_n$. C'est un symbole ([21] XIV 2).

1.3 Soit G un groupe algébrique sur F , isomorphe à $SL(2)$. On dispose alors d'une extension centrale canonique $G(F)^\wedge$ de $G(F)$ par $K_2(F)$. Pour tout symbole s , $F^* \times F^* \rightarrow A$, on en déduit une extension centrale $G(F)^s$ de $G(F)$ par A .

Je n'ai pas pris d'emblée $G = SL(2)$ pour pouvoir dire que le groupe adjoint $\text{PGL}(2, F)$ agit sur $SL(2, F)^s$ par transport de structures. Cette action relève l'action par automorphismes "intérieurs" de $\text{PGL}(2, F)$ sur $SL(2, F)$ (plutôt que "intérieur", il faudrait dire : induit par un automorphisme intérieur de $GL(2, F)$). Elle est triviale sur A .

Remarque 1.4 (Inutile pour la suite). Excluons les cas où F est un corps à 2 ou 3 éléments. Le groupe $SL(2, F)$ est alors parfait, et d'après Moore [17] et Matsumoto [14], l'extension centrale universelle de $SL(2, F)$ est une extension centrale par l'analogue symplectique ${}_{-1}L_2(F)$ de $K_2(F)$. Le groupe $\text{PGL}(2, F)$ agit sur ${}_{-1}L_2(F)$ (via son quotient par $\text{PSL}(2, F)$), et $K_2(F)$ est le groupe des coinvariants (le plus grand quotient héritant d'une action triviale). D'après Karoubi [24] III p. 78, si F n'est pas de caractéristique 2, le groupe ${}_{-1}L_2' := \text{Ker}({}_{-1}L_2(F) \rightarrow K_2(F))$ est coïncé dans une suite exacte

$$F^* \xrightarrow{\{-1, x\}} (2\text{-torsion de } K_2(F)) \rightarrow {}_{-1}L_2' \rightarrow W \xrightarrow{r} K_2(F)/2K_2(F) \rightarrow 0,$$

où W est le groupe des formes quadratiques virtuelles de dimension 0 et discriminant 1. J'imagine que r coïncide avec la classe de Stiefel-Whitney définie par Milnor [15]; d'après Milnor, $\text{Ker}(r)$ serait alors le cube de l'idéal d'augmentation ($\dim = 0$) dans l'anneau des formes quadratiques virtuelles.

1.5 Le groupe $GL(2, F)$ est le produit semi-direct du sous-groupe des matrices diagonales $\text{diag}(a, 1)$ par le sous-groupe distingué $SL(2, F)$. Prenons de même le produit semi-direct de F^* par $SL(2, F)^S$, l'action de $a \in F^*$ étant celle de la matrice diagonale $\text{diag}(a, 1)$ de $PGL(2, F)$. C'est une extension centrale $GL(2, F)^S$ de $GL(2, F)$ par A . Pour s le symbole universel, on la notera $GL(2, F)^\wedge$.

Après les préliminaires 1.6, nous donnerons en 1.7 - 1.9, quelques propriétés de ces extensions centrales. Elles suffisent à les caractériser.

1.6 Préliminaires : (a) Si $\tilde{H}$ est une extension centrale d'un groupe H , et que $a, b \in H$, le commutateur $(\tilde{a}, \tilde{b})$ de relèvements $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ de a et b ne dépend que de a et b . On le note simplement (a, b) . De même, l'automorphisme intérieur $\text{int}_{\tilde{a}}$ de $\tilde{H}$ ne dépend que de a . On le note simplement int_a .

(b) Si U est un sous-groupe de H , normalisé par $B \subset H$, et engendré par les commutateurs (b, u) ($b \in B, u \in U$), il existe au plus un relèvement $u \longrightarrow \tilde{u}$ de U dans $\tilde{H}$, normalisé par B . Si l'homomorphisme $u \longrightarrow \tilde{u}$ commute à int_b ($b \in B$), le relèvement d'un commutateur (b, u) est en effet nécessairement comme en (a) ci-dessus :

$$(b, u)^\sim = \text{int}_b(u)^\sim \tilde{u}^{-1} = \text{int}_b(\tilde{u}) \cdot \tilde{u}^{-1} = (\tilde{b}, \tilde{u}) .$$

1.7 Excluant les cas où F est un corps à 2 ou 3 éléments, 1.6 (b) s'applique à un sous-groupe de Borel B de $SL(2, F)$, et à son radical unipotent U , i.e. au stabilisateur B d'une droite (homogène) $D \subset F^2$, et à son fixateur U . On montre aisément que, pour toute extension centrale de $SL(2, F)$, U admet un relèvement normalisé par B (unique par 1.3). On le note $u \longrightarrow \tilde{u}$. On a $\tilde{e} = e$, et, si $u \neq e$ fixe une droite, celle-ci est uniquement déterminée. L'application $u \longrightarrow \tilde{u}$ est donc bien définie sur la réunion des conjugués de U (éléments unipotents). Elle est invariante par conjugaison. Dans le cas de l'extension 1.3, elle commute à l'action de $PGL(2, F)$.

1.8 Le groupe $GL(2, F)^S$ a été défini comme un produit semi-direct $F^* \times SL(2, F)^S$. Nous noterons d_1 l'inclusion correspondante de F^* , et d_2 son conjugué par $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (cf. 1.9). Pour $a, b \in F^*$, $d_1(a)$ et $d_2(b)$ sont respectivement des relèvements de $\text{diag}(a, 1)$ et $\text{diag}(1, b) \in GL(2, F)$. Ces matrices commutent. Le commutateur de $d_1(a)$ et $d_2(b)$ est donc dans A . On a

$$(d_1(a), d_2(b)) = s(a, b) ,$$

et cette formule détermine uniquement l'extension considérée de $SL(2, F)$.

Voici un formulaire plus complet.

1.9 Formulaire : On pose

$$\begin{aligned} e^+(a) &:= \text{relèvement } 17 \text{ de } \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ e^-(a) &:= \text{relèvement } 17 \text{ de } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$w(a) := e^+(a) e^-(-1/a) e^+(a), \text{ relèvement de } \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$d_2(a) := w(1) d_1(a) w(1)^{-1}$$

$$h(a) := d_1(a) d_2(a^{-1})$$

Quel que soit $a \in F^*$, les images dans $SL(2, F)$ de $e^+ = e^+(a)$, $e^- = e^-(-1/a)$ et $w = w(a)$ sont dans la trijection de Tits. On a dans $SL(2, F)^\wedge$ les identités

$$(1.9.1) \quad e^\pm = \text{int}_w(e^\mp)$$

$$(1.9.2) \quad w = e^+ e^- e^+ = e^- e^+ e^-$$

(exprimer que $\text{int}_w(w) = w$). Chacun des éléments w , e^+ , e^- détermine les deux autres. On en déduit que $w(a) = d_1(a) w(1) d_1(a)^{-1}$, et

$$(1.9.3) \quad w(a) w(1)^{-1} = d_1(a) d_2(a^{-1}) =: h(a).$$

En terme de h , on peut récrire la formule

$$(1.9.4) \quad (d_1(a), d_2(b)) = s(a, b)$$

comme

$$(1.9.5) \quad h(ab) = s(a, b) h(a) h(b).$$

Exemple 1.10 Prenons $F = \mathbb{R}$, $A = \{\pm 1\}$ et $s(a, b) = 1$ pour a ou $b > 0$, -1 sinon. L'extension $SL(2, \mathbb{R})^s$ est alors le revêtement double non trivial $SL(2, \mathbb{R})^\sim$ de $SL(2, \mathbb{R})$. Il admet la description suivante :

(a) Soit $(\mathbb{R}^2 - \{0\})^\sim$ un revêtement double non trivial de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Puisque $\pi_1(\mathbb{R}^2 - \{0\}) = \mathbb{Z}$, il est unique à isomorphisme près.

(b) Le groupe $SL(2, \mathbb{R})^\sim$ est le groupe des éléments de $SL(2, \mathbb{R})$, munis d'un relèvement à $(\mathbb{R}^2 - \{0\})^\sim$ de leur action sur $\mathbb{R}^2$.

La même description vaut pour le revêtement $GL(2, \mathbb{R})^s$ de $GL(2, \mathbb{R})$.

1.11 Une description analogue vaut sur un corps quelconque, et, sans être indispensable est commode pour calculer. Elle requiert une partie de la théorie générale des faisceaux zariskiens $\underline{a} K_q$ sur un schéma S , associé aux préfaisceaux $U \rightarrow K_q(\Gamma(U, \mathcal{O}))$. Spécifiquement : nous utiliserons des cas particuliers de l'isomorphisme suivant, déduit de la résolution de Quillen de $\underline{a} K_q$ (conjecture de Gersten) : pour T lisse purement de codimension d dans un schéma S lisse sur F , on a

$$(1.11.1) \quad H_i^1(S, \underline{a} K_q) = \begin{cases} \underline{a} K_{q-d} & \text{pour } i = d \\ 0 & \text{pour } i \neq d \text{ (et si } d > q \text{)}. \end{cases}$$

Cas particulier : (a) pour $A^2 = \text{Spec } F[X, Y]$ le plan affine,

$$(1.11.2) \quad H^0(A^2 - \{0\}, \underline{a} K_2) = K_2(F)$$

$$(1.11.3) \quad H^1(A^2 - \{0\}, \underline{a} K_2) = \mathbb{Z} \quad (= K_0(F)).$$

(b) pour T de codimension 1 dans S , le cas $i = 1$ de (1.11.1) fournit un morphisme résidu $\text{Res} : H^0(S-T, \underline{a} K^2) \longrightarrow H^0(T, \underline{a} K^1) = H^0(T, \mathcal{O}_T^*)$. Supposons T connexe, et notons v la valuation correspondante ; on a

$$\text{Res}\{f, g\} = (-1)^{v(f)v(g)} f^{v(g)} g^{-v(f)} \quad \text{restreint à } T.$$

Le morphisme résidu s'annule sur l'image de $H^0(S, \underline{a} K^2)$. Pour P sur S un torseur sous $\underline{a} K_2$ et e une section de P sur $S - T$, ceci permet encore de définir $\text{Res } e \in H^0(T, \mathcal{O}_T^*)$, nul si et seulement si e se prolonge à travers T .

Ceci dit, soit P sur $A^2 - \{0\}$ un torseur sous $\underline{a} K_2$. L'isomorphisme (1.11.3) étant canonique, il est isomorphe à son transformé par un quelconque élément de $GL(2, F)$, et, d'après (1.11.2), le groupe des éléments de $GL(2, F)$, munis d'un relèvement au torseur P de leur action sur $A^2 - \{0\}$, est une extension centrale de $GL(2, F)$ par $K_2(F)$. Nous allons vérifier que, pour P de classe un générateur de $H^1(A^2 - \{0\}, \underline{a} K_2) = \mathbb{Z}$, c'est l'extension $GL(2, F)^\wedge$.

1.12 Relativement au recouvrement de $A^2 - \{0\}$ par les ouverts $Y \neq 0$ et $X \neq 0$, le générateur du H^1 est représenté par le cocycle de Čech $\{X, Y\}$. On prend pour P le torseur muni d'une section e_X sur $X \neq 0$ et d'une section e_Y sur $Y \neq 0$, avec

$$e_X - e_Y = \{X, Y\}.$$

On notera que $e_Y - e_X = \{Y, X\}$, de sorte que cette description de P est symétrique en les coordonnées X et Y . On a

$$\text{Res } e_X = \text{Res}\{X, Y\} = Y^{-1} \quad (\text{sur } X = 0)$$

et symétriquement. Pour identifier l'extension centrale de $GL(2, F)$ définie par P à l'extension $GL(2, F)^\wedge$, on pose

$$d_1(a) = \text{le relèvement à } P \text{ de } \text{diag}(a, 1) \text{ qui soit l'identité}$$

au point fixe $(0, 1)$,

d'où puisque w transforme le point $(0, 1)$ en $(1, 0)$,

$$d_2(a) = \text{de même pour } \text{diag}(1, a) \text{ et } (1, 0).$$

Pour vérifier (1.9.4), on note que $d_1(a)$ transforme e_Y en $e_Y + \{a, Y\}$ (de résidu le transformé aX^{-1} du résidu X^{-1} de e_Y), tandis que $d_2(a)$ transforme e_Y en lui-même.

1.13 Soit A^{2V} le schéma affine $\text{Spec } F[a, b]$, correspond au dual de la représentation naturelle de $GL(2, F)$. A $\ell \in A^{2V} - \{0\}$, associons le groupe des trivialisations de P sur $\ell = 1$. C'est un espace principal homogène sous $K_2(F)$ et, faisceautisant cette construction, on obtient un torseur P^V sous $\underline{a} K_2$ sur $A^{2V} - \{0\}$. Par construction, P et P^V deviennent isomorphe sur le lieu $\ell(x) = 1$

de $A^{2V} \times A^2$, et $GL(2, F)$ agit sur P et P^V en respectant cet isomorphisme.

Voici un formulaire plus complet

1.14 Formulaire :

P : torseur sur $A^2 - \{0\}$, où A^2 est le plan de coordonnées X, Y .

P^V : torseur sur $A^2 - \{0\}$, où A^2 est le plan dual, de coordonnées a, b .

e_X, e_Y : sections de P sur $X \neq 0, Y \neq 0$.

e_a, e_b : sections de P^V sur $a \neq 0, b \neq 0$.

Les formules de définition sont (a) $e_X - e_Y = \{X, Y\}$, (b) P et P^V deviennent isomorphe sur le lieu $aX + bY = 1$ de $A^2 \times A^{2V}$. Via cet isomorphisme, e_a en (a, b) coïncide avec e_X en $(1/a, 0)$, et e_b en (a, b) coïncide avec e_Y en $(0, 1/b)$.

On vérifie que le formulaire obtenu est symétrique en P et P^V , et en les coordonnées : il est respecté par les substitutions $(X, Y; a, b) \mapsto (a, b; X, Y)$ et $(Y, X; b, a)$. On a

$$(1.14.1) \quad e_X - e_Y = \{X, Y\} \quad \text{et} \quad e_a - e_b = \{a, b\} \quad ;$$

$$(1.14.2) \quad e_a - e_Y = -\{a, Y\} \quad \text{sur le lieu} \quad aX + bY = 1, \quad \text{et de même} \\ e_b - e_X = -\{b, X\}$$

$$(1.14.3) \quad d_1(x)_* \quad \text{et} \quad e^-(y)_* \quad \text{fixent} \quad e_X \quad \text{et} \quad e_a,$$

et de même

$$d_2(x)_* \quad \text{et} \quad e^+(y)_* \quad \text{fixent} \quad e_Y \quad \text{et} \quad e_b.$$

2. Rappels : le symbole de Hilbert

Les notations 0.0.2 sont en vigueur .

2.1 Soit F un corps local. Pour F non complexe, on a $\text{Br}(F)_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et le symbole 1.2 est le symbole de Hilbert

$$\{ , \} : F^* \times F^* \longrightarrow \mu$$

Pour F complexe, on définit le symbole de Hilbert comme étant trivial. Pour n variable, ces symboles, notés $\{ , \}_n$, vérifient $\{a,b\}_n = \{a,b\}_{nm}^m$.

Rappel 2.2 : L'accouplement induit par le symbole de Hilbert :

$$\{ , \} : F^*/F^{*n} \times F^*/F^{*n} \longrightarrow \mu$$

est non dégénéré : il identifie chaque facteur F^*/F^{*n} au dual de Pontrjagin $\text{Hom}(F^*/F^{*n}, \mu_n(F))$ de l'autre.

Dans la définition de $\{ , \}_n$, nous adoptons les signes de Serre [21], i.e. ceux pour lesquels (2.4.1) ci-dessous est vrai.

Exemple 2.3 : $F = \mathbb{R}$, $n = 2$: c'est le symbole 1.10.

Exemple 2.4 : Le cas modéré est celui où F est non archimédien, et où n est premier à sa caractéristique résiduelle. Plaçons nous dans ce cas, et soient $\mathcal{O}$ l'anneau de la valuation v de F , $k = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ le corps résiduel, $q = |k|$ et r l'application de réduction mod $\mathfrak{m}$. On a $n \mid q-1$, r induit un isomorphisme $\mu_n(F) \xrightarrow{\sim} \mu_n(k)$, et

$$(2.4.1) \quad r\{a,b\}_n = r((-1)^{v(a)v(b)} a^{v(b)} b^{v(a)})^{(q-1)/n}.$$

2.5 Soit F un corps global. On note $\{ , \}_v$ le symbole de Hilbert pour le complété F_v de F en une place v . Il est à valeurs dans $\mu_n(F_v)$, identifié à μ (0.0.2). Pour x et y deux idèles de F , on a $\{x_v, y_v\}_v = 1$ pour presque toute place v (cf 2.4). Ceci permet de définir $\{x,y\}$ comme le produit des $\{x_v, y_v\}_v$, produit étendu à toutes les places.

Rappel 2.6 : L'accouplement induit

$$\{ , \} : \mathbb{A}^*/\mathbb{A}^{*n} \times \mathbb{A}^*/\mathbb{A}^{*n} \longrightarrow \mu$$

est non dégénéré. Il identifie le groupe localement compact $\mathbb{A}^*/\mathbb{A}^{*n}$ à son propre dual de Pontrjagin $\text{Hom}(\mathbb{A}^*/\mathbb{A}^{*n}, \mu)$.

Résulte de 2.2 et de ce que dans le cas modéré 2.4, donc pour presque chaque v , l'image de $\mathcal{O}_v^*$ dans F_v^*/F_v^{*n} est totalement isotrope maximale pour $\{ , \}_v$.

La loi de réciprocité des symboles de Hilbert dit que si les idèles x et y sont principaux ($x, y \in F^*$), alors $\{x,y\} = 1$. Plus précisément :

Rappel 2.7 : (i) $F^{*n} = F^* \cap \mathbb{A}^{*n}$.

(ii) L'image F^*/F^{*n} de F^* dans $\mathbb{A}^*/\mathbb{A}^{*n}$ est totalement isotrope maximale. C'est un sous-groupe discret à quotient compact, et $\{ , \}$ identifie le dual de Pontrjagin

du groupe discret F^* / F^{*n} au quotient $\mathbb{A} / \mathbb{A}^{*n} \cdot F^*$.

(ii) L'Image F^* / F^{*n} de F^* dans $\mathbb{A}^* / \mathbb{A}^*$ est totalement isotrope maximale .
C'est un sous-groupe discret à quotient compact, et $\{ , \}$ identifie le dual de
Pontrjagin de groupe discret F^* / F^{*n} au quotient $\mathbb{A}^* / \mathbb{A}^{*n} \cdot F^*$.

Exemple 2.8 Prenons pour F le corps $Q(\sqrt{-3})$ des racines cubiques de l'unité, et $n = 3$. Soit K le sous-groupe compact ouvert de $\mathbb{A}^* / \mathbb{A}^{*3} = \mathbb{A}^{f*} / \mathbb{A}^{f*3}$ image du produit des $\mathcal{O}_v^* \subset F_v^*$, pour $v \nmid 3$, et de $\{x \in F_v^* \mid x \equiv 1(3)\}$ pour $v \mid 3$. Le groupe $\mathbb{A}^* / \mathbb{A}^{*3}$ est le produit du groupe discret F^* / F^{*3} par le groupe compact K , chacun de ces deux sous-groupes est isotrope maximal, et $\{ , \}$ identifie l'un au dual de Pontrjagin de l'autre.

3. Le groupe métaplectique

3.1 Soit F un corps local. On note par un $\sim$ les extensions centrales de $SL(2, F)$ et $GL(2, F)$ par μ déduites du symbole de Hilbert.

3.2 Dans le cas modéré (2.4), l'extension centrale $SL(2, F)^\sim$ de $SL(2, F)$ est triviale au-dessus des sous-groupes compacts maximaux. La trivialisat ion est d'ailleurs unique : si le corps résiduel n'a pas 2 ou 3 éléments, $SL(2, \mathbb{O})$ est parfait et, dans tous les cas, son plus grand quotient abélien est d'ordre premier à n . Au dessus des matrices $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ ($a \in \mathbb{O}$), elle coïncide avec la trivialisat ion 1.7.

De même l'extension centrale $GL(2, F)^\sim$ de $GL(2, F)$ est trivialisée au-dessus de $GL(2, \mathbb{O})$, pour une unique trivialisat ion prolongeant $\text{diag}(a, 1) \mapsto d_1(a)$ ($a \in \mathbb{O}^*$).

3.3 Prenons maintenant F global. Pour presque chaque place v , on est dans le cas modéré, et 3.2 permet de définir le produit restreint $SL(2, \mathbb{A})_1^\sim$ des $SL(2, F_v)^\sim$, rel. aux sous-groupes compacts relevant les $SL(2, \mathbb{O}_v)$. C'est une extension de $SL(2, \mathbb{A})$ par la somme des $\mu_n(F_v)$. Poussant par l'application produit $\Pi: \bigoplus \mu_n(F_v) \longrightarrow \mu_n(F) =: \mu$, on obtient une extension centrale $SL(2, \mathbb{A})^\sim$ de $SL(2, \mathbb{A})$ par μ , et la loi de réciprocité des symboles de Hilbert assure que cette extension splitte au-dessus de $SL(2, F)$. Puisque $SL(2, F)$ est parfait, le scindage est unique. Sur le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel, il est induit par le scindage déduit des scindages locaux (1.7)

$$(3.3.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \mu & \longrightarrow & SL(2, F_v)^\sim & \longrightarrow & SL(2, F_v) \longrightarrow 1 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \mu & \longrightarrow & SL(2, \mathbb{A})^\sim & \longrightarrow & SL(2, \mathbb{A}) \longrightarrow 1 \\ & & & & \nwarrow [] & & \uparrow \\ & & & & & & SL(2, F) \end{array}$$

3.4 Prenons $n = 3$, $F = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{1}) \subset \mathbb{C}$ et $\epsilon = \text{Id}$. On a $SL(2, \mathbb{A})^\sim = SL(2, \mathbb{C}) \times SL(2, \mathbb{A}^f)^\sim$, d'où, avec les notations de l'introduction,

$$SL(2, \mathbb{A})^\sim / SU(2) \times \{1\} \xrightarrow{\sim} H \times SL(2, \mathbb{A}^f)^\sim ;$$

puisque $SL(2, \mathbb{C}) / SU(2) \xrightarrow{\sim} PGL(2, \mathbb{C}) / U(2)$. Par restriction à $H \times \{1\}$, ceci permet d'associer à chaque fonction f sur $SL(2, \mathbb{A})^\sim$, invariante à droite par $SU(2)$, une fonction sur H .

Scholie 3.5 L'application de restriction ci-dessus met en correspondance bi-univoque
(a) l'espace des ϵ -fonctions sur $SL(2, \mathbb{A})^\sim$, invariantes à gauche par $[SL(2, F)]$ et à droite par $SU(2) \times (\text{un sous-groupe ouvert convenable } K \text{ de } SL(2, \mathbb{A}^f)^\sim)$,

(b) l'espace des fonctions sur H qui, pour γ dans un sous-groupe de congruence convenable Γ de $SL(2, \mathbb{O})$, vérifient

$$f(\gamma w) = \chi(\gamma) f(w) .$$

Le point est que $SL(2, \mathbb{A}^f)^\sim$ s'identifie au complété de $SL(2, F)$ pour la topologie des sous-groupes noyau de χ dans un sous-groupe de congruence de $SL(2, \mathbb{O})$. Voir [14].

Le groupe $SL(2, \mathbb{A}^f)^\sim$ agit par translations à droite sur l'espace (a). Du point de vue classique (b), ceci correspond à, et précise, l'existence d'opérateurs de Hecke. Pour exprimer, et utiliser (0.11), il y a par ailleurs intérêt à passer à $GL(2)$.

3.6 Pour F un corps global, à nouveau quelconque, on définit $GL(2, \mathbb{A})^\sim$, au choix

(a) en poussant par $\Sigma : \bigoplus \mu_n(F_\vee) \longrightarrow \mu$ le produit restreint des $GL(2, F_\vee)$;

(b) comme produit semi-direct de $\mathbb{A}^*$ par $SL(2, \mathbb{A})^\sim$.

On dispose encore d'un diagramme (3.3.1), avec SL remplacé par GL ; le scindage [] coïncide avec d_1 sur $\text{diag}(\alpha, 1)$.

3.7. On suppose à nouveau que F est un corps local. On déduit du symbole de Hilbert un morphisme de faisceaux zariskiens sur $A^2 - \{0\}$, de $\mathbb{A}_{K_2}$ dans le faisceau des fonctions localement constantes sur $F^2 - \{0\}$, pour la topologie usuelle, à valeurs dans μ . Ceci permet de déduire de P (1.11) un toreur P_n sous μ , sur $F^2 - \{0\}$ muni de sa topologie usuelle. Pour chaque droite homogène D , on dispose d'un ensemble de trivialisations privilégiées de P_n sur $F^2 - D$: celles images d'une trivialisation de P sur $A^2 - D$. Si $d = 0$ est une équation de D , deux quelconques diffèrent par une fonction $\zeta \cdot \{a, d(x)\}$, à valeurs dans μ .

La description 1.11 de $GL(2, F)^\sim$ fournit ici : le groupe $GL(2, F)^\sim$ est le groupe des éléments de $GL(2, F)$, munis d'un relèvement à P_n de leur action sur F^2 , ce relèvement respectant le système des trivialisations privilégiées ci-dessus.

3.8 En particulier, $Z(F)^\sim$ agit sur P_n . L'action se notera comme la multiplication par un scalaire : $z.p$. Pour $a, b \in F^{*n}$, on pose $\text{diag}^\sim(a, b) = d_1(a)d_2(b)$; diag est un homomorphisme $F^{*n} \times F^{*n} \rightarrow T(F)^\sim$. Pour $a \in F^{*n}$ et $p \in P_n$, on pose $a.p = \text{diag}^\sim(a, a)p$. Cette formule relève à P_n l'homothétie de rapport a de F^2 .

3.9 On dispose comme en 1.13 d'un toreur P_n^v sur le dual, et d'un isomorphisme entre P_n et P_n^v sur le lieu $\iota(x) = 1$, le tout $GL(2, F)^\sim$ -équivariant. Le formulaire 1.14 reste valable.

Pour $a \in F^{*n}$, on notera $a.p$ l'action de $\text{diag}(a^{-1}, a^{-1})$ sur P_n^v ; elle relève à P_n l'homothétie $v \mapsto av$ de F^{2v} .

3.10 Dans la suite de l'exposé, on notera simplement P et P^v les toreurs P_n et P_n^v .

3.11 Pour F global, et presque chaque place v , on dispose d'une trivialis-
 tion de P_v sur $(A^2 - \{o\})(\mathbb{Q}_v) = (\mathbb{Q}_v^* \times \mathbb{Q}_v) \cup (\mathbb{Q}_v \times \mathbb{Q}_v^*)$: pour v modéré,
 e_X sur $\mathbb{Q}_v^* \times \mathbb{Q}_v$ et e_Y sur $\mathbb{Q}_v \times \mathbb{Q}_v^*$ coïncident sur $\mathbb{Q}_v^* \times \mathbb{Q}_v^*$. Ceci permet
 d'adéliser 3.7 et d'obtenir un toreur P sous μ sur $(A^2 - \{o\})(A)$. L'action de
 $GL(2, A)$ sur A^2 se relève en une action de $GL(2, A)^\sim$ sur ce toreur. Ce
 toreur est trivialisé sur $(A^2 - \{o\})(F) = F^2 - \{o\}$, par e_X et e_Y , et $[GL(2, F)]$
 respecte cette trivialisat.

4. Le groupe des matrices diagonales.

4.1 Groupes de Heisenberg : Soit $\tilde{H}$ un groupe localement compact extension d'un groupe localement compact totalement discontinu commutatif H par son centre Z . On fixe un caractère ω de Z . On suppose que ω est unitaire sur les commutateurs, et que le bicalectère $\omega((x,y))$ de H identifie H à son propre dual de Pontrjagin. Ceci implique que $Z / \text{Ker}(\omega)$ soit le centre de $\tilde{H} / \text{Ker}(\omega)$.

Pour tout sous-groupe fermé L de H , nous noterons $\tilde{L}$ son image inverse dans $\tilde{H}$. Nous dirons que L est totalement isotrope si $\omega((x,y))$ est trivial sur L , i.e. si $\tilde{L} / \text{Ker}(\omega)$ est commutatif.

Nous nous intéressons aux représentations de $\tilde{H}$, de caractère central ω . Une telle représentation sera dite admissible si, pour $K \subset H$ un sous-groupe compact ouvert totalement isotrope, sa restriction à $\tilde{K}$ est somme de représentations de dimension 1, chacune apparaissant avec multiplicité finie.

Une fonction f sur $\tilde{H}$ sera dite ω -localement constante si pour tout x dans $\tilde{H}$, il existe K comme ci-dessus, et un caractère χ de $\tilde{K}$ prolongeant ω , tel que $f(kx) = \chi(k) f(x)$ pour $k \in \tilde{K}$.

Fixons enfin un sous-groupe totalement isotrope maximal L de H , et un caractère ω' de $\tilde{L}$ prolongeant ω . Il est connu que, sous les hypothèses précédentes :

- (4.1.1) Le groupe $\tilde{H}$ admet une représentation admissible irréductible V de caractère central ω . Elle est unique à isomorphisme près.
- (4.1.2) Il existe sur V une forme linéaire $a \neq 0$ telle que $a(\ell v) = \omega'(\ell) a(v)$ pour $\ell \in \tilde{L}$. Elle est unique à un facteur près.
- (4.1.3) L'application $v \mapsto$ la fonction $a(gv)$ sur $\tilde{H}$ est un isomorphisme de V avec l'espace des fonctions ω -localement constantes sur $\tilde{H}$, vérifiant $f(\ell g) = \omega'(\ell) f(g)$ pour $\ell \in \tilde{L}$, et à support compact modulo $\tilde{L}$.

En particulier, si H est fini, V est de dimension l'indice d'un sous-groupe totalement isotrope maximal de H , i.e. la racine carrée de l'ordre de H .

(4.2) Soit F un corps local, et écrivons simplement $\tilde{T}$ pour $T(F)^\sim$. D'après 1.8.1 et 2.2, le centre de $\tilde{T}$ est le sous-groupe $\text{diag}(F^{*n} \times F^{*n})^\sim$. Le quotient de $\tilde{T}$ par son centre est fini et commutatif, et l'application commutateur est à valeurs dans μ . La théorie des groupes d'Heisenberg fournit la

Proposition 4.3 (i) La classe d'isomorphie d'une ϵ -représentation admissible irréductible du groupe $\tilde{T}$ est uniquement déterminée par son caractère central.

(ii) Soient ω un ϵ -caractère du centre de $\tilde{T}$, T' un sous-groupe de T tel que $T'^\sim$ soit un groupe commutatif maximal de $\tilde{T}$ et ω' une extension de ω à $T'^\sim$

La représentation induite $\text{Ind}_{T, \sim}^{\sim}(\omega')$ est irréductible, de caractère central ω .

4.4 Le centre de T est $(F^{*n} \times F^{*n})^{\sim}$. Il est l'indice $[F^* : F^{*n}]^2$ dans $T^{\sim}$, et les ϵ -représentations admissibles irréductibles de $T^{\sim}$ sont donc de dimension $[F^* : F^{*n}]$. L'extension $(F^{*n} \times F^{*n})^{\sim}$ de $F^{*n} \times F^{*n}$ par μ est splittée par $\text{diag}^{\sim}(3,8)$. Ceci permet d'identifier ϵ -caractères ω du centre de $T^{\sim}$ et couples (α_1, α_2) de caractères de F^{*n} , par

$$(4.4.1) \quad \omega(\text{diag}^{\sim}(a,b)) = \alpha_1(a) \alpha_2(b).$$

Nous le ferons. D'après 4.3 les ϵ -représentations admissibles irréductibles de $T^{\sim}$ sont paramétrées par ces couples (α_1, α_2) . Il est parfois plus commode de les paramétrer par les couples (χ_1, χ_2) de caractères de F^* , triviaux sur $\mu_n(f) \subset F^*$, en posant

$$(4.4.2) \quad \chi_i(x) = \alpha_i(x^n) \quad (i = 1, 2).$$

Pour réaliser les ϵ -représentations de $T^{\sim}$, deux choix de T' comme en 4.3(ii) sont commodes. Pour chacun d'eux, on dispose d'un splittage naturel de l'extension $T'^{\sim}$ de T' par μ , de sorte que la donnée d'un prolongement ω' de ω à $T'^{\sim}$ revient à celui d'un prolongement de (α_1, α_2) de $F^{*n} \times F^{*n}$ à T' .

a) Sous-groupe $F^* \times F^{*n}$; splittage $(a,b) \mapsto d_1(a) d_2(b)$.

b) Dans le cas modéré : sous-groupe $\mathcal{O}_{F^{*n}}^* \times \mathcal{O}_{F^{*n}}^*$; splittage $(a,b) \mapsto d_1(a) d_2(b)$.

Dans le cas (b), avec χ_1 et χ_2 non ramifiés, on dispose d'une unique extension ω' de ω triviale sur $d_1(\mathcal{O}^*) d_2(\mathcal{O}^*)$.

4.5 Supposons maintenant F global. Le groupe $T(\mathbb{A})^{\sim}$ a pour centre l'image inverse de $T(\mathbb{A}) = \text{diag}(\mathbb{A}^{*n} \times \mathbb{A}^{*n})$, et l'image inverse de $T(F) T(\mathbb{A})^n$ en est un sous-groupe commutatif maximal. D'après 4.1, on a

Théorème 4.6 . Soient α_1 et α_2 deux caractères de $\mathbb{A}^{*n}/F^{*n}$, et soit v_{α_1, α_2}

l'espace des ϵ -fonctions sur $[T(F)] \setminus T(\mathbb{A})^{\sim}$, invariantes à droite par un sous-groupe ouvert de $T(\mathbb{A})^{\sim}$ et telles que

$$f(g.\text{diag}(a_1, a_2)) = f(g) \alpha_1(a_1) \alpha_2(a_2) \quad \text{si} \quad a_1, a_2 \in \mathbb{A}^{*n}.$$

Alors v_{α_1, α_2} est une ϵ -représentation admissible irréductible de $T(\mathbb{A})^{\sim}$.

Ces représentations sont les représentations automorphes de $T(\mathbb{A})$. Il est parfois plus commode de les indexer par les couples (χ_1, χ_2) de caractères de Hecke, triviaux sur les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité locales : on pose : $\chi_i(a) = \alpha_i(a^n)$.

5. La série principale

5.0. Soit F un corps local. On écrit G pour $GL(2, F)$, et on simplifie les notations en omettant F : on écrira $\tilde{T}$ pour $T(F)^\sim$,

Pour $F = \mathbb{C}$, on a $\tilde{G} = G \times \mu$, et la théorie des représentations de $\tilde{G}$ se réduit à celle de G . Pour $F = \mathbb{R}$, on a $n = 1$ ou 2 . Nous ne nous attarderons pas à ces cas bien connus: dans la suite de ce §, sauf 5.12, on suppose F non archimédien.

5.1. De la théorie des représentations des groupes réductifs sur F , certains arguments se généralisent tels quels à des extensions centrales telles que $SL(2, F)^\sim$ ou $GL(2, F)^\sim$. D'autres non. Se généralisent ceux basés sur : la décomposition de Bruhat; la structure du radical unipotent U d'un parabolique P (sous-groupes radiciels, ...), la décomposition de Levi $P = MU$ et l'aspect contractant/dilatant de l'action de M sur U ; la relation entre le groupe et son algèbre de Lie. Par exemple : résultats généraux sur les modules de Jacquet, les représentations supercuspidales, ... Posent problèmes : la commutativité des tores, la structure d'algèbres de Hecke,

5.2. Ecrivons simplement B et U pour B^+ et U^+ . Le groupe $\tilde{B}$ est le produit semi-direct $\tilde{T} \cdot U$ de $\tilde{T}$ par le relèvement (1.7) de U . Si ρ est une représentation de $\tilde{T}$, on note encore ρ la représentation de $\tilde{B}$ triviale sur U qui s'en déduit : $\rho(tu) = \rho(t)$.

Le module de $\tilde{B}$ se déduit ainsi du quasi-caractère δ de $\tilde{T}$, donné par $\delta(t) = \|ab^{-1}\|$ pour t au-dessus de $\text{diag}(a, b) \in T$. Si $\rho : \tilde{T} \rightarrow GL(V)$ est une représentation algébrique de $\tilde{T}$, la représentation induite $\text{Ind}_{\tilde{B}}^{\tilde{G}}(V, \rho)$, ou simplement $\text{Ind}(V)$, est la représentation par translations à droite de $\tilde{B}$ sur l'espace des fonctions localement constantes $f : \tilde{G} \rightarrow V$ telles que

$$(5.2.1) \quad f(utg) = \delta(t)^{1/2} \rho(t) f(g) .$$

5.3. Interprétons cette définition en terme du dictionnaire entre :

- (a) faisceaux localement constants d'espaces vectoriels complexes sur $\mathbb{P}^1$, munis d'une action ("algébrique") de $\tilde{G}$;
- (b) représentations algébriques (V, ρ) de B ;
donné par l'équivalence de catégories $\mathfrak{A} \rightarrow \text{fibre de } \mathfrak{B} \text{ en le point } (1, 0) \text{ de } \mathbb{P}^1$, de stabilisateur $\tilde{B}$.

Si, à une section f de $\mathfrak{B}$ on associe la fonction $f(g) = \text{germe en } (1, 0)$ de $g \cdot f$, on identifie $\Gamma(\mathfrak{B})$ à l'espace des fonction localement constantes $f : \tilde{G} \rightarrow V$ telles que $f(bg) = \rho(b)f(g)$. Pour $V = \mathbb{C}$, et la représentation donnée par le caractère $u \mapsto \delta(t)$, on trouve le faisceau des mesures localement constantes, i.e. localement de la forme $\|\omega\|$, pour ω une forme différentielle. Finalement

ment, l'espace des fonctions 2.2.1 s'interprète comme celui des densités localement constantes de poids $1/2$ à valeurs dans le faisceau équivariant défini par V .

5.4. Explicitons, pour le groupe $G^\sim$, ce que donne la théorie générale des modules de Jacquet. Pour un exposé très clair, je renvoie à [1] (on y parle de $GL(n)$, mais les arguments sont généraux).

(A) Sur la catégorie des représentations algébriques de U , le foncteur des coinvariants : $W \rightarrow W_U$ est exact.

Cette exactitude permet un calcul facile, à une extension près, de $\text{Ind}(V, \rho)_U$. Nous noterons proj la projection sur les coinvariants. Comme en 2.3, écrivons $\text{Ind}(V, \rho) = H^0(\mathbb{P}^1, \mathfrak{F})$, pour un faisceau équivariant convenable. La suite exacte

$$0 \rightarrow H^0_c(\mathbb{P}^1 - \{(1,0)\}, \mathfrak{F}) \rightarrow H^0(\mathbb{P}^1, \mathfrak{F}) \rightarrow \mathfrak{F}_{(1,0)} \rightarrow 0$$

est $B^\sim$ -equivariante. On en déduit une suite exacte analogue par passage aux coinvariants. En quotient, $\mathfrak{F}_{(1,0)} \xleftarrow{\sim} \mathfrak{F}_{(1,0)}$, identifié à V par $\text{proj } f \mapsto f(e)$. En sous-objet, $H^0_c(\mathbb{P}^1 - \{(1,0)\}, \mathfrak{F})_U$ qui s'identifie encore à V , par intégration sur U (dont $\mathbb{P}^1 - \{(1,0)\}$ est espace principal homogène). La fonctorialité sera explicitée plus bas.

(B) Le foncteur d'induction, des représentations algébriques de $T^\sim$ dans celle de $G^\sim$ admet pour adjoint à gauche le foncteur $r : W \rightarrow$ quotient W_U des coinvariants, avec action de $T^\sim$ donnée par $t \text{ proj}(w) = \delta(t)^{-1/2} \text{ proj}(tw)$.

Une fois choisis $w \in N(T^\sim) \cdot T^\sim$ et une mesure de Haar sur U , le calcul

(A) donne une suite exacte de représentations de $T^\sim$,

$$(5.4.1) \quad 0 \rightarrow (V, \rho \circ \text{int}_w) \rightarrow r \text{ Ind}(V, \rho) \rightarrow (V, \rho) \rightarrow 0$$

où la projection sur (V, ρ) est la flèche d'adjonction $\text{proj}(f) \mapsto f(e)$ et où, pour $f(e) = 0$, l'image de $\text{proj}(f)$ dans $(V, \rho \circ \text{int}_w)$ est donnée par

$$(5.4.2) \quad \text{proj}(f) \mapsto \int f(wu) du \quad (\text{pour } f(e) = 0).$$

L'hypothèse $f(e) = 0$ assure que la fonction intégrée est à support compact.

(C) Soit (V, ρ) une représentation admissible irréductible de $T^\sim$. Alors, quel que soit le sous-quotient non nul W de $\text{Ind}(V, \rho)$, on a $rW \neq 0$.

L'idée de la démonstration (cf. [2], 2.9) est que, si $rW = 0$, alors W est projective, donc aussi une sous-représentation de $\text{Ind}(V, \rho)$, ce qui contredit :

(D) Pour (V, ρ) comme ci-dessus, et $W \subset \text{Ind}(V, \rho)$ une sous-représentation non nulle, rW s'envoie sur (V, ρ) . Sinon, en effet, les $f \in W$ seraient des fonctions partout nulles !

5.5. Soit (V, ρ) une ϵ -représentation admissible irréductible de $\tilde{T}$, de caractère central (α_1, α_2) (4.3, 4.4).

Si $\alpha_1 \neq \alpha_2$, les représentations ρ et $\rho \circ \text{int}_W$ ont des caractères centraux distincts, et la suite 5.4.1 se scinde, de façon unique. Le scindage

$$(5.5.1) \quad r : \text{Ind}(V, \rho) \rightarrow (V, \rho \circ \text{int}_W)$$

est une régularisation de l'intégrale 5.4.2 pour f ne vérifiant pas nécessairement $f(e) = 0$. Elle est donnée, pour $\alpha_1(a) \neq \alpha_2(a)$, par

$$(5.5.2) \quad f \mapsto (1 - \alpha_1(a))^{-1} \alpha_2(a))^{-1} \int f_a(wu) du, \text{ avec}$$

$$f_a(g) = f(g) - \alpha_1(a)^{-1} \|a\|^{-1/2} f(gd_1(a)) \quad (\text{nul en } g = e).$$

Par adjonction, (5.5.1) fournit un morphisme

$$(5.5.3) \quad I : \text{Ind}(V, \rho) \rightarrow \text{Ind}(V, \rho \circ \text{int}_W),$$

donné par l'intégrale d'entrelacement $f \mapsto \int f(wug) du$, régularisée par (5.5.2). On notera que 5.5.2 fournit une définition inconditionnelle (même pour $\alpha_1 = \alpha_2$) de " $(1 - \alpha_1(a))^{-1} \alpha_2(a))I$ ". On vérifie :

Lemme 5.6. Si $\alpha_1 = \alpha_2$, et pour a de valuation $\neq 0$, on a

- (i) $r : \text{Ind}(V, \rho)$ est une représentation indécomposable de T ;
- (ii) " $(1 - \alpha_1(a))^{-1} \alpha_2(a))I$ " ci-dessus est un multiple non nul de l'identité.

5.7. Soient (V, ρ) et (α_1, α_2) comme en 5.5. D'après 5.4 (A) (C), le foncteur r injecte le lattis des sous-représentations de $\text{Ind}(V, \rho)$ dans celui des sous-représentations de $r : \text{Ind}(V, \rho)$ et, d'après (D), si W est une sous-représentation propre, rW définit un scindage de la suite exacte 5.4.1. Dès lors

- a) si $\alpha_1 = \alpha_2$, 5.6 assure l'irréductibilité de $\text{Ind}(V, \rho)$;
- b) si $\alpha_1 \neq \alpha_2$, $\text{Ind}(V, \rho)$ admet au plus une sous-représentation propre, donc est indécomposable ;

c) si W est une sous-représentation propre de $\text{Ind}(V, \rho)$, rW est le noyau de 5.5.1 et W est dans le noyau de l'opérateur d'entrelacement I . Le $T^\sim$ -morphisme rI annule $rW \sim (V, \rho)$, et a pour image un scindage de la suite (5.4.1) pour $(V, \rho \circ \text{int}_W)$. L'image de I est donc une sous-représentation propre de $\text{Ind}(V, \rho \circ \text{int}_W)$.

Si α est un caractère de F^* , on note $\alpha \circ \det$ le caractère $G \rightarrow \text{GL}(2, F) \xrightarrow{\det} F^*$ de $G^\sim$. On a $\text{Ind}(V, \rho) \otimes (\alpha \circ \det) = \text{Ind}(V, \rho \cdot \alpha \circ \det)$ et le caractère central de $\rho \cdot \alpha \circ \det$ est donné par $(\alpha_1 \alpha, \alpha_2 \alpha)$. Une telle translation ne modifie pas le caractère réductible ou irréductible de $\text{Ind}(V, \rho)$. Si $\sigma = \alpha_1 \alpha_2^{-1}$ est unitaire, elle permet de transformer (V, ρ) , donc $\text{Ind}(V, \rho)$ en une représentation unitaire. Au total

Proposition 5.8 (i) La représentation $\text{Ind}(V, \rho)$ est indécomposable. Si $\sigma = \alpha_1 \alpha_2^{-1}$ est unitaire, elle est irréductible.

(ii) Si $\sigma \neq 1$, de deux choses l'une :

(a) $\text{Ind}(V, \rho)$ est irréductible, et I est un isomorphisme ;

(b) $\text{Ind}(V, \rho)$ et $\text{Ind}(V, \rho \circ \text{int}_W)$ sont réductibles, et I induit un isomorphisme de l'unique quotient non trivial de $\text{Ind}(V, \rho)$ avec l'unique sous-représentation non triviale de $\text{Ind}(V, \rho \circ \text{int}_W)$.

5.9. Le module de Jacquet d'une représentation contrôle le comportement asymptotique des coefficients. Il est facile d'en déduire que, lorsque $\text{Ind}(V, \rho)$ est réductible, une et une seule des deux représentations dont elle est extension a des coefficients de carré sommable (ie. est de la série discrète). Elle sera appelée spéciale. Les représentations $\text{Ind}(V, \rho)$ irréductibles, et les constituants non spéciaux des $\text{Ind}(V, \rho)$ réductibles, forment la série principale.

5.10. Pour $\Re \sigma > 1$ (notation 0.0.7), l'intégrale d'entrelacement converge. Des procédés bien connus permettent de considérer σ comme un paramètre; on peut alors regarder 5.5.2 comme donnant le prolongement analytique de cette intégrale. Une façon élégante de procéder m'a été signalée par Bernstein. Elle consiste à considérer des représentations à coefficients non pas dans $\mathbb{C}$, mais dans une algèbre telle que $\mathbb{C}[T, T^{-1}]$. Elle a l'avantage sur le prolongement analytique habituel de montrer que l'intégrale d'entrelacement I dépend rationnellement de σ et non seulement de façon méromorphe. La formule de régularisation 5.5.2 montre que, si on pose $L(\sigma) = 1$ pour $\sigma(x^n)$ ramifié, et $L(\sigma) = (1 - \sigma(\pi^n))^{-1}$ pour σ non ramifié et π une uniformisante, l'opérateur $I/L(\sigma)$ dépend même polynomialement de σ .

Si on itère l'intégrale d'entrelacement, on trouve un endomorphisme de $\text{Ind}(V, \rho)$. Pour $\text{Ind}(V, \rho)$ irréductible, c'est la multiplication par un scalaire $\neq 0$.

Pour $\text{Ind}(V, \rho)$ réductible, c'est encore un scalaire (par prolongement analytique); c'est donc 0.

5.10. C. Moen a déterminé quand $\text{Ind}(V, \rho)$ est réductible. Je préfère exprimer son résultat en terme des caractères χ_i de F^* , définis par $\chi_i(x) = \alpha_i(x^n)$.

Théorème 5.11 (C. Moen). La représentation $\text{Ind}(V, \rho)$ est irréductible, sauf pour
 $\chi_1 \chi_2^{-1} = \|x\|^{\pm 1}$.

Pour $\chi_1 \chi_2^{-1} = \|x\|$, c'est la sous-représentation de $\text{Ind}(V, \rho)$ qui est de la série discrète. Pour $\chi_1 \chi_2^{-1} = \|x\|^{-1}$, c'est la représentation quotient.

5.12. Ce théorème permet la détermination de la série complémentaire : si la représentation $\text{Ind}(V, \rho)$ est unitaire, elle est isomorphe à la duale de sa complexe conjuguée, et soit χ_1 et χ_2 sont unitaires (série principale proprement dite), soit $\chi_2 = \overline{\chi_1}^{-1}$. Une translation (5.7) ramène le cas où $\chi_2 = \overline{\chi_1}^{-1}$ à celui où $\chi_1 = \|x\|^s$ et $\chi_2 = \|x\|^{-s}$, avec $s \in \mathbb{R}$. La représentation induite correspondante π_s est réelle, de duale π_{-s} , et l'opérateur d'entrelacement $I/L(\sigma)$ fournit une forme bilinéaire invariante pour π_s . Pour $s = 0$, elle est définie > 0 . Par prolongement analytique, elle le reste tant que $I/L(\sigma)$ est inversible, ie. pour $|s| < 1$. En $s = 1$, on trouve que les deux constituants de π_s sont unitaires (faire $s = 1$ pour l'un, $s = -1$ pour l'autre). Au-delà, π_s ne peut être unitaire, sans quoi elle serait pour $s \rightarrow \infty$, ce qui est absurde : les coefficients ne sont pas bornés pour s grand.

5.13. Y. Flicker [3] a ramené la classification des ε -représentations de $\tilde{G}$ à celle des représentations de G : il établit une correspondance biunivoque, caractérisée en terme de caractères, entre l'ensemble des classes d'isomorphie de ε -représentations admissibles irréductibles de $\tilde{G}$, et l'ensemble des classes d'isomorphie de celles des représentations admissibles irréductibles π de G , telles que

a) si π est de la série principale, $\pi = \pi(\chi_1, \chi_2)$, χ_1 et χ_2 sont triviaux sur $\mu_n(F) \subset F^*$;

b) si π est de la série discrète, le caractère central ω_π de π est trivial sur $\mu_n(F) \subset F^*$.

Si $\bar{\pi}$ correspond à π , le caractère central de $\bar{\pi}$ (un caractère de F^{*n}) est $\omega_\pi(x^n)$. Si $\bar{\pi}$ est de la série principale défini par la représentation de $\tilde{T}$ de caractère central (α_1, α_2) , et que $\chi_i = \alpha_i(x^n)$, π est $\pi(\chi_1, \chi_2)$. En particulier, si $(\chi_1, \chi_2) = (\|x\|^{1/2}, \|x\|^{-1/2})$, au quotient irréductible de $\text{Ind}(V, \rho)$ correspond la représentation triviale de G .

5.14. Soit ψ un caractère non trivial de U , et reprenons le calcul 5.7 de $(\text{Ind}(V, \rho))_U$ pour calculer $(\text{Ind}(V, \rho) \otimes \bar{\psi})_U$. Avec les notations de 5.7, $\mathfrak{F}_{(1,0)}$ ne contribue rien, car l'action de U y est triviale. Le terme $H_c^0(\mathbb{P}^1 - \{(1,0)\}, \mathfrak{F})$ fournit encore par intégration, une copie de V :

Proposition 5.15. Il existe une et une seule application linéaire

$$\phi : \text{Ind}(V, \rho) \rightarrow V$$

donnée par $\phi(f) = \int f(wu)\psi(u)du$ pour $f(e) = 0$, et telle que $\phi(uf) = \psi(u)\phi(f)$. Elle identifie V à $(\text{Ind}(V, \rho) \otimes \bar{\psi})_U$.

Si $\psi(u_1) \neq 1$, on a encore

$$(5.15.1) \quad \phi(f) = (1 - \psi(u_1))^{-1} \int (f(wu) - f(wu u_1)) \bar{\psi}(u) du.$$

On peut, comme en 5.10, regarder cette formule comme un prolongement analytique en σ de l'intégrale $\int f(wu)du$, convergente pour $\Re \sigma > 1$.

5.16 Pour W une représentation de $\tilde{G}$, on dispose sur $(W \otimes \bar{\psi})_U$, si pas d'une d'une action $\tilde{T}$, du moins d'une action du centralisateur $\tilde{Z}$ de ψ dans $\tilde{T}$; on définit $\tau_\psi W$ comme étant la représentation de $\tilde{Z}$ sur $(W \otimes \bar{\psi})_U$ donnée par $z. \text{proj}(f) = \text{proj}(z.f)$. Le caractère δ étant trivial sur Z , le morphisme $\phi : \tau_\psi \text{Ind}(V, P) \longrightarrow V$ de 5.15 est un morphisme de représentations de $\tilde{Z}$.

5.17 Comme en 4.2, on vérifie que les ϵ -représentations irréductibles de $\tilde{Z}$ sont classifiées par leur caractère central. Si n est impair (resp. si $n = 2m$), le centre de $\tilde{Z}$ est l'image inverse du sous-groupe F^{*n} (resp. F^{*m}) du centre F^* de G . En tant que représentation de $\tilde{Z}$, la représentation V

(a) pour n impair : est somme de $[F^*: F^{*n}]^{1/2}$ représentations irréductibles toutes isomorphes, de caractère central induit par ω_ρ ;

(b) pour n pair, $n = 2m$: admet pour sous-représentations irréductibles les représentations irréductibles de $\tilde{Z}$ de caractère central prolongeant ω_ρ (il y en a $[F^{*m}: F^{*n}]$ non isomorphes). Chacune apparaît avec la multiplicité $[F^*: F^{*m}]^{1/2}$.

5.18. Pour calculer le foncteur r_ψ sur les sous-quotients de la série principale, il suffit, d'après 5.8, de calculer le morphisme induit par l'intégrale d'entrelace-

ment

$$(5.18.1) \quad r_{\psi} I : r_{\psi} \text{Ind}(V, \rho) \rightarrow r_{\psi} \text{Ind}(V, \rho \circ \text{int}_W)$$

pour ρ de caractère central ω_{ρ} défini par (χ_1, χ_2) , avec $\chi_1 \chi_2^{-1} = \|\cdot\|$.
D'après 2.14, ce $Z^{\sim}$ -morphisme s'identifie à un endomorphisme de V .

Théorème 5.19. Soient ρ une représentation de $T^{\sim}$ de caractère central
 $(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha, \|\cdot\|^{1/n}, \alpha)$: posant $\chi_i = \alpha_i(x^n)$, on a $(\chi_1, \chi_2) = (\chi, \|\cdot\|, \chi)$. Soit W
le quotient irréductible de $\text{Ind}(\rho)$. Dans le cas modéré et pour n impair, la re-
présentation $(W \otimes \bar{\psi})_U$ de $Z^{\sim}$ est somme de $\frac{n-1}{2}$ représentations toutes isomorphes.

Si $n = 3$, on a $\frac{n-1}{2} = 1$, et c'est ce résultat d'unicité qui explique
l'aspect "multiplicatif" des énoncés de l'introduction.

6. Modèles, et preuves.

6.1 Soient α_1 et α_2 deux caractères de F^{*n} . Nous nous proposons de décrire une ε -représentation irréductible ρ de $T^\sim$, de caractère central (α_1, α_2) et de décrire l'espace de la représentation induite $\text{Ind}(\rho)$ comme un espace de fonctions sur le revêtement P de $F^2 - \{0\}$. Il s'agira de l'espace des ε^{-1} -fonctions $(f(\zeta p) = \varepsilon(\zeta)^{-1} f(p))$, localement constantes, et ayant une homogénéité convenable rel. aux "homothéties" $v \mapsto \lambda v$ pour $\lambda \in F^{*n}$ (3.8).

On choisit une extension, encore notée α_2 , du caractère α_2 à F^* , et on décrit ρ par 4.4 (a). La représentation $\text{Ind}(\rho)$ est alors obtenue par induction itérée : de $d_1(F^{*n})d_2(F^*)_{\mu}$ à $T^\sim$, puis de $\tilde{B}$ à $\tilde{G}$, de (α_1, α_2) . C'est l'espace des ε -fonctions f sur $\tilde{G}$ telles que

$$f(u d_1(a) d_2(b) g) = \alpha_1(a) \alpha_2(b) \|a/b\|^{1/2} f(g)$$

pour $u \in U$, $a \in F^{*n}$ et $b \in F^*$. Si le caractère $\alpha_2(b) \|b\|^{-1/2}$ est trivial, il s'identifie à un espace de fonctions sur $d_2(F^*) \cdot U \backslash GL(2, F^\sim)$. Ce quotient n'est autre que le revêtement P de $F^2 - \{0\}$: à $g \in GL(2, F)^\sim$ associer $g^{-1}((1, 0), e_x)$. Se ramenant à ce cas en tordant par un caractère du déterminant : $\det : GL(2, F)^\sim \rightarrow GL(2, F) \rightarrow F^*$, on obtient le modèle suivant.

a) L'espace de la représentation est celui des ε^{-1} -fonctions localement constantes sur P , d'homogénéité $(\alpha_2 - \alpha_1 - 1)$:

$$f(\lambda v) = (\alpha_2 - \alpha_1 - 1)(\lambda) f(v) \quad \text{pour } \lambda \in F^{*n}, \text{ avec la notation 0.0.7.}$$

b) Le groupe agit par

$$(g * f)(v) = f(g^{-1}v) \cdot (\alpha_2 - \frac{1}{2})(\det g).$$

6.2 Un autre modèle de la même représentation s'obtient en utilisant le plan dual. On se donne cette fois une extension de α_1 à F^* , et on prend

a) pour espace : les ε^{-1} -fonctions localement constantes f sur P^v telle que

$$f(\lambda v) = (\alpha_2 - \alpha_1 - 1)(\lambda) f(v) \quad \text{pour } \lambda \in F^{*n} \quad (0.7, 3.9).$$

b) pour action :

$$(g * \varphi)(v) = \varphi(g^{-1}v) (\alpha_1 + \frac{1}{2})(\det g).$$

6.3 Dans ces modèles, l'opérateur d'entrelacement, de la représentation induite de paramètres (α_1, α_2) dans celle de paramètres (α_2, α_1) s'écrit comme une transformée de Radon : à f sur P , d'homogénéité $(\alpha_2 - \alpha_1 - 1)$, elle associe Rf sur P , d'homogénéité $(\alpha_1 - \alpha_2 - 1)$. L'opérateur R est le suivant : Un point $\ell \in P$ définit

- a) un point $\bar{\ell}$ dans $A^{2v} - \{0\}$, et une droite $\bar{\ell}(\bar{v}) = 1$ dans A^2 .
- b) une trivialisat[i]on de P au-dessus de cette droite ; on écrira $\langle \ell, v \rangle = 1$ la relation : $\bar{\ell}(\bar{v}) = 1$ et v est dans la section de P au-dessus de la droite $\bar{\ell}(\bar{v}) = 1$ définie par ℓ .

On pose

$$(Rf)(\ell) = \int_{\langle \ell, v \rangle = 1} f(v) \frac{dx dy}{d\ell}.$$

Cette formule suppose le choix d'une mesure de Haar sur F . Avec un pardonnable abus de notation, on l'écrit encore

$$(Rf)(\ell) = \iint f(v) \delta(\langle \ell, v \rangle - 1) dx dy.$$

La même formule définit la transformée de Radon des fonctions sur P dans les fonctions sur P ; c'est encore un modèle pour l'opérateur d'entrelacement.

La régularisation (5.5.2) de l'intégrale est la "partie finie" habituelle - sauf pour $\alpha_1 = \alpha_2$, cas correspondant au pôle de l'opérateur d'entrelacement.

6.4 Déterminons l'application Φ de 5.15. Nous noterons $f(x, y; p)$ une fonction sur P , p étant dans P , au-dessus de (x, y) . Pour f une ε^{-1} -fonction sur P , d'homogénéité $(\alpha_2 - \alpha_1 - 1)$, comme en 6.2, posons

$$L(f; y) = \int f(x, y; e_y) \psi(x/y) dx.$$

Pour x grand, et λ dans un sous-groupe ouvert convenable de $\mathbb{G}^{*n}$, on a $f(x, y, e_y) = f(\lambda x, y; e_y)$. Ceci permet de régulariser l'intégrale comme en 5.15.1. On a

$$(6.4.1) \quad L(e^+(u)f; y) = \psi(u)L(f; y) \quad \text{et}$$

$$(6.4.2) \quad L(f; \lambda y) = (\alpha_2 - \alpha_1)(\lambda)L(f; y) \quad \text{pour } \lambda \in F^{*n}$$

$$(6.4.3) \quad L(d_1(z)d_2(z)f; y) = \|z\|c(z, y)^{-1}L(f; z^{-1}y), \text{ pour } z \in F^*.$$

L'espace des fonctionnelles vérifiant 6.4.1 a pour base les $L(f; y)$ pour y parcourant F^*/F^{*n} . Ce sont les coordonnées de Φ (5.15) dans une base convenable.

6.5 Dans le modèle du plan dual, Φ a de même pour coordonnées les

$$L(f; a) = \int f(a, b; e_a) \bar{\psi}(b/a) db.$$

On a

$$(6.5.1) \quad L(e^+(u)f; a) = \psi(u)L(f; a) ,$$

$$(6.5.2) \quad L(f; \lambda a) = (\alpha_2 - \alpha_1)(\lambda)L(f; a) \text{ pour } \lambda \in F^{*n} ,$$

$$(6.5.3) \quad L(d_1(z)d_2(z)f; a) = \|z\| \varepsilon(z, z^{-1}a)^{-1} L(f; z^{-1}a) .$$

L'action 5.18 de l'opérateur d'entrelacement est donnée par

$$(6.5.4) \quad \begin{aligned} L(Rf; a) &= \int \varepsilon(a, y) \bar{\psi}(1/ay) L(f; y) d^*y , \\ &= \sum_{y \in F^*/F^{*n}} L(f; y) \varepsilon(a, y) \int_{F^{*n}} \bar{\psi}(\lambda/ay) (\alpha_1 - \alpha_2)(\lambda) d^*\lambda , \end{aligned}$$

avec une intégrale définie par prolongement analytique en $(\alpha_1 - \alpha_2)$. On a un pôle en $\alpha_1 = \alpha_2$, comme requis.

6.6 D'après 5.18, ceci ramène la preuve de 5.19 au problème suivant : on considère

V' : espace des fonctions localement constantes $L(y)$ sur F^* , telles que (6.4.2), sur lequel $\tilde{Z}$ agit par la formule membre de droite de 6.4.3 ;

V'' : espace des fonctions localement constantes $L(a)$ sur F^* , telles que (6.5.2), sur lequel $\tilde{Z}$ agit par la formule membre de droite de 6.5.3 ;

$R : V' \rightarrow V''$, donné par 6.5.4 :

$$(RL)(a) = \sum_{y \in F^*/F^{*n}} L(y) \varepsilon(a, y) \int_{F^*} \bar{\psi}(\lambda/ay) (\alpha_1 - \alpha_2)(\lambda) d^*\lambda ;$$

et on cherche à déterminer la représentation $\text{Im } R$ de $\tilde{Z}$, lorsque R n'est pas un isomorphisme, i.e. lorsque le caractère $(\alpha_1 - \alpha_2)$ est $\|\lambda\|^{\pm 1/n}$.

6.7 Sous les hypothèses de 5.19, il suffit de considérer la restriction de R aux invariants de $\{d_1(a)d_2(a) \mid a \in \mathcal{O}^*\}$. Prenant pour base de ces espaces les fonctions $L(y)$ ou $L(a)$ de support une classe latérale sous $\mathcal{O}^*.F^{*n}$, R est représenté par une matrice qui se décompose en un bloc 1×1 , et $\frac{n-1}{2}$ blocs 2×2 , le long de la diagonale (pour un ordre convenable). Le calcul est alors facile.

7. Séries d'Eisenstein.

7.1 L'opérateur "série d'Eisenstein" E est un opérateur d'entrelacement, de

$\text{Ind}_{B^+(\mathbb{A}) \backslash \mathbb{A}}^{\mathbb{G}(\mathbb{A}) \backslash \mathbb{A}} (v_{\alpha_1, \alpha_2})$ dans l'espace des fonctions sur $\mathbb{G}(F) \backslash \mathbb{G}(\mathbb{A}) \backslash \mathbb{A}$. L'espace de la représentation induite s'identifie à l'espace des c -fonctions sur $U(\mathbb{A}) T(F) \backslash \mathbb{G}(\mathbb{A}) \backslash \mathbb{A}$, invariante à droite par un sous-groupe compact ouvert de $\mathbb{G}(\mathbb{A}) \backslash \mathbb{A}$ et K_∞ -finies, et vérifiant

$$f(\text{diag}(a_1, a_2)g) = \alpha_1(a_1) \alpha_2(a_2) \|a_1 a_2^{-1}\|^{1/2} f(g) \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{A}^{*n})$$

L'opérateur est $\sum_{B(F) \backslash G(F)} f(\gamma g)$, quand cela converge, et est en général obtenu

par prolongement analytique en α_1, α_2 . Posons $\chi(x) = \alpha_1(x^n) \alpha_2(x^n)^{-1}$. Des arguments classiques ([11]) fournissent un pôle en $\chi = \|x\|$. Si $\bar{E}$ est le résidu de E , $\bar{E}$ entrelace le quotient irréductible de $\text{Ind}_{B^+(\mathbb{A}) \backslash \mathbb{A}}^{\mathbb{G}(\mathbb{A}) \backslash \mathbb{A}} (v_{\alpha_1, \alpha_2})$, pour $\chi = \|x\|$, dans l'espace des fonctions sur $\mathbb{G}(F) \backslash \mathbb{G}(\mathbb{A}) \backslash \mathbb{A}$.

7.2 Ceci détermine la classe d'isomorphie de la représentation de $\mathbb{G}(\mathbb{A}) \backslash \mathbb{A}$ image de $\bar{E}$. Soit ψ un caractère additif de $\mathbb{A}/F$. L'opérateur "coefficient de Fourier"

$$f \mapsto W(f; g) = \int_{U(F) \backslash U(\mathbb{A})} f(ug) \overline{\psi(u)} \, du$$

commute aux translations à droite, et vérifie $W(f; ug) = \psi(u) W(f; g)$. On a aussi $W(f; zg) = W(f; g)$ pour $z \in Z(F)$.

7.3 Pour $n = 3$, ces propriétés, et les résultats d'unicité 5.19 devraient permettre de l'identifier - et d'obtenir les résultats annoncés dans l'introduction. Une autre méthode consiste à changer son fusil d'épaule, et à systématiquement remplacer $GL(2, F)$, $GL(2, \mathbb{F}_\infty)$ ou $GL(2, \mathbb{A})$ par le sous-groupe des éléments dont le déterminant est un cube. On gagne que, pour ce nouveau groupe, l'image inverse du centre est commutative, ce qui simplifie les résultats d'unicité : les espaces $V_{U, \psi}$, précédemment représentations irréductibles de l'image inverse du centre, deviennent de dimension 1. Posant $f^0(g) = \int_{U(F) \backslash U(\mathbb{A})} f(ug) \, du$ (terme constant), on a par ailleurs

$$f(g) = f^0(g) + \sum_{\lambda \in F^*} W(f; \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} g) .$$

Si f , comme vecteur dans la représentation de $G(\mathbb{A})$ dans l'image de $\bar{E}$, est décomposable, la fonction sur $\mathbb{A}^* W(f; d_1(a^2) d_2(a))$ est multiplicative, au sens de l'introduction, dont on obtient les résultats.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I.N. Bernstein and A.V. Zelevinsky - Representations of the group $GL(n, \mathbb{F})$, where $\mathbb{F}$ is a local non archimedean field - Uspekhi Math. Nauk. 31 3 (1976) p 5-70.
- [2] I.N. Bernstein and A.V. Zelevinsky - Induced representations of reductive p-adic groups I - Ann. Sc. ENS 10 (1977) p 441-472.
- [3] Y. Flicker - Automorphic forms on covering groups of $GL(2)$ - preprint IAS.
- [4] B. Gross and N. Koblitz - Gauss sums and the p-adic Γ -function.
- [5] D.R. Heath-Brown and S.J. Patterson - The distribution of Kummer sums at prime arguments.
- [6] H. Jacquet and R.P. Langlands - Automorphic forms on $GL(2)$ - Springer Lecture Notes. 114 (1970).
- [7] T. Kubota - On automorphic functions and the reciprocity law in a number field - Lectures Notes in Math. 2, Kyoto Univ. 1969.
- [8] T. Kubota - Some results concerning reciprocity law and real analytic automorphic functions. Proc. Symp. Pure Math. 20 (1971) p 382-395.
- [9] T. Kubota - Some number theoretical results on real analytic automorphic forms - Several complex variables, Maryland (1970). Springer Lecture Notes 185 p 87-96.
- [10] T. Kubota - On an analogy to the Poisson summation formula for generalized Fourier transforms - J. Crelle 268 (1974) p 180-189.
- [11] T. Kubota - Elementary theory of Eisenstein series - Kodansha 1973.
- [12] R.P. Langlands - On the functional equations satisfied by Eisenstein series - Springer Lecture Notes 544.

- [13] C.R. Matthews - Gauss sums and elliptic functions - I the Kummer sum, Inv. Math 52 2(1979) p163-186; II the quartic sum. Preprint IHES.
- [14] H. Matsumoto - Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés - Ann. Sc. ENS 2 (1969) p 1-62.
- [15] J. Milnor - Algebraic K-theory and quadratic forms - Inv. Math. (1970) p 318-344.
- [16] C.Moen - Intertwining operators for covering groups of $SL(2)$ over a local field. Thesis. University of Chicago 1979.
- [17] C. Moore - Group extensions of p-adic and adelic linear groups - Publ. Math. IHES 35 (1968) p 5-70.
- [18] S.J. Patterson - A cubic analogue of the theta series - I,II - J. Crelle 296 (1977) p 125-161 et 217-220.
- [19] S.J. Patterson - On the distribution of Kummer sums - J. Crelle 303/304 (1978) p 126-143.
- [20] S.J. Patterson - On Dirichlet series associated with cubic Gauss sums - J. Crelle 303/304 (1978) p 102-125.
- [21] J.P. Serre - Corps locaux - Publ. Ins. Math. Univ. Nancago VIII - Hermann 1962.
- [22] A. Weil - Jacobi sums as "grössencharaktere" - Trans. AMS 73 (1952) p 487-495.
- [23] A. Weil - Dirichlet series and automorphic forms - Springer Lecture Note 189 (1971).
- [24] Algebraic K-theory I,II,III - Springer Lecture Notes 341, 342, 343.