LOUIS BOUTET DE MONVEL

Nombre de valeurs propres d'un opérateur elliptique et polynôme de Hilbert-Samuel

Séminaire N. Bourbaki, 1978-1979, exp. nº 532, p. 120-131

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1978-1979__21__120_0>

Séminaire BOURBAKI 532-01
31e année, 1978/79, n° 532 Février 1979

NOMBRE DE VALEURS PROPRES D'UN OPÉRATEUR ELLIPTIQUE ET POLYNÔME DE HILBERT-SAMUEL

[d'après V. GUILLEMIN]

par Louis BOUTET DE MONVEL

Dans cet exposé, je voudrais tenter d'expliquer une analogie intéressante qui existe entre certaines formules décrivant le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur elliptique (par exemple le Laplacien d'une variété Riemannienne) et certaines formules de la géométrie algébrique - en particulier celles qui permettent de calculer le polynôme de Hilbert-Samuel d'une algèbre graduée. Les idées exposées ici viennent essentiellement de V. Guillemin, et sont détaillées dans l'article [3] (en collaboration avec l'orateur). Avant de décrire ces formules, je commencerai par un bref rappel terminologique.

§ 1. Cônes symplectiques et structures de contact

a. Une variété ([1]) symplectique est une variété M de dimension paire $2m$, munie d'une forme symplectique, c'est-à-dire d'une 2-forme ω de rang maximum, telle que $d\omega = 0$. Si ω est une telle 2-forme, il existe au voisinage de chaque point de M un système de coordonnées locales (dit canonique) $x_1, y_1, \dots, x_m, y_m$ dans lequel on a

$$\omega = \sum_1^m dx_j \wedge dy_j \quad ;$$

M est orientée : l'orientation canonique est celle pour laquelle $\frac{\omega^m}{m!}$ $(= \prod_1^m dx_j \wedge dy_j)$ est positive ; la 2m-forme $\frac{\omega^m}{m!}$ est l'élément de volume symplectique de M. Si f et g sont des fonctions de classe C^1 sur M, le champ hamiltonien, ou gradient symplectique de f est le champ de vecteurs donné, en coordonnées canoniques, par

$$\Xi_f = \sum \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

et le crochet de Poisson $\{f,g\}$ est défini par

$$\{f,g\} = \Xi_f(g) = -\Xi_g(f) \quad \left(= \Sigma \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial y_j} - \frac{\partial f}{\partial y_j}\frac{\partial g}{\partial x_j}\right).$$

Exemple 1.- Soit M une variété complexe, munie d'une métrique hermitienne. En

([1]) Toutes les variétés sont C^∞ et paracompactes - au moins dans cet exposé.

coordonnées locales, on a $ds^2 = \Sigma\, a_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k$, où (a_{jk}) est une matrice hermitienne $>>0$ de fonctions C^∞ . A cette métrique on associe la 2-forme de type (1,1)

$$\omega = \frac{i}{2} \Sigma a_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k$$

M est kählérienne si $d\omega = 0$, autrement dit si ω est une forme symplectique ; l'élément de volume métrique est alors le même que l'élément de volume symplectique. Par exemple, l'espace projectif $P_m(\mathbf{C})$ est kählérien, lorsqu'on le munit de sa métrique canonique, déduite par passage au quotient de celle de la sphère unité de $\mathbf{C}^{m+1}$; il en est de même de toute sous-variété complexe $X \subset P_m(\mathbf{C})$. Rappelons que si X est de dimension k , et de degré deg(X) son volume est donné par la formule

(1.1) $$\mathrm{vol}(X) = \deg(X)\, \mathrm{vol}(P_k(\mathbf{C})) = \deg(X) \frac{\pi^k}{k!} .$$

b. On appelle cône symplectique une variété symplectique Σ , munie d'une action du groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^\times$ des réels > 0 qui en fait un fibré principal, et telle que la forme symplectique ω définissant la structure symplectique de Σ soit homogène de degré 1 . Σ est alors isomorphe (en tant que cône) à $X \times \mathbf{R}_+^\times$, où $X = \Sigma / \mathbf{R}_+^\times$ est la base de Σ , et si on note $r \in \mathbf{R}_+$ la deuxième coordonnée, ω s'écrit d'une seule façon

$$\omega = r\omega_2 + dr \wedge \omega_1$$

où ω_2 , ω_1 sont images réciproques de formes sur X . L'égalité $d\omega = 0$ implique alors $\omega = d(r\omega_1)$; la forme $r\omega_1$ est l'unique 1-forme homogène de degré 1 , orthogonale aux fibres $(\langle r\omega_1 , \frac{\partial}{\partial r} \rangle = 0)$ ayant cette propriété ; on l'appelle parfois forme de Liouville de Σ .

<u>Exemple</u> 2.- Soient Y une variété, et $\Sigma = T^*Y \setminus 0$ (le fibré cotangent privé de sa section nulle). La forme de Liouville de Σ est la 1-forme qui, dans tout système de coordonnées $y_1,\dots,y_m$ de Y , s'écrit

$$\lambda = \Sigma \eta_j\, dy_j$$

(η_j désignant le système dual de coordonnées dans les fibres de T^*Y). La dérivée $d\lambda$ est la forme symplectique canonique de T^*Y , et Σ possède ainsi une structure de cône symplectique, $\mathbf{R}_+^\times$ opérant par homothétie dans les fibres de T^*Y .

Soit X une variété de dimension impaire $2m-1$. On dit qu'une 1-forme α sur X est une forme de contact si la forme $\alpha \wedge (d\alpha)^{m-1}$ ne s'annule en aucun point de X . Il existe alors au voisinage de chaque point de X un système de coordonnées locales $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_{m-1}, y_{m-1}, y_m$ dans lequel α s'écrit

$$\alpha = \sum_{1}^{m-1} x_j \, dy_j + dy_m \quad .$$

On appelle structure de contact orientée sur X la structure définie par une classe de formes de contact, deux formes α, α' étant équivalentes si $\alpha = \lambda\alpha'$, avec $\lambda \in C^{\infty}$, $\lambda > 0$. Se donner une classe de 1-formes proportionnelles (dans un rapport positif) et sans zéro revient à se donner un sous-fibré en demi-droites $\Sigma \subset T^*X \setminus 0$; et les 1-formes section de Σ sont des formes de contact si et seulement si Σ est une sous-variété symplectique de $T^*X \setminus 0$. Ainsi toute variété de contact orientée est (de façon canonique) la base d'un cône symplectique ; inversement la base X d'un cône symplectique Σ est munie, canoniquement, d'une structure de contact orientée (définie par les 1-formes $s^*(\lambda)$, λ désignant la forme de Liouville de Σ, et s une section arbitraire $X \longrightarrow \Sigma$). Il y a donc équivalence entre les notions de cône symplectique et de variété de contact orientée.

Exemple 3.- Soient Z un espace analytique complexe de Stein, $\Omega \subset Z$ un ouvert de frontière C^{∞} $\partial\Omega$ (on suppose Z lisse au voisinage de $\partial\Omega$). Localement, Ω est défini par une inégalité $r < 0$, où r est une fonction C^{∞} telle que dr ne s'annule pas aux points de $\partial\Omega$. On introduit alors la 1-forme

$$\alpha = \frac{1}{i} \, d'r\big|_{\partial\Omega} = \frac{1}{2i} \, (d'r - d''r)\big|_{\partial\Omega}$$

(α, comme r, est bien définie modulo la multiplication par une fonction C^{∞} positive). Dire que α est une forme de contact équivaut à dire que la forme de Levi de $\partial\Omega$ est non dégénérée ; c'est en particulier le cas si $\partial\Omega$ est strictement pseudo-convexe. Le bord (supposé C^{∞}) d'un domaine strictement pseudo-convexe est ainsi canoniquement muni d'une structure de contact orientée.

Par exemple, soit $Z \subset \mathbf{C}^N$ un cône complexe, lisse en dehors de l'origine ; soit B la boule $|z| < 1$ de $\mathbf{C}^N$. Posons $\Omega = Z \cap B$, donc $\partial\Omega = Z \cap \partial B$. La forme

$$\alpha = \frac{1}{2i} \Big(\sum_{1}^{N} \bar{z}_j dz_j - z_j d\bar{z}_j\Big)\Big|_{\partial\Omega} \tag{1.2}$$

est une forme de contact sur $\partial\Omega$.

§ 2. Formules

Soient Y une variété C^{∞}, compacte, de dimension m, et A un opérateur pseudo-différentiel elliptique, auto-adjoint, de degré 1, de symbole $a = \sigma(A) > 0$ (par exemple : Y est une variété Riemannienne et $A = \sqrt{-\Delta}$, Δ désignant l'opérateur de Laplace : $\Delta = -d^*d$). On sait qu'alors les valeurs propres de A forment une suite tendant vers $+\infty$, et que le nombre $N(s)$ de valeurs propres $\leq s$ satisfait à la formule de H. Weyl :

(2.1) $$N(s) = \frac{C}{(2\pi)^m} s^m + O(s^{m-1}) ,$$

où C est le volume symplectique du domaine $(\sigma(A) < 1)$ de T^*X .

Je voudrais rapprocher ce résultat du suivant : soit, comme dans l'exemple 3, $Z \subset \mathbb{C}^N$ un cône complexe, lisse en dehors de l'origine ; $\Omega = Z \cap B$, où B est la boule unité de $\mathbb{C}^N$. Le groupe $U(1)$ opère dans $\mathbb{C}^N$ (par $z \longmapsto e^{i\theta}z$) et préserve Z , Ω et $\partial\Omega$; je noterai $\frac{\partial}{\partial\theta}$ le générateur infinitésimal. Notons encore $\mathcal{O}^\infty$ l'espace des fonctions C^∞ sur $\partial\Omega$ qui sont valeur au bord d'une fonction holomorphe dans Ω . L'opérateur différentiel $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$ opère sur $\mathcal{O}^\infty$; ses valeurs propres sont les entiers positifs $0, 1, \dots, n, \dots$, les fonctions propres correspondantes étant les restrictions à $\partial\Omega$ des polynômes homogènes dans $\mathbb{C}^N$. Si $M \subset P_{N-1}(\mathbb{C})$ désigne la variété projective associée à Z , le nombre $N(s)$ de valeurs propres de $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$ inférieures à s est

$$N(s) = \deg(M) \frac{s^m}{m!} + O(s^{m-1}) .$$

Si maintenant $\Sigma \subset T^*\partial\Omega \setminus 0$ désigne le cône symplectique associé à la structure de contact de $\partial\Omega$, c'est-à-dire l'ensemble des covecteurs $\lambda\,\alpha(z)$, $\lambda > 0$, où $\alpha = \frac{1}{2i} \left(\sum_1^N \bar{z}_j\, dz_j - z_j d\bar{z}_j \right)\Big|_{\partial\Omega}$, on a $\sigma(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta})(\lambda\alpha) = \lambda$, et compte tenu de (1.1), on voit que l'on a

(2.1)bis $$N(s) = \frac{C}{(2\pi)^n} s^m + O(s^{m-1}) ,$$

où C est le volume symplectique de la région $\sigma(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}) < 1$ de Σ .

Reprenons l'exemple précédent : de façon plus précise, le nombre $P(n)$ de valeurs propres égales à n de l'opérateur $(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta})$ (opérant sur $\mathcal{O}^\infty$) est (pour n assez grand) un polynôme de n , donné par la formule de Riemann-Roch :

(2.2) $$P(n) = \langle e^{nc}\, \tau , [M] \rangle$$

où comme ci-dessus M est la variété projective associée à Z , c la classe de Chern du fibré en droites associé à Z , et τ la classe de Todd de M .

Cette formule a un analogue pseudo-différentiel : soient de nouveau Y une variété C^∞ , compacte et A un opérateur pseudo-différentiel elliptique de degré 1 , de symbole positif. On suppose maintenant que le flot bicaractéristique de A (c'est-à-dire le flot du champ hamiltonien de $\sigma(A)$) est simplement périodique, de période 2π . On suppose en outre que les intégrales $\sigma = \int_\gamma \sigma_{sub}(A)$ sont constantes (indépendantes de γ), γ désignant une bicaractéristique fermée (de longueur 2π) , et $\sigma_{sub}(A)$ le symbole sous-principal de A (il est bien défini, à condition d'interpréter A comme un opérateur sur les $\frac{1}{2}$ densités de Y ; en coordonnées locales (x,ξ) , si $a_1 + a_o + \dots$ est le développement asymptotique du symbole total de A , on a

$$(2.3) \qquad \sigma_{sub}(A) = a_o - \frac{1}{2i} \sum \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_j \partial \xi_j}).$$

On sait alors que les valeurs propres de A se concentrent autour des nombres $n + \frac{\alpha}{4} + \int_\gamma \sigma_{sub}(A)$, α désignant l'indice d'Arnol'd des courbes bicaractéristiques fermées. De façon précise, le spectre de A est contenu dans la réunion des intervalles

$$(2.4) \qquad I_n = [n + \frac{\alpha}{4} + \sigma - \frac{c}{n} , n + \frac{\alpha}{4} + \sigma + \frac{c}{n}]$$

si c est une constante > 0 assez grande. Colin de Verdière ([5]) a démontré que le nombre $P(n)$ de valeurs propres de A contenues dans I_n (compte tenu de leurs multiplicités) est, pour n assez grand, un polynôme de n . V. Guillemin montre que, de plus, ce polynôme est donné par une formule entièrement analogue à la formule de Riemann-Roch :

$$(2.2)\text{bis} \qquad P(n) = \langle e^{nc}\, \tau , [M] \rangle \quad (^2)$$

dont les termes sont définis comme suit : soit $X \subset T^*Y$ l'hypersurface $\sigma(A) = 1$ de T^*X , et $\alpha = \lambda|_X$, où λ est la forme de Liouville de T^*X $(\lambda = \Sigma\, \eta_j\, dy_j)$. Le groupe $U(1)$ opère sur T^*Y , et sur X , via le flot bicaractéristique de A , et le générateur infinitésimal $\frac{\partial}{\partial\theta}$ est (par définition) le champ hamiltonien $\Xi_{\sigma(A)}$. L'hypothèse que le flot bicaractéristique est <u>simplement</u> périodique signifie que X est un fibré principal de groupe $U(1)$. On a posé $M = X/U(1)$ (base de ce fibré principal).

On a en outre $\langle \Xi_a , \alpha \rangle = a = 1$ sur X , autrement dit α est une forme de connexion pour ce fibré principal. La dérivée $d\alpha$ passe au quotient, et définit une structure symplectique sur M , dont la forme ω est la forme de courbure du fibré principal $X \twoheadrightarrow M$. Enfin dans (2.2)bis, c est la classe de Chern du fibré principal $X \to M$ $(c = \frac{\omega}{2\pi})$, et τ est la classe de Todd de M (elle est bien définie, pour une variété symplectique, car le groupe symplectique et le groupe $GL_n(\mathbb{C})$ ont même sous-groupe compact maximal). Les différents termes qui entrent dans la formule (2.2) peuvent être définis exactement de la même façon en termes du cône symplectique Σ associé à $\partial\Omega$, et du symbole $a = \sigma(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta})|_\Sigma$ (dont le champ hamiltonien est précisément le générateur $\frac{\partial}{\partial\theta}$ de l'action de $U(1)$).

$(^2)$ A l'heure où cet exposé est écrit, je ne sais pas démontrer complètement la formule (2.2)bis, mais seulement qu'il existe un entier k tel que $P(n+k)$ soit donné par cette formule.

§ 3. Preuve que $P(n)$ est un polynôme pour n grand (d'après Y. Colin de Verdière ([5]))

Reprenons le dernier exemple ci-dessus : l'opérateur $\exp(2i\pi A)$ est un opérateur pseudo-différentiel (opérateur "intégral de Fourier" associé à la transformation canonique $\exp(2\pi \Xi_a)$, qui est l'application identique). Le symbole de cet opérateur est, d'après [6], et toujours avec les notations ci-dessus :

(3.1) $$\sigma(\exp 2i\pi A) = \exp(2i\pi (\frac{\alpha}{4} + \sigma)) .$$

Quitte à remplacer A par $A - (\frac{\alpha}{4} + \sigma)\mathrm{Id}$, ce qui ne fait que décaler le spectre, on peut supposer $\sigma(\exp(2i\pi A)) = \mathrm{Id}$. Posons $U = \exp(2i\pi A)$: on a $\sigma(U) = 1$, donc $U - \mathrm{Id}$ est compact, de sorte que le spectre de U se compose d'une suite de nombres de module 1 , tendant vers 1 , chacun étant une valeur propre de multiplicité finie, et éventuellement de 1 (qui peut être une valeur propre, de multiplicité finie ou non). Par suite la fonction $\frac{1}{2i\pi}\log z$ admet une détermination uniforme au voisinage de $\mathrm{Sp}(U)$; on en choisit une qui soit la détermination principale au voisinage de 1 , et on pose $B = \frac{1}{2i\pi}\mathrm{Log}\, U$: on voit aisément que B est un opérateur pseudo-différentiel auto-adjoint, de degré -1
($B \sim \frac{1}{2i\pi}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(U-1)^n}{n}$), qui commute avec A , de sorte que l'on a $\exp(2i\pi(A-B)) = \mathrm{Id}$. En outre comme B commute à A , les fonctions propres de A sont fonctions propres de B ; et comme A est elliptique de degré 1 et B de degré -1 , il existe une constante $c > 0$ telle que, pour λ assez grand, l'égalité $Af = \lambda f$ implique $Bf = \mu f$, avec $\mu \leq \frac{c}{\lambda}$ (de façon précise, on a $\mu = b(\lambda)$ où b est un symbole de degré -1). Ceci démontre déjà que les valeurs propres de l'opérateur initial A sont contenues dans la réunion des intervalles I_n de (2.4).

Par ailleurs, on sait (cf. [6]) que la série

(3.2) $$T = \Sigma\, e^{it\lambda_n} = \mathrm{Tr}(e^{itA})$$

représente une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$, dont le support singulier est l'ensemble $2\pi\mathbb{Z}$ (ensemble des longueurs des bicaractéristiques périodiques), et qui admet à l'origine un développement asymptotique

(3.3) $$T \sim \sum_{k \leq k_o} a_k \psi_k(t)$$

où on a posé $\psi_k = (t + i0)^{-k-1}$ si $k \geq 0$, ou $t^{-k-1}\,\mathrm{Log}(t + i0)$ si $k < 0$, le signe $\sim$ signifiant que $T - \sum_{k_1 \leq k \leq k_o} a_k \psi_k$ est de classe C^{-k_1} au voisinage de 0 .

Supposons maintenant que l'on a $\exp(2i\pi A) = \mathrm{Id}$ (cas auquel les remarques ci-dessus permettent de se ramener). La distribution T est alors périodique de période 2π, et il est commode de remplacer dans (3.3) la distribution ψ_k par la distribution

(3.4) $$\chi_k = \sum_{1}^{\infty} n^k e^{int}$$

qui a le même comportement que ψ_k au voisinage de 0, mais est périodique de période 2π. T possède aussi un développement asymptotique

(3.3)bis $$T \sim \sum_{k \leq k_o} b_k \chi_k(t)$$

au sens ci-dessus ; et comme les deux membres de (3.3)bis sont périodiques, ceci revient à dire que $T - \sum_{k_1 \leq k \leq k_o} b_k \chi_k$ est de classe C^{-k_1} dans $\mathbb{R}$ tout entier. Mais on a aussi

$$T = \Sigma\, P(n)\, e^{int} ,$$

$P(n)$ désignant la multiplicité de n comme valeur propre de A. La relation (3.3)bis implique alors que l'on a

(3.5) $$P(n) \sim \sum_{k \leq k_o} b_k n^k ,$$

ceci signifiant que $P(n) - \sum_{k_1 < k \leq k_o} b_k n^k$ a même ordre de grandeur que n^{k_1} pour $n \to \infty$. Comme $P(n)$ est entier, ceci implique aussitôt que b_k est nul pour $k < 0$, et que $P(n)$ est égal au polynôme $\sum_{0 \leq k \leq k_o} b_k n^k$ pour n assez grand.

§ 4. Opérateurs de Toeplitz

Nous allons maintenant tenter d'expliquer comment les formules du § 2 entrent dans un même sac (et de démontrer la dernière formule du § 2). Pour cela on est amené à associer à toute variété de contact une algèbre d'opérateurs qui ressemble à l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels. En voici un premier exemple : soit $(\Omega , \partial\Omega)$ strictement pseudo-convexe comme dans l'exemple 3 du § 1. Pour tout entier m, notons $\mathcal{O}^m(\partial\Omega)$ l'espace des distributions sur $\partial\Omega$, qui appartiennent à l'espace de Sobolev $H^m(\partial\Omega)$ et qui admettent un prolongement holomorphe dans Ω (3) (rappelons que l'espace de Sobolev $H^m(\partial\Omega)$ est l'espace des distributions dont les

(3) $\mathcal{O}^o(\partial\Omega)$ est l'espace de Hardy, noté usuellement $H^2(\partial\Omega)$; nous le noterons plutôt $\mathcal{O}^o$ ici, pour éviter la confusion avec un espace de Sobolev - ou avec un groupe de cohomologie.

dérivées d'ordre $\leq m$ sont de carré sommable si $m \geq 0$, ou qui sont somme de dérivées d'ordre $\leq |m|$ de fonctions de carré sommable si $m \leq 0$). Munissons $\partial\Omega$ d'une mesure de densité C^∞, positive. Le projecteur de Szegö S est le projecteur orthogonal $L^2(\partial\Omega) \longrightarrow \mathcal{O}^0(\partial\Omega)$; il se prolonge (ou se restreint) en un opérateur continu $H^m(\partial\Omega) \longrightarrow \mathcal{O}^m(\partial\Omega)$ pour tout m (cf. [4]). Soit maintenant Q un opérateur pseudo-différentiel "classique" ([4]), de degré k, sur $\partial\Omega$. On définit l'opérateur de Toeplitz T_Q sur $\mathcal{O}(\partial\Omega)$ par

(4.1) $$T_Q(f) = S(Q(f)) .$$

Cet opérateur est en fait continu de $\mathcal{O}^m(\partial\Omega)$ dans $\mathcal{O}^{m-k}(\partial\Omega)$ pour tout m. [Les opérateurs étudiés par Toeplitz sont les opérateurs T_Q lorsque Ω est le disque unité de $\mathbb{C}$, et Q l'opérateur de multiplication par une fonction f sur le cercle $\partial\Omega$.]

On montre (cf. [2]) que les opérateurs de Toeplitz forment une algèbre, i.e. la somme, le composé de deux opérateurs de Toeplitz en est un autre ; et cette algèbre ressemble beaucoup aux algèbres d'opérateurs pseudo-différentiels (qui en sont d'ailleurs des cas particuliers). En particulier, cette algèbre donne lieu au même calcul symbolique que l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels, le cône $T^*X \setminus 0$ étant remplacé par le cône Σ associé à la structure de contact de $\partial\Omega$ (exemple 3 du § 1). Rappelons que si Ω est défini par une inégalité $r < 0$, où r est C^∞ et $dr \neq 0$ aux points de $\partial\Omega$, Σ est l'ensemble des multiples positifs des covecteurs $\alpha(z)$, $z \in \partial\Omega$, où α est la forme de contact $\alpha = \frac{1}{2i}(d'r - d''r)|_{\partial\Omega}$, c'est-à-dire exactement l'ensemble des points caractéristiques du système d''_b des équations de Cauchy-Riemann tangentielles en lesquels d''_b n'est pas hypo-elliptique (cf. [2], [4]). Le calcul symbolique peut être décrit comme suit : un opérateur de Toeplitz de degré k, T_Q, a un symbole $\sigma_k(T_Q)$, qui est simplement la fonction $\sigma_k(Q)|_\Sigma$; c'est une fonction homogène de degré k sur Σ. On a

(4.2) $\sigma_k(T_Q) = 0$ signifie que T_Q est en fait de degré $\leq k-1$ (i.e. $T_Q = T_{Q'}$, où Q' est de degré $\leq k-1$) ;

(4.3) $$\sigma_{k+k'}(T_Q T_{Q'}) = \sigma_k(T_Q)\,\sigma_{k'}(T_{Q'})$$

(4.4) $$\sigma_{k+k'-1}([T_Q, T_{Q'}]) = \frac{1}{i}\{\sigma_k(T_Q), \sigma_{k'}(T_{Q'})\}_\Sigma$$

([4]) Ceci signifie que, dans tout système local de coordonnées sur $\partial\Omega$, le symbole total $q(x,\xi)$ de Q admet un développement asymptotique $q \sim \sum_{j=0}^{\infty} q_{k-j}(x,\xi)$, où q_{k-j} est C^∞, homogène de degré $k-j$ en ξ.

$\{\ \}_\Sigma$ désignant le crochet de Poisson du cône symplectique Σ . Je n'ai ni la place, ni le temps, de démontrer ici ces assertions, et renvoie à [2], [3]. Indiquons simplement que la raison profonde de ces assertions est que l'opérateur de Szegö S est un opérateur intégral de Fourier (à phase complexe, au sens de [7]) (cf. [4]), ce qui rend plausible que les opérateurs de Toeplitz donnent lieu à un calcul symbolique analogue à celui des opérateurs pseudo-différentiels. A partir de ceci, on a une notion d'opérateur de Toeplitz elliptique : un opérateur est elliptique si son symbole est inversible ; et il n'est guère surprenant que les méthodes pseudo-différentielles d'étude du spectre d'un opérateur elliptique marchent aussi pour les opérateurs de Toeplitz : c'est ce qui est fait dans [3]. En particulier l'opérateur $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$ du § 2 coïncide, sur les fonctions holomorphes, avec l'opérateur $\Sigma\, z_j \frac{\partial}{\partial z_j}$; c'est un opérateur de Toeplitz elliptique, et la formule (2.2)bis est alors exactement la formule de H. Weyl pour cet opérateur.

Pour le calcul du polynôme de Colin de Verdière, il est utile de généraliser comme suit la construction ci-dessus. Soit X une variété de contact orientée de dimension $2m-1$: on montre que l'on peut construire un complexe $\bar{D}$ d'opérateurs pseudo-différentiels qui a essentiellement les mêmes propriétés que le complexe d''_b sur le bord d'un domaine strictement pseudo-convexe :

$$(4.5)\qquad 0 \longrightarrow C^\infty(X) \xrightarrow{\bar{D}} C^\infty(X, \Lambda^{0,1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow C^\infty(X, \Lambda^{0,m-1}) \longrightarrow 0 \quad (^5)\ .$$

Comme d''_b , ce complexe est elliptique en dehors de $\Sigma \cup -\Sigma$; il est hypo-elliptique sur Σ , sauf en degré 0 , et sur $-\Sigma$, sauf en degré $m-1$ (donc sa cohomologie est de dimension finie sauf en degré 0 , $m-1$). Comme dans la construction ci-dessus, on note $\mathcal{O}^m(X) = \operatorname{Ker} \bar{D} \cap H^m(X)$ (H^m désignant l'espace de Sobolev) ; le

---

(5) Plus précisément : soit R le sous-fibré vectoriel $\Sigma \cup -\Sigma \subset T^*X$ (c'est un fibré en droites) ; il existe sur $N = T^*X/N$ une structure complexe telle que si, au voisinage d'un point de X , $\zeta_1,\dots,\zeta_{m-1}$ est un système de coordonnées holomorphes linéaires de la fibre de N , on ait

$$\{\zeta_j \zeta_k\} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{i}\{\bar{\zeta}_j , \zeta_k\} >> 0 \quad \text{sur } \Sigma$$

(où on a identifié ζ_j à la fonction $\zeta_j \circ p$ sur T^*X , p désignant la projection $T^*X \to N$). $\Lambda^{0,j}$ désigne alors la composante de type 0 , j de l'algèbre extérieure de $N \otimes \mathbb{C}$, pour cette structure complexe ; et $\sigma(\bar{D})$ est tangent le long de $\Sigma \cup -\Sigma$ à l'opérateur de multiplication par ξ'' , ξ'' désignant la composante de type $0,1$ de ξ mod. R .

projecteur orthogonal $S : L^2(X) \longrightarrow \mathcal{O}^o(X)$ se comporte exactement comme le projecteur de Szegö, et on définit l'opérateur de Toeplitz généralisé T_Q (sur $\mathcal{O}^\infty(X)$) par $T_Q(\varphi) = S(Q(\varphi))$; ces opérateurs de Toeplitz forment de nouveau une algèbre, donnant lieu aux mêmes formules de calcul symbolique que plus haut, sur le cône symplectique Σ définissant la structure de contact. Le projecteur S_{m-1} sur le dernier groupe de cohomologie de $\bar{D}$ a des propriétés analogues, mais il est porté par le cône opposé $-\Sigma$. On appellera "structure de Toeplitz" sur X la donnée d'un tel complexe, et du projecteur S .

On peut même faire la construction de telle sorte que, si G est un groupe compact de transformations de contact de X , le complexe $\bar{D}$ et le projecteur de Szegö généralisé S soient invariants par G (structure de Toeplitz G-invariante).

Nous pouvons maintenant généraliser comme suit la situation décrite au § 2 : soit X une variété de contact orientée, compacte, sur laquelle le groupe $U(1)$ opère librement, de sorte que le générateur infinitésimal $\frac{\partial}{\partial\theta}$ vérifie $\sigma(\frac{1}{i}\ \frac{\partial}{\partial\theta}) > 0$ sur Σ . On choisit, comme c'est possible, S et $\bar{D}$ de sorte qu'ils soient invariants par G . La restriction A de $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$ à $\mathcal{O}$ est alors un opérateur de Toeplitz elliptique de degré 1 , de symbole positif, et on a évidemment $\exp(2i\pi A) = \mathrm{Id}$, si bien que les valeurs propres de A sont des entiers. La multiplicité $P(n)$ de la valeur propre n se calcule au moyen de la formule de l'indice d'Atiyah et Singer comme suit : identifions X à l'hypersurface d'équation $\sigma(A) = 1$ de Σ , et soit α la 1-forme de contact induite par la forme de Liouville de Σ (de sorte que l'on a $\langle\alpha , \frac{\partial}{\partial\theta}\rangle = 1$). Comme au § 2, posons $M = X/U(1)$, de sorte que X est un fibré principal de groupe $U(1)$ sur M , α une forme de connexion de ce fibré. La dérivée $d\alpha$ induit par passage au quotient une forme symplectique ω sur M , qui est la forme de courbure du fibré principal X . Soit enfin L le fibré en droites complexes sur M associé à X (donc la classe de Chern de L est $c_1 = \frac{\omega}{2\pi}$) .

Restreignons le complexe $\bar{D}$ d'opérateurs pseudo-différentiels aux sections (sur X) qui se transforment comme $e^{ni\theta}$ par l'action de $U(1)$: on obtient ainsi un sous-complexe, qui passe au quotient et fournit sur M un complexe elliptique $\bar{D}_n$ d'opérateurs pseudo-différentiels. Le symbole de $\bar{D}_n$ est $L^{\otimes n} \otimes \sigma(\bar{D}_o)$, et la formule de Atiyah et Singer montre que la caractéristique d'Euler de ce complexe est donnée par la formule

$$\chi(\bar{D}_n) = \langle e^{nc_1}\, \tau , [M]\rangle \tag{4.6}$$

où c_1 est la classe de Chern de L $(c_1 = \frac{\omega}{2\pi})$, et τ la classe de Todd de M (définie par sa structure symplectique). Or on a vu que les groupes de cohomologie de $\bar{D}$ sont de rang fini en degré $\neq 0 , m-1$; en outre, en degré $m-1$, l'opérateur $A = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$ induit sur le groupe $H^{m-1}(\bar{D})$ un opérateur qui se comporte exactement comme un opérateur de Toeplitz, mais porté cette fois par $-\Sigma$, donc de symbole négatif, donc n'ayant qu'un nombre fini de valeurs propres positives. Ainsi, pour n assez grand, la caractéristique d'Euler de $\bar{D}_m$ est égale à son premier nombre de Betti $\dim H^o(\bar{D}_m)$, c'est-à-dire au nombre

$$P(n) = \dim(\operatorname{Ker} \bar{D} \cap \operatorname{Ker}(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta} - n)) .$$

Dans la situation étudiée par Colin de Verdière, on choisit $X = S^*Y$, hypersurface d'équation $\sigma(A) = 1$ de T^*Y . Le groupe $U(1)$ opère comme indiqué plus haut via le flot bicaractéristique de A . On construit sur X une structure de Toeplitz invariante. Mais on démontre que pour n'importe quelle structure de Toeplitz sur X , il existe un opérateur F d'indice fini : $C^\infty(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$ (qui est en fait un opérateur intégral de Fourier à phase complexe au sens de [7]), qui transforme l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels sur Y en l'algèbre des opérateurs de Toeplitz sur X , de telle sorte que $\sigma(F_*P) = \sigma(P)$ lorsqu'on identifie à T^*Y le cône symplectique définissant la structure de contact de X .

Grâce à cela, on se ramène, pour le calcul du polynôme de Colin de Verdière, au calcul indiqué ci-dessus : celui-ci fournit le polynôme $P(n)$ pour l'opérateur A sur Y correspondant à $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$ sur X .

On voit assez facilement que si deux opérateurs A et A' ont même symbole, et $\int_Y \sigma_{sub}(A) = \int_Y \sigma_{sub}(A')$, A' est conjugué à un opérateur de la forme $A + B$ où B est de degré ≤ -1 , de sorte que A et A' ont même polynôme $P(n)$. Reste alors à calculer l'expression $\int_Y \sigma_{sub}(A)$ lorsque A est l'opérateur correspondant à l'opérateur de Toeplitz $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\theta}$ sur X . Je ne sais pas faire ce calcul à l'heure où j'écris cet exposé, de sorte que la formule (2.2)bis n'est démontrée rigoureusement qu'à une translation près par un entier dans le polynôme $P(n)$. On vérifie néanmoins que la formule (2.2)bis est exacte lorsque Y est une sphère, ou un espace projectif (réel, complexe ou quaternionien), et $A = \sqrt{-\Delta}$ (ou $\frac{1}{2}\sqrt{-\Delta}$ pour les espaces projectifs).

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. F. ATIYAH and I. M. SINGER - The index of elliptic operators I, Ann. Math. 87(1968), 484-530.

[2] L. BOUTET DE MONVEL - On the index of Toeplitz operators of several complex variables, Invent. Math., à paraître.

[3] L. BOUTET DE MONVEL and V. GUILLEMIN - The spectral theory of Toeplitz operators, à paraître.

[4] L. BOUTET DE MONVEL et J. SJÖSTRAND - Sur la singularité des noyaux de Bergmann et de Szegö, Astérisque 34-35(1976), 123-164.

[5] Y. COLIN DE VERDIÈRE - Sur le spectre des opérateurs elliptiques à bicaractéristiques toutes périodiques, à paraître

[6] J. J. DUISTERMAAT and V. GUILLEMIN - The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics, Invent. Math., 29(1975), 184-269.

[7] A. MELIN and J. SJÖSTRAND - Fourier integral operators with complex valued phase functions - dans "Fourier integral operators and Partial Differential Equations", Lecture Notes in Math., n° 459, 120-223, Springer-Verlag.

[8] A. WEIL - Variétés Kählériennes, Hermann, Paris (1958).

[9] A. WEINSTEIN - Asymptotics of eigenvalue clusters for the Laplacian plus a potential, Duke Math. J., 44(1977), 883-892.

[10] A. WEINSTEIN - Lectures on symplectic manifolds, Regional conference series in Math., n° 29 (1977).