BERNARD MALGRANGE

L'involutivité des caractéristiques des systèmes différentiels et microdifférentiels

Séminaire N. Bourbaki, 1979, exp. nº 522, p. 277-289

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1977-1978__20__277_0>

L'INVOLUTIVITÉ DES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS ET MICRODIFFÉRENTIELS

par Bernard MALGRANGE

1. Systèmes différentiels, variétés caractéristiques

Soit X une variété analytique complexe, de dimension n ; on désigne par $\mathcal{O}$ (ou $\mathcal{O}_X$) le faisceau des fonctions holomorphes sur X , par $\mathcal{D}_m$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires sur X , à coefficients dans $\mathcal{O}$ de degré $\leq m$, et l'on pose $\mathcal{D} = \bigcup \mathcal{D}_m$; les $\mathcal{D}_m$ fournissent une filtration de $\mathcal{D}$, dont le gradué associé sera noté $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}$; dans un ouvert U d'un système de coordonnées locales, on a $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}(U) = \mathcal{O}(U)\,[\xi_1,\ldots,\xi_n]$, ξ_i l'image de $\frac{\partial}{\partial x_i}$ dans $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}$; par suite $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}$ est commutatif, à fibres noethériennes, et cohérent ; et si l'on note par π la projection canonique $T^*X \longrightarrow X$, les sections de $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}$ sur U s'interprètent comme les fonctions holomorphes sur $\pi^{-1}(U)$ qui sont polynomiales par rapport aux variables de la fibre.

On déduit facilement de là que $\mathcal{D}$, en tant que faisceau d'anneaux, est cohérent et à fibres noethériennes, à droite et à gauche ; par définition, on appellera "système différentiel (linéaire)" sur X un $\mathcal{D}$-Module à gauche cohérent M ; si N est un autre $\mathcal{D}$-Module à gauche non nécessairement cohérent, on appelle "solutions du système M à valeurs dans N " le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}}(M,N)$. [Le lecteur vérifiera que, localement, en prenant une présentation de M , on identifie $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}}(M,N)$ aux solutions dans N d'un système différentiel au sens usuel.]

DÉFINITION (1.1).- _On appelle filtration de_ M _une suite croissante_ M_m , $m \in \mathbb{N}$, _de sous-_$\mathcal{O}$_-Module de_ M , _vérifiant les propriétés suivantes_ :

1) $M = \bigcup M_m$.
2) $\mathcal{D}_\ell M_m \subset M_{m+\ell}$ _pour tout couple_ $(\ell,m) \in \mathbb{N}^2$.

On dit que la filtration est "bonne" si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

3) _Pour tout_ m , M_m _est cohérent sur_ $\mathcal{O}$.
4) _Il existe_ m_o _tel qu'on ait, pour tout_ ℓ : $\mathcal{D}_\ell M_{m_o} = M_{\ell+m_o}$.

Pour définir la variété caractéristique de M , supposons d'abord que M

admette globalement une bonne filtration M_m ; on voit alors que le gradué associé $\mathrm{gr}\, M$ est $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}$-cohérent ; par suite, le faisceau sur T^*X

$$\mathcal{O}_{T^*X} \bigotimes_{\pi^{-1}(\mathrm{gr}\,\mathcal{D})} \pi^{-1}(M) \quad \text{est cohérent sur } \mathcal{O}_{T^*X} \ ;$$

ce faisceau peut dépendre de la (bonne) filtration choisie, mais on montre facilement que son support n'en dépend pas ; par définition, ce support, noté $\mathrm{car}(M)$, est appelé "variété caractéristique de M" ; c'est un sous-ensemble analytique de T^*X , algébrique et homogène par rapport aux fibres. Dans le cas général, M admet localement de bonnes filtrations ; on fait alors la même construction localement, et on se recolle sans histoire.

Exemple 1.2.- Soient $\mathcal{J}$ un Idéal à gauche cohérent de $\mathcal{D}$, et $M = \mathcal{D}/\mathcal{J}$; en prenant sur M la filtration quotient (qui est bonne) ; on est conduit à la construction suivante : pour chaque $m \in \mathbb{N}$, prenons les $p \in \mathcal{J} \cap \mathcal{D}_m$, et leur image $\sigma_m(p)$ ("symbole d'ordre m de p") dans $\mathrm{gr}_m\,\mathcal{D}$; on obtient ainsi un Idéal cohérent $\mathrm{gr}\,\mathcal{J}$ de $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}$, et la variété caractéristique de M est l'ensemble des zéros de $\mathrm{gr}\,\mathcal{J}$ dans T^*X .

2. Involutivité

Soient λ la forme de Liouville de T^*X , et $\omega = d\lambda$ la forme symplectique canonique (en coordonnées locales, $\lambda = \Sigma\, \xi_i\, dx_i$, et $\omega = \Sigma\, d\xi_i \wedge dx_i$); pour $a \in T^*X$, et $f \in \mathcal{O}_{T^*X,a}$, on note H_f le "champ hamiltonien de f", i.e. le germe en a de champ de vecteurs sur T^*X qui vérifie $i_{H_f}\omega = -df$ (i produit intérieur) ; enfin, pour $g \in \mathcal{O}_{T^*X,a}$, on définit le crochet de Poisson de f et g par $\{f,g\} = \langle H_f \wedge H_g , \omega\rangle$; en coordonnées locales, on a

$$H_f = \Sigma \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial \xi_i} \ , \quad \text{et} \quad \{f,g\} = H_f(g) = \Sigma \frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial \xi_i} \ .$$

Le raccord avec ce qui précède se fait ainsi : soient p et q deux opérateurs différentiels, respectivement d'ordre $\leq \ell$ et $\leq m$; alors $[p,q] = pq - qp$ est d'ordre $\leq \ell + m - 1$, et l'on a la formule suivante, de vérification immédiate en coordonnées locales :

$$(2.1) \qquad \sigma_{\ell+m-1}\,[p,q] = \{\sigma_\ell(p)\, ,\, \sigma_m(q)\} \ .$$

Si nous revenons un instant à l'exemple (1.2), cette formule montre tout de suite ceci : $\mathrm{gr}\,\mathcal{J}$ est stable par crochet de Poisson. En fait, ceci n'a guère qu'un intérêt heuristique, car l'Idéal de $\mathrm{gr}\,\mathcal{D}$ canoniquement associé à M est l'Idéal des fonctions nulles sur car(M) , c'est-à-dire la racine de $\mathrm{gr}\,\mathcal{J}$; on va voir qu'elle possède encore la même propriété.

D'une façon générale, soient V un sous-ensemble analytique de T^*X , et $\mathcal{J}(V)$ l'Idéal de $\mathcal{O}_{T^*X}$ des fonctions qui s'annulent sur V ; on pose alors la définition suivante :

DÉFINITION (2.2).- On dit que V est involutive si $\mathcal{J}(V)$ est stable par crochet de Poisson (autrement dit : si $f \in \mathcal{J}(V)$, V est stable par H_f).

THÉORÈME (2.3).- Soit M un système différentiel ; alors la variété car(M) est involutive.

COROLLAIRE (2.4).- En tout point $a \in \mathrm{car}(M)$, on a $\dim_a \mathrm{car}(M) \geq n$.

Il suffit de vérifier le corollaire aux points lisses ; c'est alors un résultat élémentaire de géométrie symplectique. Quant au théorème, sa démonstration est l'objet des paragraphes qui suivent. Il avait d'abord été conjecturé par Guillemin-Quillen-Sternberg et démontré par ces auteurs sous des conditions restrictives [4], dans le but d'établir complètement la classification d'Elie Cartan des pseudo-groupes de Lie primitifs infinis [3]. La première démonstration du théorème (2.3) dans le cas général est due à Kashiwara-Kawai-Sato [5]. Ces deux démonstrations, de même que celle qu'on va donner, reposent sur une localisation dans le cotangent, ou "microlocalisation", qui fait l'objet du prochain paragraphe.

3. Opérateurs pseudo- (ou micro-) différentiels

Les opérateurs pseudo-différentiels analytiques ont été introduits par Boutet de Monvel - Krée [1] ; une étude systématique en est faite par Kashiwara-Kawai-Sato [5]. Dans ce qui suit, nous nous inspirerons principalement d'un exposé de Boutet de Monvel [2], qui traite notamment les questions de convergence d'une manière particulièrement commode. On trouvera aussi un résumé utile au début de [6], auquel j'ai emprunté l'idée de travailler dans T^*X (au lieu de $T^*X \setminus 0$ comme on le fait d'habitude).

On commencera par donner les définitions en coordonnées locales ; on se place donc dans $T^*\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^{2n}$, muni des coordonnées (x,ξ) , $x = (x_1,\dots,x_n)$, $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$; on pose $h = \Sigma\, \xi_i \frac{\partial}{\partial \xi_i}$. Soient $m \in \mathbf{Z}$, et U un ouvert de $T^*\mathbf{C}^n$; on note $\mathcal{O}(m)(U)$ l'espace des fonctions holomorphes sur U , homogènes de degré m en ξ , i.e. vérifiant $hf = mf$. On appelle espace des symboles formels de degré $\leq m$ sur U et l'on note $\hat{S}_m(U)$ l'ensemble des sommes formelles

$\sum_{-\infty < k \leq m} p_k$, avec $p_k \in \mathcal{O}(k)(U)$; on pose encore $\hat{S}(U) = \bigcup_m \hat{S}_m(U)$, et l'on note $\hat{S}_m$ (resp. $\hat{S}_m$) les faisceaux correspondants.

En un point $(x,0)$, $\hat{S}$ est l'espace des fonctions de (x,ξ) polynomiales en ξ (et $\hat{S}_m$ est l'espace des polynômes de degré $\leq m$ par rapport à ξ) . Cet espace peut être identifié à $\mathcal{D}_x$ par la correspondance usuelle $p = \Sigma\, a_\alpha(x)\xi^\alpha \longmapsto P = \Sigma\, a_\alpha(x)\partial^\alpha$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_n^{\alpha_n}$, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. La formule de composition des opérateurs différentiels, dite "formule de Leibniz", nous conduit à introduire dans $\hat{S}$ la loi de composition suivante : pour p , $q \in \hat{S}(U)$, on pose :

$$(3.1) \qquad p \circ q = \Sigma\, \frac{1}{\alpha!}\, (\partial_\xi^\alpha\, p)(\partial_x^\alpha\, q) \ .$$

Cette série converge bien dans $\hat{S}$; en effet, si $p \in \hat{S}_\ell(U)$, $q \in \hat{S}_m(U)$, on a $\partial_\xi^\alpha p \in \hat{S}_{\ell-|\alpha|}(U)$, et $\partial_x^\alpha q \in \hat{S}_m(U)$.

Par prolongement des identités, on vérifie qu'on a bien une loi associative sur $\hat{S}$; muni de cette loi, $\hat{S}$ s'appelle le faisceau des <u>opérateurs pseudo-différentiels formels</u>, et est noté $\hat{\mathcal{E}}$; pour $p \in \hat{\mathcal{E}}_\ell(U)$, on note $\sigma_\ell(p)$ la classe de p dans $\hat{\mathcal{E}}_\ell(U) / \hat{\mathcal{E}}_{\ell-1}(U) = \mathcal{O}(\ell)(U)$; comme pour les opérateurs différentiels, on a $\sigma_{\ell+m}(p \circ q) = \sigma_\ell(p)\sigma_m(q)$, et $\sigma_{\ell+m-1}(p \circ q - q \circ p) = \{\sigma_\ell(p) , \sigma_m(q)\}$.

Les principales propriétés que nous aurons à utiliser sont les suivantes (leurs démonstrations ne présentent pas de difficultés sérieuses, mais elles seraient un peu longues à détailler).

(3.2) <u>Soit</u> $p \in \hat{\mathcal{E}}_m(U)$; <u>pour que</u> p <u>admette un inverse dans</u> $\hat{\mathcal{E}}_{-m}(U)$, <u>il faut et il suffit que</u> $\sigma_m(p)$ <u>soit inversible.</u>

Ceci résulte immédiatement de (3.1).

(3.3) <u>Le faisceau</u> $\hat{\mathcal{E}}$ <u>est cohérent</u>.

Dans $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus 0)$, ceci résulte de la cohérence des $\mathcal{O}(m)$, et d'arguments de filtration (voir [2], ou [5] pour une autre méthode) ; aux points de $\mathbb{C}^n \times 0$, cela résulte de la cohérence de $\mathcal{D}$, et du fait que $\hat{\mathcal{E}}$ est plat sur $\pi^{-1}(\mathcal{D})$, cf. [5].

Soient V un ouvert de $\mathbb{C}^{2n}$, et M un $\mathcal{E}$-module à gauche cohérent ; on appellera filtration de M une suite croissante M_k $(k \in \mathbb{Z})$ de sous-faisceaux tels qu'on ait $\mathcal{E}_\ell\, M_k \subset M_{k+\ell}$, pour tout (k,ℓ) ; on dira que la filtration est bonne si, localement, c'est la filtration quotient d'un morphisme surjectif

$\hat{\mathcal{E}}^p \longrightarrow M$ (à noter qu'aux points de $\mathbb{C}^n \times 0$, ceci est légèrement plus restrictif que la définition (1.1) ; d'autre part, aux mêmes points, ceci implique que l'on a $M_k = 0$ pour $k < 0$) ; si $\{M_k\}$ est une bonne filtration, on note $\sigma(M)$ le $\mathcal{O}(0)$-Module M_0/M_{-1} . On montre alors les résultats suivants :

a) une bonne filtration est toujours séparée ; par suite, on a $\mathrm{supp}(M) = \mathrm{supp}(\sigma(M))$ et le support de M est un sous-ensemble analytique stable par l'homothétie h .

b) Si M est un $\mathcal{D}$-Module cohérent sur $V \subset \mathbb{C}^n$, alors on a $\mathrm{car}\, M = \mathrm{supp}(\widetilde{M})$, où $\widetilde{M} = \mathcal{E} \underset{\pi^{-1}(\mathcal{D})}{\otimes} \pi^{-1}(M)$, faisceau défini sur $\pi^{-1}(V)$. En particulier, ceci donne une définition de la variété caractéristique de M indépendante du choix d'une filtration.

(3.4) Plaçons-nous dans un ouvert U où l'on a $\xi \neq 0$, soit M un $\hat{\mathcal{E}}$-Module muni d'une bonne filtration $\{M_k\}$, et soit Z le support de M . Soit ψ une projection $(x,\xi) \longmapsto (x',\xi')$, $x' = (x_i)_{i\in I}$, $\xi' = (\xi_j)_{j\in J}$ (I et J sous-ensembles de $[1,\dots,n]$) ; on suppose que $\psi(Z)$ ne rencontre pas l'ensemble $\xi' = 0$; soit $\hat{\mathcal{E}}'$ l'ensemble des opérateurs pseudo-différentiels ne dépendant que des x' et ξ' , considéré comme faisceau sur $V \subset \mathbb{C}^r \times (\mathbb{C}^s \setminus 0)$ ($r = |I|$, $s = |J|$), avec $V = \psi(Z)$; alors

a) si la projection $\psi : Z \longrightarrow V$ est <u>finie</u>, $\psi_*(M)$ est cohérent sur $\hat{\mathcal{E}}'$ (à noter que ce dernier faisceau d'anneaux est lui-même cohérent) ; de plus, la filtration initiale reste bonne sur $\hat{\mathcal{E}}'$.

b) Si $\psi : Z \longrightarrow V$ est un difféomorphisme, et si $\psi_*\sigma(M)$ est libre de rang μ sur $\mathcal{O}'(0) = \sigma(\hat{\mathcal{E}}')$, alors $\psi_*(M)$ est libre de rang μ sur $\hat{\mathcal{E}}'$ (ce dernier point est immédiat).

Pour terminer ce paragraphe, un mot sur les questions de convergence ; disons qu'un élément $p = \sum_{p\leq m} p_k$ de $\hat{S}_m(U)$ est <u>analytique</u> (certains auteurs disent "convergent") si, pour tout compact $K \subset U$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que la série

$$\sum_{k\leq \inf(m,0)} p_k\, T^{-k}/(-k)!$$

converge uniformément pour $(x,\xi) \in K$ et $|T| \leq \varepsilon$; on note $S_m(U)$ l'espace des symboles analytiques dans U ; on définit alors comme ci-dessus le faisceau $\mathcal{E}$ des opérateurs pseudo-différentiels analytiques ; on montre que toutes les propriétés précédentes sont encore vraies pour $\mathcal{E}$ et que $\hat{\mathcal{E}}$ est fidèlement plat sur $\mathcal{E}$. Pour la propriété (3.2), cela résulte de [1] ; les propriétés suivantes se démontrent, soit à partir d'une variante relative à $\mathcal{E}$ du théorème de préparation [5], soit à partir d'un théorème général de finitude [2] qu'il serait trop long d'exposer (c'est une adaptation de la méthode employée par le conférencier dans le théorème de Frobenius avec singularités ; voir sur ce dernier point l'exposé 523 de Ramis dans ce même Séminaire).

4. Changement de variables

Les résultats de ce paragraphe et du suivant ne sont peut-être pas indispensables pour le théorème que nous avons en vue ; mais, à tout le moins, ils simplifient sérieusement sa démonstration. De toute façon, vu leur importance, il s'impose d'en parler. On suivra ici la présentation de [2].

Pour écrire la formule de changement de variables pour les opérateurs différentiels, observons d'abord que la formule (3.1) peut aussi s'écrire :

$$(4.1)\qquad p\circ q(x,\xi) = e^{d_y d_\eta}(p(x,\eta)\ q(y,\xi))\Big|_{\substack{x=y\\ \xi=\eta}} \qquad (d_y d_\eta = \Sigma \frac{\partial}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial}{\partial \eta_j})$$

de même, pour f holomorphe, si P est l'opérateur différentiel associé à p, on a

$$(4.2)\qquad P(f) = e^{d_y d_\eta}\ p(x,\eta)\ f(y)\Big|_{\substack{x=y\\ \eta=0}} \quad .$$

Soit alors φ une autre fonction holomorphe, et $\xi(x,y)$ une fonction vectorielle telle que l'on ait $\varphi(x)-\varphi(y) = \langle x-y\ ,\ \xi(x,y)\rangle$.

PROPOSITION (4.3).- On a $e^{-\varphi}\ P(e^{\varphi}f) = e^{d_y d_\eta}[p(x\ ,\ \eta + \xi(x,y))f(y)]\Big|_{\substack{x=y\\ \eta=0}}$.

Démonstration. Posons pour abréger, lorsque $q(x,y,\eta)$ est un polynôme en η , à coefficients holomorphes en (x,y)

$$I(q) = e^{d_y d_\eta}\ q(x,y,\eta)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=0}} \quad .$$

Moralement, I est l'intégrale oscillante $\iint e^{i\langle x-y\ ,\ \eta\rangle}\ q(x,y,i\eta)dy\ d\eta$.

Lemme (4.4).- On a $I((\frac{\partial}{\partial\eta_j}+x_j-y_j)q) = 0$.

En effet, les relations de commutations montrent qu'on a $[e^{d_y d_\eta}\ ,x_j-y_j] = -\frac{\partial}{\partial\eta_j}\ e^{d_y d_\eta}$. Par suite, $e^{d_y d_\eta}(\frac{\partial}{\partial\eta_j}+x_j-y_j) = (x_j-y_j)e^{d_y d_\eta}$ et le second membre s'annule sur $x=y$.

Démontrons maintenant la proposition ; il s'agit de prouver qu'on a

$$I[(e^{-\varphi(x)+\varphi(y)}\ p(x,\eta) - p(x,\eta+\xi(x,y)))f(y)] = 0\ .$$

Or, on a $p(x,\eta + \xi(x,y)) = e^{\langle d_\eta , \xi\rangle} p(x,\eta)$. D'autre part, on a

$$e^{\varphi(y)-\varphi(x)} - e^{\langle d_\eta , \xi\rangle} = e^{-\langle x-y , \xi\rangle} - e^{\langle d_\eta , \xi\rangle} = (e^{\langle d_\eta + x - y , \xi\rangle} - 1)e^{-\langle x-y , \xi\rangle}$$

d'où il résulte aussitôt que $(e^{-\varphi(x)+\varphi(y)} p(x,\eta) - p(x,\eta+\xi))f$ est combinaison linéaire d'expressions de la forme indiquée dans le lemme.

Remarquons maintenant que le "symbole total" p de l'opérateur différentiel P est défini par la formule suivante

$$p(x,\xi) = e^{-\langle x,\xi\rangle} P(e^{\langle x,\xi\rangle}) .$$

Soit alors $y = \chi(x)$ un difféomorphisme ; le symbole total de p, dans les nouvelles coordonnées (y,η) sera donc donné par

$$\bar{p}(y,\eta) = e^{-\langle y,\eta\rangle} P(e^{\langle y,\eta\rangle}).$$

D'après (4.3), si l'on pose $\chi(x) - \chi(x') = M(x,x').(x - x')$, M une matrice à coefficients holomorphes, on aura

$$\text{(4.5)} \qquad \bar{p}(y,\eta) = e^{d_{x'},d_{\xi'}} p(x , \xi' + {}^tM(x,x')\eta)\Big|_{\substack{x = x' \\ \xi' = 0}} , \quad \text{avec} \quad y = \chi(x) .$$

On voit facilement que cette formule s'étend aux opérateurs pseudo-différentiels formels (ou analytiques) ; l'application $\chi : p \longrightarrow \bar{p}$ est compatible avec le produit des opérateurs pseudo-différentiels (ceci se voit par un argument de prolongement des identités) ; si p est défini sur $U \in \mathbb{C}^{2n}$, $\bar{p}$ est défini sur l'ouvert V image de U par l'application $(x,\xi) \longmapsto (\chi(x) , {}^t\chi'^{-1}(x)\xi)$, i.e. l'extension de χ aux vecteurs cotangents (parce que $M(x,x) = \chi'(x)$). Enfin, si p est d'ordre $\leq m$, on déduit de (4.5) qu'on a $\sigma(p)(x,\xi) = \sigma(\bar{p})(y,\eta)$, $y = \chi(x)$, $\xi = {}^t\chi'(x)\eta$, donc $\sigma(p)$ se transforme comme une fonction sur le cotangent. Finalement, si X est une variété analytique, par recollement, on pourra donc définir les opérateurs pseudo-différentiels (formels ou analytiques) sur X comme un faisceau sur T^*X, dont le gradué associé sera la somme $\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{T^*X}(m)$, $\mathcal{O}_{T^*X}(m)$ étant le faisceau des fonctions holomorphes sur T^*X et homogènes de degré m par rapport à l'homothétie de la fibre.

5. Transformations canoniques

Il s'agit ici d'obtenir des résultats plus ou moins analogues lorsqu'on part d'une transformation canonique. Pour cela, il faut d'abord donner une version formelle-analytique des "opérateurs intégraux de Fourier" au sens de Hörmander.

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^N \setminus 0)$, de coordonnées (x,θ), et φ une fonction holomorphe sur U , homogène de degré 1 en θ , telle que $d_x\varphi$ ne s'annule en aucun point ; soit V un ouvert de $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus 0)$ tel que $(x , d_x\varphi(x,\theta)) \in V$ pour tout $(x,\theta) \in U$, et soient $a \in \hat{S}_m(U)$, $p \in \hat{\mathcal{E}}(V)$ (les "symboles" sur U sont définis de manière analogue au § 2) ; si p provient d'un opérateur différentiel, on a par (4.3)

$$e^{-\varphi}P(e^{\varphi}a) = e^{d_y d_\eta}[p(x , \eta + \xi(x,y,\theta))a(y,\theta)]\Big|_{\substack{x=y\\ \eta=0}} \underset{\text{déf}}{=\!=} L_p^{\varphi}(a) \quad ,$$

avec $\quad \varphi(x,\theta) - \varphi(y,\theta) = \langle x - y , \xi(x,y,\theta)\rangle$.

Avec les hypothèses qu'on a faites, le second membre garde un sens pour un $p \in \hat{\mathcal{E}}(V)$, et l'on a (prolongement des identités) $L_p^{\varphi} L_q^{\varphi} = L_{p \circ q}^{\varphi}$; on obtient ainsi un $\hat{\mathcal{E}}(V)$-module ; plus précisément, si l'on note $\tilde{\varphi}$ l'application $(x,\theta) \longmapsto (x , d_x\varphi)$, on obtient sur U un $\tilde{\varphi}^{-1}(\hat{\mathcal{E}})$-Module, qu'on notera M^{φ} . On munit M^{φ} de la filtration définie par la filtration de $\hat{S}|U$.

On appelle N^{φ} le sous-Module engendré par les symboles de la forme $\Sigma\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i}\right) a_i(x,\theta)$; on s'intéresse au quotient R^{φ} qui est moralement l'espace des "distributions de Fourier" définies par les "intégrales oscillantes" $\int e^{\varphi(x,\theta)} a(x,\theta)\, d\theta$. On munit N^{φ} de la filtration induite par celle de M^{φ} .

Supposons que les $d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i}\right)$ soient linéairement indépendantes en tout point de U , auquel cas on dit que φ est <u>non dégénérée</u> ; on a alors le résultat suivant

PROPOSITION (5.1).- <u>On a</u> $\sigma(N^{\varphi}) = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i}\sigma(M^{\varphi})$. <u>En particulier, le support de</u> R^{φ} <u>est la variété</u> (lisse) C^{φ} <u>définie par</u> $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i} = 0$.

Soit en effet $a \in N_0^{\varphi}$; on peut écrire $a = \Sigma\left(\frac{\partial}{\partial\theta_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i}\right) b_i$, avec par exemple $b_i \in M_m^{\varphi}$, $m \geq 0$. Si $m = 0$, il n'y a rien à démontrer (noter que les $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i}$ sont de degré 0 , et les $\frac{\partial}{\partial\theta_i}$ de degré -1). Si $m > 0$, on trouve $\sum_j \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i}\sigma_m(b_i) = 0$, d'où $\sigma_m(b_i) = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\bar{c}_{ij}$, $\bar{c}_{ij}$ homogènes de degré m , $\bar{c}_{ij} = -\bar{c}_{ji}$; on prolonge alors les $\bar{c}_{ij}$ en des $c_{ij} \in N_m^{\varphi}$; en posant $b_i' = b_i - \sum_j\left(\frac{\partial}{\partial\theta_j} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j}\right) c_{ij}$, les b_i' sont d'ordre $m-1$, et l'on a

$a = \Sigma \left(\frac{\partial}{\partial\theta_i} + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i} \right) b'_i$; d'où le résultat par récurrence.

La proposition précédente montre que, sous les mêmes hypothèses, $\sigma(R^\varphi)$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur C^φ, homogènes de degré 0 en θ. Comme en (3.4), soient alors I, $J \subset [0,\ldots,n]$, soit ψ la projection $(x,\xi) \longmapsto (x_i, \xi_j)_{i\in I,\, i\in J}$ et soit $\hat{\mathcal{E}}'$ le faisceau des opérateurs pseudo-différentiels dépendant seulement des x_i et des ξ_j $(i \in I, j \in J)$.

PROPOSITION (5.2).- <u>Supposons que la projection</u> $\psi \circ \tilde{\varphi}|C^\varphi$ <u>soit étale et ne rencontre pas l'ensemble</u> $\xi_j = 0$, $j \in J$; <u>alors, au voisinage de tout point</u> $a \in C^\varphi$, R^φ <u>est un</u> $(\psi \circ \tilde{\varphi})^{-1}(\hat{\mathcal{E}}')$<u>-Module filtré-libre de rang</u> 1.

La proposition résulte immédiatement du fait que le même résultat est vrai pour les symboles, et d'une récurrence sur la filtration.

<u>Remarque</u> 5.3.- Supposons φ non dégénérée (auquel cas C_φ est lisse de dimension n), et supposons $\tilde{\varphi}$ de rang n sur C_φ ; alors $\tilde{\varphi}(C_\varphi) = \Lambda_\varphi$ est une variété <u>lagrangienne</u> de T^*X, i.e. une variété de dimension n sur laquelle ω s'annule ; en effet, on a $\tilde{\varphi}^*(\lambda) = \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx_i = d\varphi - \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i} d\theta_i$, donc $\tilde{\varphi}^*(\lambda)|C_\varphi = d\varphi|C_\varphi$; mais, on a (Euler) $\varphi = \Sigma\ \theta_i \frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i}$, donc $\varphi = 0$ sur C_φ ; par suite, $\lambda|\Lambda_\varphi = 0$, et <u>a fortiori</u> $\omega|\Lambda_\varphi = 0$; réciproquement, il est classique que toute variété lagrangienne homogène de $T^*X \setminus 0$ peut être définie localement de cette manière (par exemple, après un changement convenable de coordonnées, on peut prendre $\varphi = \langle x,\theta\rangle - H(\theta)$, H homogène de degré 1, et alors Λ_φ est défini par $x_i = \frac{\partial H}{\partial \xi_i}$).

On applique ces considérations dans la situation suivante : soient X et Y deux variétés de dimension n, U un ouvert de $T^*X \setminus 0$, V un ouvert de $T^*Y - 0$, et γ une transformation canonique (homogène) $U \xrightarrow{\sim} V$, i.e. un difféomorphisme $U \longrightarrow V$ commutant à l'homothétie des fibres, et vérifiant $u^*(\omega_X) = \omega_Y$; il revient au même de dire qu'on a $u^*(\lambda_X) = \lambda_Y$ (en effet, la forme de Liouville λ détermine l'homothétie infinitésimale $h = \Sigma\ \xi_i \frac{\partial}{\partial\xi_i}$ à cause de la formule $i_h\omega = \lambda$). Soit Γ le graphe de γ dans $T^*(X \times Y)$, et $\bar{\Gamma}$ son transformé par la symétrie $(x,y,\xi,\eta) \longmapsto (x,y,\xi,-\eta)$. Dans $T^*(X \times Y)$, $\bar{\Gamma}$ est lagrangienne, et donc localement définissable par une fonction de phase $\varphi(x,y,\theta)$. On prend ici pour ψ la projection $T^*(X \times Y) \longmapsto T^*X$ i.e. en coordonnées locales $(x,y,\xi,\eta) \longmapsto (x,\xi)$; alors le choix d'une section a de R_o^{φ}, de symbole partout $\neq 0$ sur $\bar{\Gamma}$, donne une bijection $p \longmapsto L_p^{\varphi}(a)$ de $\hat{\mathcal{E}}_X|U$ sur R^{φ} ; en notant $\bar{V}$ l'image de V par l'application $(y,\eta) \longmapsto (y,-\eta)$, on obtient de même une bijection $\hat{\mathcal{E}}_Y|\bar{V} \longrightarrow R^{\varphi}$; notons $\bar{\chi} : \hat{\mathcal{E}}_X|U \longrightarrow \hat{\mathcal{E}}_Y|\bar{V}$ le composé ; pour p, $q \in \hat{\mathcal{E}}_X$, posons $p' = \bar{\chi}(p)$, $q' = \bar{\chi}(q)$.

<u>Lemme</u> (5.4).- <u>On a</u> $\chi(p \circ q) = q' \circ p'$.

En effet, on a $L^{\varphi}_{p \circ q}(a) = L^{\varphi}_p(L^{\varphi}_q(a)) = L^{\varphi}_p(L^{\varphi}_{q'}(a)) = L^{\varphi}_{q'}(L^{\varphi}_p(a)) = L^{\varphi}_{q'}L^{\varphi}_{p'}(a) = $ $= L^{\varphi}_{q' \circ p'}(a)$ (car p et q', considérés comme pseudo-différentiels sur $X \times Y$, commutent) .

Finalement, le choix d'un volume v sur Y et l'extension aux opérateurs pseudo-différentiels de la notion d'adjoint donnent un antiisomorphisme $\hat{\mathcal{E}}_Y|\bar{V} \longrightarrow \hat{\mathcal{E}}_Y|V$; par exemple, en coordonnées, avec $v = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$, on a, pour un opérateur différentiel

$$q(y,\partial) = \Sigma\, a_{\alpha}(\eta)\partial^{\alpha} \quad ,$$

la formule

$$q^*(y,\partial) = \Sigma\,(-\partial)^{\alpha}\, a_{\alpha}(y) \, .$$

Ceci s'écrit aussi (Leibniz)

$$q^*(y,\eta) = e^{d_y d_\eta}\, q(y,-\eta)$$

et cette dernière formule s'étend immédiatement aux opérateurs pseudo-différentiels. Finalement, on a le résultat suivant :

THÉORÈME (5.5).(Maslov-Egorov-Hörmander, variante formelle).- <u>Dans les hypothèses précédentes, soit</u> χ <u>une transformation canonique homogène</u> $U \xrightarrow{\sim} V$; <u>localement,</u> χ <u>s'étend en un isomorphisme respectant les filtrations</u> $\tilde{\chi} : \hat{\mathcal{E}}_X|U \xrightarrow{\sim} \hat{\mathcal{E}}_Y|V$; <u>pour</u> $p \in \hat{\mathcal{E}}_X|U$, <u>on a</u> $\sigma(p)(a) = \sigma(\tilde{\chi}(p))(\chi(a))$.

Seule la dernière assertion n'a pas été démontrée ; on le laisse au lecteur.

Terminons ce paragraphe par quelques remarques :

a) La transformation $\tilde{\chi}$ n'est pas uniquement déterminée par χ (elle dépend du choix de a et du volume v).

b) La formule de changement de variable peut néanmoins être considérée comme un cas particulier du théorème (5.5) : si χ est un difféomorphisme d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ sur un autre, il suffit de prendre $\varphi = \langle y - \chi(x), \theta \rangle$, $a = 1$, $v = dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$.

c) Si l'on travaille avec des symboles analytiques, on obtient les mêmes résultats : la seule modification non triviale est la démonstration de la convergence dans la proposition (5.2) ; on peut l'établir par le même théorème de finitude auquel il a été fait allusion au § 3 (cf. [2]).

6. Involutivité (bis)

D'après (3.3 b), le théorème (2.3) est un cas particulier du résultat suivant :

THÉORÈME (6.1).- Soient U un ouvert de T^*X , et M un $\hat{\mathcal{E}}$-Module (ou un $\mathcal{E}$-Module) cohérent sur U ; alors le support de M est involutif.

Ce théorème est démontré pour $\mathcal{E}$ dans [5] par une méthode délicate, utilisant les opérateurs pseudo-différentiels d'ordre infini. Cette méthode ne s'applique donc pas à $\hat{\mathcal{E}}$. Nous allons donner ici une démonstration assez simple ; une démonstration voisine a été obtenue indépendamment par Kashiwara (communication personnelle).

Il suffit de démontrer le résultat sur un ouvert dense de $V = \operatorname{supp} M$, qu'on peut donc supposer contenu dans l'ensemble V_ℓ des points lisses de V . D'autre part, comme le théorème est local, on peut supposer que X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$; soit alors (x^o, ξ^o) un point de V_ℓ , et choisissons une bonne filtration de M au voisinage de (x^o, ξ^o) ; deux cas sont à distinguer :

1) Le cas où $\xi^o \neq 0$; si $n = 1$, le théorème est évident par homogénéité de V ; si $n \geq 2$, on raisonne par l'absurde : si V n'est pas involutif au voisinage de (x^o, ξ^o) , on peut par une transformation canonique, supposer qu'il est contenu dans la sous-variété $x_1 = 0$, $\xi_1 = 0$; alors, d'après (3.4), on peut trouver une projection $\psi : (x, \xi) \longmapsto (x', \xi')$, $x' = (x_i)_{i \in I}$, $\xi' = (\xi_j)_{j \in J}$, I et J contenus dans $\{2, \ldots, n\}$ telle que (en rétrécissant au besoin U) $\psi|V$ soit un difféomorphisme ; on peut aussi, par un éventuel changement de coordonnées, supposer qu'on a $\xi'^o \neq 0$; alors $M' = \psi_*(M)$ est cohérent sur $\hat{\mathcal{E}}'$ (notations de (3.4)) ; enfin, quitte à remplacer (x^o, ξ^o) par un point voisin, on peut supposer que $\sigma(M')$ est libre de rang μ sur $\mathcal{O}'(0)$ au voisinage de (x'^o, ξ'^o) ; soit $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_\mu$ une base de $\sigma(M')$, qu'on relève en une base $e_1, \ldots, e_\mu$ de degré 0 de M' sur $\hat{\mathcal{E}}'$. Posant $\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_\mu \end{pmatrix}$, on aura donc

$$x_1 \underline{e} = P \underline{e} \quad \text{avec } P = (p_{ij}) \quad p_{ij} \text{ sections de } \hat{\mathcal{E}}'_0 , \ (1 \leq i, j \leq \mu)$$

et de même

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\underline{e} = Q\underline{e} \ , \qquad Q = (q_{ij}) \quad , \quad q_{ij} \text{ sections de } \hat{\mathcal{E}}'_1 \ ;$$

comme M a son support dans $x_1 = \xi_1 = 0$, $\sigma_o(P)$ et $\sigma_1(Q)$ sont nilpotents ; alors, quitte à remplacer (x'^o,ξ'^o) par un point voisin, on peut trouver une matrice inversible M à coefficients dans $\mathcal{O}'(0)$ telle que $M^{-1}P_oM$ soit réduit à la forme de Jordan au voisinage de (x'^o,ξ'^o) ; en prolongeant M en une matrice à coefficients dans $\hat{\mathcal{E}}'_o$, on pourra donc supposer qu'on a

$$P = \sum_{0}^{-\infty} P_k \quad , \qquad Q = \sum_{1}^{-\infty} Q_k \text{ , avec } P_k \text{ et } Q_k \text{ homogènes de degré } k \text{ et}$$

P_o réduit à la forme de Jordan.

$$\text{On a } \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1\,\underline{e}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(P\,\underline{e}) = P\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\underline{e}\right) = P\circ Q\underline{e} \quad \text{et de même}$$

$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\underline{e} = Q\circ P\underline{e}$; par suite, de $[\frac{\partial}{\partial x_1}, x_1] = \text{id.}$, on déduit qu'on doit avoir $P\circ Q - Q\circ P = \text{id}$; montrons que ceci est impossible.

On a $P\circ Q - Q\circ P = \sum_{1}^{-\infty} R_k$, avec $R_1 = [P_o, Q_1]$; calculons R_o ; d'après (3.1), on a $R_o = R_o^1 + R_o^2 + R_o^3$, avec

$$R_o^1 = \Sigma \frac{\partial P_o}{\partial \xi_i}\frac{\partial Q_1}{\partial x_i} - \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_i}\frac{\partial P_o}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{car } P_o \text{ est une matrice constante !})$$

$$R_o^2 = [P_{-1}, Q_1] \quad , \quad R_o^3 = [P_o, Q_o] \quad ;$$

par suite, on a $\mathrm{Tr}(R_o) = 0$, donc $R_o \neq \text{id}$; ceci donne la contradiction cherchée.

2) <u>Le cas où</u> $\xi^o = 0$. S'il existe des points $(x,\xi) \in V$ arbitrairement voisins de (x^o,ξ^o) , avec $\xi \neq 0$, on est ramené au cas précédent. Sinon, au voisinage de (x^o,ξ^o) , V est contenu dans la section nulle $\xi = 0$ de T^*X ; alors M est un $\mathcal{D}$-Module cohérent, de variété caractéristique la section nulle ; donc $gr_k(M)$ est nul pour k assez grand, donc la suite $\{M_k\}$ est stationnaire, et M est cohérent sur $\mathcal{O}_X$; il est alors bien connu que M est libre sur $\mathcal{O}_X$, donc de support X tout entier au voisinage de $(x^o,0)$; ceci achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. BOUTET DE MONVEL, P. KRÉE - Pseudodifferential operators and Gevrey classes, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 17 (1967), p. 295-323.

[2] L. BOUTET DE MONVEL - Opérateurs pseudo-différentiels analytiques, Séminaire Grenoble (1975/76).

[3] V. GUILLEMIN, D. QUILLEN, S. STERNBERG - The classification of the complex primitive infinite pseudogroups, Proc. Nat. Ac. Sc., 55-4(1966), p. 687-690.

[4] V. GUILLEMIN, D. QUILLEN, S. STERNBERG - The integrability of characteristics, Comm. Pure Appl. Math., 23(1970), p. 39-77.

[5] M. KASHIWARA, T. KAWAI, M. SATO - Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math., n° 287 (1973), p. 264-529, Springer.

[6] M. KASHIWARA - B-functions and holonomic systems, Invent. Math., 38-1 (1976), p. 33-53.