SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JEAN-MICHEL BONY

Polynômes de Bernstein et monodromie

Séminaire N. Bourbaki, 1976, exp. n° 459, p. 97-110
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__97_0>

Séminaire BOURBAKI 459-01
27e année, 1974/75, n° 459 Février 1975

POLYNÔMES DE BERNSTEIN ET MONODROMIE

[d'après B. MALGRANGE]

par Jean-Michel BONY

Introduction

I. N. Bernstein [1] et J. E. Björk [2] ont démontré que, étant donné un germe $f \in \mathbf{C}\{x_1,\dots,x_n\}$, singulier à l'origine, on peut lui associer un polynôme $b(s)$ et un opérateur différentiel $P(x\,,\,s\,,\frac{\partial}{\partial x})$ de telle sorte que l'on ait

$$P(x\,,\,s\,,\frac{\partial}{\partial x})\,f^s \;=\; b(s)f^{s-1}\;.$$

Il semble raisonnable de conjecturer que (en choisissant le meilleur des b ci-dessus) les zéros de b sont rationnels, et de rechercher des liens entre ces zéros et la topologie de la singularité.

Nous nous proposons d'exposer ici une partie des résultats de B. Malgrange (cf. [7], [8], [9]), qui a démontré cette conjecture dans le cas d'une singularité isolée, en donnant une relation très étroite entre les zéros de $b(s)$ et la monodromie de f .

1. Monodromie d'une singularité isolée

Dans tout cet exposé, on se donne une fonction analytique $f(x_1,\dots,x_n)$ définie au voisinage de l'origine de $\mathbf{C}^n$ $(n \geq 2)$, vérifiant $f(0) = 0$. On suppose que f possède un point critique isolé à l'origine, c'est-à-dire que les $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ ont un zéro commun à l'origine et n'en ont pas d'autre au voisinage.

En désignant par $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions analytiques dans $\mathbf{C}^n$, on définit le nombre de Milnor μ de la singularité par

$$\mu = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_{X,0} \,/\, (\frac{\partial f}{\partial x_1}\,,\dots,\,\frac{\partial f}{\partial x_n})\;.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, et posons

$$T = \{t \in \mathbf{C} \mid |t| < \eta\} \quad , \qquad T^* = T \setminus \{0\} \quad ,$$

$$X = \{x \in \mathbf{C}^n \mid |x| < \varepsilon \text{ et } |f(x)| < \eta\} \quad , \qquad X^* = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\} \quad ,$$

$$X_t = \{x \in X \mid f(x) = t\} \ .$$

THÉORÈME 1.1 [10].- <u>Pour</u> $\varepsilon \leq \varepsilon_o$ <u>et</u> $\eta \leq \eta_o(\varepsilon)$, <u>on a</u>

a) <u>L'application</u> $f : X^* \to T^*$ <u>est une fibration</u> C^∞ .

b) <u>Pour</u> $t \neq 0$, <u>on a</u> $H_p(X_t, \mathbf{C}) = 0$ <u>pour</u> $p \neq 0$, $n - 1$ <u>et</u> $H_{n-1}(X_t, \mathbf{C})$ <u>est de dimension</u> μ .

Le résultat de Milnor est en fait plus précis et affirme que, pour $t \neq 0$, X_t a le type d'homotopie d'un bouquet de μ sphères.

Si U est un ouvert de T^* suffisamment petit, $f : X^* \cap f^{-1}(U) \to U$ peut être considérée comme la projection d'un produit sur l'un de ses facteurs, et si t_1 et t_2 appartiennent à U , on a un isomorphisme canonique de $H_{n-1}(X_{t_1}, \mathbf{C})$ sur $H_{n-1}(X_{t_2}, \mathbf{C})$.

Soient alors $\mathfrak{R}$ le revêtement universel de T^* et $s \mapsto [s]$ la projection de $\mathfrak{R}$ sur T^* . On dira qu'une section $\gamma : s \mapsto \gamma(s) \in H_{n-1}(X_{[s]}, \mathbf{C})$, définie sur $\mathfrak{R}$, dépend continûment de s si, pour s_1 et s_2 assez voisins, $\gamma(s_1)$ et $\gamma(s_2)$ sont images l'un de l'autre par l'isomorphisme canonique de $H_{n-1}(X_{[s_1]}, \mathbf{C})$ sur $H_{n-1}(X_{[s_2]}, \mathbf{C})$. On dira aussi abusivement que $\gamma(t)$ est une section multiforme au-dessus de T^* dépendant continûment de t .

Soient $s_o \in \mathfrak{R}$ et $\gamma_o \in H_{n-1}(X_{[s_o]}, \mathbf{C})$. Il existe alors un et un seul $\gamma(s)$ dépendant continûment de s , défini sur $\mathfrak{R}$, tel que $\gamma(s_o) = \gamma_o$. Pour $s_1 \in \mathfrak{R}$, l'application $\gamma_o \mapsto \gamma(s_1)$ est un isomorphisme.

En particulier, l'application $\gamma(s_o) \mapsto \gamma(s_o\, e^{2i\pi})$ est un automorphisme h de $H_{n-1}(X_{[s_o]}, \mathbf{C})$, dit <u>automorphisme de monodromie</u>. Si l'on change de point s_o , on obtient un automorphisme conjugué. On associe ainsi à f une (classe de) matrice carrée d'ordre μ , définie à une équivalence près, dite matrice de monodromie.

On aurait pu faire ce qui précède pour $H_{n-1}(X_t, \mathbf{Z})$, ce qui prouve qu'il existe des bases où la matrice de monodromie h est à coefficients entiers, et donc que ses valeurs propres sont algébriques. On a en fait le résultat suivant, nettement plus difficile (voir par exemple [3]).

THÉORÈME DE MONODROMIE.- Les valeurs propres de h sont des racines de l'unité. Les racines du polynôme minimal de h ont une multiplicité inférieure ou égale à n .

2. Polynômes de Bernstein

Soit s une indéterminée. Considérons l'ensemble des sommes finies du type $\sum_{k,\ell \geq 0} a_{k\ell}(x)\, s^k\, f(x)^{s-k}$ où les $a_{k\ell}$ sont des germes de fonctions analytiques à l'origine de $\mathbb{C}^n$. Muni des relations évidentes $f(x)\,f(x)^{s-k-1} = f(x)^{s-k}$ et des lois de compositions non moins évidentes, c'est une $\mathcal{O}_{X,0}$-algèbre.

Si, maintenant, on considère les opérateurs différentiels $P(x\,,\,s\,,\frac{\partial}{\partial x})$ à coefficients analytiques en x et polynomiaux en s :

$$P(x\,,\,s\,,\frac{\partial}{\partial x}) = \Sigma\, b_{k\alpha}(x)\; s^k \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} ,$$

ils opèrent sur l'anneau précédent, en posant

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f^{s-k} = (s-k)\frac{\partial f}{\partial x_i} f^{s-k-1} .$$

Si on attribue à s des valeurs entières, les opérations précédentes sont compatibles avec les opérations habituelles sur les fonctions méromorphes.

THÉORÈME 2.1.- Il existe un polynôme $B(s)$ et un opérateur différentiel $P(x\,,\,s\,,\frac{\partial}{\partial x})$ tels que l'on ait

$$P(x\,,\,s\,,\frac{\partial}{\partial x})\, f^s = B(s) f^{s-1} .$$

Ce théorème a en fait été démontré par I. N. Bernstein [1] lorsque f est un polynôme quelconque, et a été étendu par J. E. Björk [2] au cas où f est un germe de fonction analytique ayant une singularité quelconque à l'origine.

Il est clair que l'ensemble des $B(s)$ pour lesquels on a une relation du type ci-dessus est un idéal, et nous noterons $b(s)$ (le polynôme de Bernstein de f) le générateur de cet idéal dont le coefficient dominant est égal à 1 .

On a $p(x, 0, \frac{\partial}{\partial x})\, 1 = b(0) f^{-1}$, ce qui entraîne $b(0) = 0$. Nous poserons $b(s) = s\,\tilde{b}(s)$.

Les résultats de Malgrange [9] peuvent s'énoncer ainsi

THÉORÈME 2.2.- a) Les zéros de $\tilde{b}$ sont rationnels et < 1.

b) L'application $s \mapsto \exp(-2i\pi s)$ est surjective de l'ensemble des zéros de $\tilde{b}$ sur l'ensemble des valeurs propres de h. Plus précisément, si $\tilde{b}(s) = \prod_j (s - s_j)$, et si on pose $p(\lambda) = \prod_j (\lambda - \exp(-2i\pi s_j))$, le polynôme minimal de h divise p qui divise lui-même le polynôme caractéristique de h.

3. Connexions

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes en $0 \in \mathbf{C}$ et soit Ω l'espace des germes de 1-formes holomorphes. On notera K le corps des germes de fonctions méromorphes. Si $\mathcal{R}_\varepsilon$ désigne le revêtement universel du disque pointé de rayon ε, on posera $M = \varinjlim \mathcal{O}(\mathcal{R}_\varepsilon)$ (espace des germes de fonctions holomorphes multiformes dans le complémentaire de l'origine).

DÉFINITION 3.1.- Une K-connexion sur un K-espace vectoriel $\mathcal{E}$ est une application ∇ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} \Omega$ qui est $\mathbf{C}$-linéaire, et qui vérifie, pour $e \in \mathcal{E}$ et $f \in K$: $\nabla f e = e \otimes df + f \nabla e$.

Comme l'application $f(t) \mapsto f(t)dt$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}$ sur Ω, on peut poser $\nabla e = De \otimes dt$, où D est une application $\mathbf{C}$-linéaire de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ vérifiant $D(fe) = \frac{df}{dt} e + fDe$. Par abus de langage, nous parlerons également de la connexion D.

Supposons que $\mathcal{E}$ soit de dimension finie, et soit $e_1 \dots e_\mu$ une base de $\mathcal{E}$. On définit les $c_{ij} \in K$ par

$$De_i = \Sigma\, c_{ij}\, e_j .$$

Si $e = \Sigma f_i e_i \in \mathcal{E}$, on a alors

$$De = \Sigma \frac{df_i}{dt} e_i + \Sigma f_i c_{ij} e_j$$

et la connexion D associe au vecteur de composantes $(f_1 \dots f_\mu)$ le vecteur de composantes $(\dots, \frac{df_i}{dt} + \Sigma\, c_{ki} f_k, \dots)$.

On appelle section horizontale (multiforme) de D un élément e de $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}} M$ vérifiant $De = 0$. Si $F = (f_1, \dots, f_\mu)$ sont les composantes (multiformes) de e , et si on désigne par C la matrice de composantes c_{ki} , on obtient le système différentiel

$$\frac{dF}{dt} + CF = 0 .$$

Le résultat suivant est bien classique : pour $t_0 \neq 0$ (suffisamment près de de l'origine) et $F_0 \in \mathbb{C}^\mu$, il existe une et une seule solution multiforme $F(t) = R(t,t_0).F_0$ du système différentiel vérifiant $F(t_0) = F_0$. A une équivalence près, la matrice $h_D = R(t_0 e^{2i\pi}, t_0)$ ne dépend ni de t_0 , ni de la base de $\mathcal{E}$ choisie. On appelle h_D <u>la matrice de monodromie de la connexion</u> D .

THÉORÈME 3.2.- <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

a) <u>Il existe une base de</u> $\mathcal{E}$ <u>dans laquelle la matrice</u> C <u>a au plus un pôle simple à l'origine</u>.

b) <u>Dans tout secteur angulaire</u> $\alpha \leq \operatorname{Arg} t \leq \beta$ <u>du revêtement universel, les sections horizontales de</u> D <u>sont à croissance lente</u> (<u>c'est-à-dire que dans une (ou toute) base de</u> $\mathcal{E}$, <u>les composantes</u> f_i <u>vérifient une estimation du type</u> $|f_i(t)| \leq C_{\alpha\beta}\, t^{-N}$).

On dit que <u>la connexion est régulière</u> (ou à point singulier régulier) si ces conditions sont vérifiées.

Soit alors C_0 une matrice telle que $\exp(-2i\pi\, C_0) = h_D$. Les valeurs propres de h_D sont du type $\exp(-2i\pi\alpha)$ avec α valeur propre de C_0 . D'autre part, si on pose $R(t,t_0) = H(t)\exp(-C_0 \log t)$, la matrice $H(t)$ est uniforme en t et à croissance lente, donc à coefficients méromorphes, et les composantes d'une section horizontale sont données par $F(t) = H(t)\exp(-C_0 \log t)F_0$.

En mettant C_o sous forme de Jordan, on voit facilement que $\exp(-C_o \log t).F_o$ est somme de termes du type $t^{-\alpha}(\log t)^q A_{\alpha q}$ avec α valeur propre de C_o et $q+1$ compris entre 1 et la multiplicité de α dans le polynôme minimal de C_o. En développant les coefficients holomorphes en série entière de t, on obtient que toute section horizontale de la connexion s'écrit

$$e = \Sigma f_i e_i$$

$$f_i = \sum_{\alpha,q} a_{\alpha q} t^{-\alpha}(\log t)^q ,$$

la série étant convergente au voisinage de l'origine avec $e^{-2i\pi\alpha}$ valeur propre de h_D, et $(q+1)$ inférieur ou égal à la multiplicité de $e^{-2i\pi\alpha}$ dans le polynôme minimal de h_D.

4. La connexion de Gauss-Manin

Nous désignerons par $\mathcal{O}_X$, Ω_X^p les faisceaux des fonctions holomorphes, des p-formes holomorphes dans X, et par d la différentielle extérieure.

Nous poserons $\Omega_{X/T}^p = \Omega_X^p / df \wedge \Omega_X^{p-1}$ (faisceau des p-formes relatives). Par passage au quotient, d induit $d_{X/T} : \Omega_{X/T}^p \to \Omega_{X/T}^{p+1}$. Le complexe ainsi obtenu sera noté $\Omega_{X/T}^{\cdot}$. On a le résultat suivant [3] :

THÉORÈME 4.1.- a) <u>Les</u> $H^p(f_* \Omega_{X/T}^{\cdot})$ <u>sont cohérents</u>.

b) <u>La restriction de</u> $H^p(f_* \Omega_{X/T}^{\cdot})$ <u>à</u> T^* <u>est localement libre et s'identifie aux sections holomorphes du fibré</u> $t \longmapsto H^p(X_t, \mathbf{C})$.

c) <u>L'application naturelle</u> $H^p(f_* \Omega_{X/T,0}^{\cdot}) \to H^p(\Omega_{X/T,0}^{\cdot})$ <u>est un isomorphisme</u>.

Posons $E = H^{n-1}(f_* \Omega_{X/T,0}^{\cdot}) = H^{n-1}(\Omega_{X/T,0}^{\cdot})$, on a

$$E = \frac{\{\alpha \in \Omega_{X/T,0}^{n-1} \mid d_{X/T}\, \alpha = 0\}}{d_{X/T}\, \Omega_{X/T}^{n-2}} = \frac{\{\omega \in \Omega_{X,0}^{n-1} \mid \exists\, \pi \in \Omega_{X,0}^{n-1},\ d\omega = df \wedge \pi\}}{df \wedge \Omega_{X,0}^{n-2} + d\,\Omega_{X,0}^{n-2}} ,$$

c'est un $\mathcal{O}$-module (on note toujours $\mathcal{O}$ sans indice l'anneau des germes de fonctions holomorphes de la variable t), la multiplication par $\varphi(t) \in \mathcal{O}$ étant déduite de l'application $\omega \longmapsto \varphi(f(x))\omega$.

On définit également le $\mathcal{O}$-module F :

$$F = \Omega^{n-1}_{X,0} / df \wedge \Omega^{n-2}_{X,0} + d\Omega^{n-2}_{X,0} \quad .$$

Soit $e \in E$, et soit ω une $n-1$ forme dont la classe $[\omega]$ soit égale à e. Il existe alors $\pi \in \Omega^{n-1}_{X,0}$ telle que $d\omega = df \wedge \pi$, et la classe $[\pi]$ de π dans F ne dépend que de e. Nous noterons D l'application de E dans F ainsi définie.

THÉORÈME 4.2.- a) D est $\mathbf{C}$-linéaire, et on a pour $\varphi \in \mathcal{O}$ et $e \in E$:

$$D(\varphi e) = \frac{d\varphi}{dt} e + \varphi De \ .$$

b) F/E est de torsion sur $\mathcal{O}$, et D se prolonge en une connexion sur $\mathcal{E} = E \otimes_{\mathcal{O}} K = F \otimes_{\mathcal{O}} K$.

c) Soit, pour t appartenant au revêtement universel $\mathcal{R}$ de T^*, $\gamma(t) \in H_{n-1}(X_t , \mathbf{C})$ dépendant continûment de t (cf. § 1). Alors, pour $\omega \in \Gamma(X, \Omega^{n-1}_{X/T})$, $\int_{\gamma(t)} \omega$ est holomorphe et on a

$$\frac{d}{dt} \int_{\gamma(t)} \omega = \int_{\gamma(t)} D[\omega] \ .$$

[On a noté abusivement X_t la fibre au point de T^* correspondant à $t \in \mathcal{R}$.]

Démonstration. a) Soit $e = [\omega]$. Alors $\varphi e = [\varphi \circ f\ \omega]$ et $d(\varphi \circ f\ \omega) = \varphi' \circ f\ df \wedge \omega + \varphi \circ f\ d\omega$, mais on a $d\omega = df \wedge \pi$ avec $[\pi] = D[\omega]$, d'où $d(\varphi \circ f\ \omega) = df \wedge (\varphi' \circ f\ \omega + \varphi \circ f\ \pi)$ et $D(\varphi e) = \varphi' e + \varphi De$.

b) On a $F/E = \Omega^{n-1}_{X/T,0} / \{\alpha \in \Omega^{n-1}_{X/T,0} \mid d_{X/T}\alpha = 0\}$. L'application déduite de $d_{X/T}$ est donc un isomorphisme de F/E sur $\Omega^{n}_{X/T,0}$. En identifiant $\Omega^{n}_{X,0}$ à $\mathcal{O}_{X,0}$ par $\varphi(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \longmapsto \varphi(x)$, on obtient

$$\Omega^{n}_{X/T} \cong \mathcal{O}_{X,0} / \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \ .$$

Or, les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ne s'annulant simultanément qu'à l'origine, on a, pour un k convenable, $f^k \in \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$, ce qui signifie précisément que $t^k F \subset E$.

Pour étendre D, on introduit les sous-modules de torsion E_1 et F_1 de

E et F et on vérifie facilement que $DE_1 \subset F_1$. On peut donc définir D de $E/E_1 \to F/F_1$ et, E/E_1 étant libre, le prolonger à $E/E_1 \otimes_{\mathcal{O}} K = \mathcal{E}$.

c) $X^* \xrightarrow{f} T^*$ étant une fibration C^∞ , on peut se ramener localement à la situation suivante : $X^* \cap f^{-1}(U)$ est difféomorphe à $U \times \Omega$ où Ω est un ouvert de $\mathbf{C}^{n-1}$, $\gamma(u)$ s'identifie à $\{u\} \times \gamma_0$ où γ_0 est un n-1 cycle singulier de Ω et $f(t,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1}) = t$. On a alors, pour t et $t+h$ dans U

$$\int_{\gamma(t+h)} \omega - \int_{\gamma(t)} \omega = \int_{[t,t+h]\times\gamma_0} d\omega = \int_{[t,t+h]\times\gamma_0} du \wedge \pi = \int_t^{t+h} du \int_{\{u\}\times\gamma_0} \pi$$

et $\frac{1}{h}\left(\int_{\gamma(t+h)} \omega - \int_{\gamma(t)} \omega\right) \to \int_{\gamma(t)} \pi = \int_{\gamma(t)} D[\omega]$.

DÉFINITION 4.3.- La connexion D ainsi définie est dite <u>connexion de Gauss-Manin</u>. Nous noterons h_D sa monodromie.

Soit ω une section horizontale (multiforme) de D . Si $\gamma(t)$ dépend continûment de t , on a, d'après ce qui précède

$$\frac{d}{dt}\int_{\gamma(t)} \omega = \int_{\gamma(t)} d\omega = 0 ,$$

ou encore, en notant $\omega(t) \in H^{n-1}(X_t , \mathbf{C})$ la classe de la restriction de ω à X_t , et en notant $\langle \cdot , \cdot \rangle$ la dualité entre $H_{n-1}(X_t , \mathbf{C})$ et $H^{n-1}(X_t , \mathbf{C})$, on a

$$\langle \gamma(t) , \omega(t) \rangle = \text{constante} .$$

En particulier : $\langle \gamma(te^{2i\pi}) , \omega(te^{2i\pi}) \rangle = \langle \gamma(t) , \omega(t) \rangle$

$$\langle h\gamma(t) , h_D\, \omega(t) \rangle = \langle \gamma(t) , \omega(t) \rangle .$$

Les $\gamma(t)$ (resp. $\omega(t)$) formant une base de $H_{n-1}(X_t , \mathbf{C})$ (resp. $H^{n-1}(X_t , \mathbf{C})$) pour γ multiforme dépendant continûment de t (resp. ω section horizontale de D), on en déduit que la monodromie h de la singularité et la monodromie h_D de la connexion de Gauss-Manin sont inverses transposées l'une de l'autre

$$h_D = h^{*-1} .$$

5. <u>Régularité et périodes d'intégrales</u>

Le théorème suivant, fondamental dans la théorie, peut être démontré par des méthodes analytiques (Nilsson, Griffiths, la démonstration de Malgrange que nous esquissons ci-dessous), arithmétiques (Katz), algébriques (Deligne).

THÉORÈME 5.1.- La connexion de Gauss-Manin est régulière.

Soit $\gamma(t) \in H^{n-1}(X_t, \mathbf{C})$ défini sur le revêtement universel de T^* et dépendant continûment de t. Soient $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ des $n-1$ formes relatives définies dans X, dont les classes $[\omega_1], \dots, [\omega_\mu]$ forment une base de $\mathcal{E}$.

Si $D[\omega_i] = \Sigma c_{ij}[\omega_j]$, les composantes $f_1, \dots, f_\mu$ d'une section horizontale ω de la connexion de Gauss-Manin vérifient $\frac{df_i}{dt} + \Sigma c_{ki} f_k = 0$, tandis que le système des intégrales associées à γ : $I_j(t) = \int_{\gamma(t)} \omega_j$ vérifie

$$\frac{dI_j}{dt} = \int_{\gamma(t)} D[\omega_j] = \Sigma c_{ik} I_k .$$

On obtient un système différentiel où la matrice des c_{ki} intervenant précédemment est remplacée par l'opposé de la transposée, et dont la monodromie sera h, inverse transposée de la monodromie h_D de la connexion de Gauss-Manin.

Il suffit évidemment de démontrer que ce système est à point singulier régulier. En fait, on a le résultat plus fort suivant, qui entraîne la régularité d'après 3.2.

THÉORÈME 5.2 [8].- Soit $I(t) = \int_{\gamma(t)} \omega$ où ω est une $n-1$ forme relative dans X. Alors, dans tout secteur angulaire $\alpha \leq \operatorname{Arg} t \leq \beta$ du revêtement universel $\mathcal{R}$, on a $I(t) \to 0$ pour $t \to 0$.

a) Montrons d'abord que sur chaque rayon (par exemple $0 < t \leq t_o$) on a $I(t) \to 0$.

Le principe de la démonstration consiste à construire une n-chaîne Δ dans $X \cap f^{-1}[0, t_o]$, dont le bord Γ représente $\gamma(t_o)$ et telle que $\Delta \cap f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. En désignant par $\widetilde{\omega}$ une $(n-1)$-forme dont la classe modulo $d\varphi$ est ω, et en posant $\Delta_t = \Delta \cap f^{-1}([0,t])$, un argument à la Stokes montre que

$$I(t) = \int_{\Delta_t} d\widetilde{\omega} ,$$

et cette intégrale tend vers 0 avec t.

Pour justifier cet argument, il faut utiliser un théorème de Łojasiewicz [6] pour construire une triangulation semi-analytique de l'ensemble semi-analytique

$X \cap f^{-1}([0,t_0])$, puis utiliser les résultats de Herrera [4] pour l'existence des intégrales ci-dessus et la validité de la formule de Stokes.

b) Le vecteur $\mathfrak{I}(t) = (I_1(t),\dots,I_\mu(t))$ est solution d'un système différentiel à coefficients méromorphes. On a donc

$$\left\|\frac{d\mathfrak{I}}{dt}\right\| \le \frac{C_1}{|t|^N}\|\mathfrak{I}\|$$

et $\|\mathfrak{I}(t)\| \le C_2 \exp(C_1|t|^{-N})$ dans tout secteur angulaire du revêtement universel.

c) Du principe de Phragmen-Lindelöf et des deux résultats précédents, on déduit que dans tout secteur angulaire $\alpha \le \operatorname{Arg} t \le \beta$ de $\mathcal{R}$, avec $|\beta - \alpha| < \frac{\pi}{N}$, on a $\mathfrak{I}(t) \to 0$, et le cas où α et β sont quelconques s'en déduit immédiatement.

5.3 Périodes d'intégrales

D'après le paragraphe 3, l'intégrale $I(t) = \int_{\gamma(t)} \omega$ possède un développement convergent du type

$$I(t) = \Sigma\ c_{\alpha q}(\omega)\ t^{-\alpha}\ (\log t)^q\ .$$

D'après le résultat précédent, on a nécessairement $-\alpha > 0$. D'autre part, on a $e^{-2i\pi\alpha} = \lambda$ est une valeur propre de h et $q+1$ est inférieur ou égal à la multiplicité de λ dans le polynôme minimal (pour $c_{\alpha q} \neq 0$!).

D'après le théorème de monodromie, on a donc α rationnel et $q \le n-1$.

Soit maintenant π une n-forme dans X . On peut localement dans T^* écrire $\pi = df \wedge \theta$, et les θ définissent une section de $\Omega^{n-1}_{X/T}$ au-dessus de T^* notée $\frac{\pi}{df}$.

Posons $J(t) = \int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df}$.

Il existe une $n-1$-forme ρ dans X avec $d\rho = \pi = df \wedge \theta$. On a donc $D[\rho] = [\theta] = \left[\frac{\pi}{df}\right]$ et $\frac{d}{dt}\int_{\gamma(t)} [\rho] = \int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df}$. Et donc

$$J(t) = \Sigma\ d_{\alpha q}(\pi)\ t^{-\alpha}\ (\log t)^q$$

avec α rationnel, $-\alpha > -1$, $0 \le q \le n-1$ et $e^{-2i\pi\alpha}$ est une valeur propre de h dont la multiplicité dans le polynôme minimal est au moins $q+1$.

6. Relations entre la monodromie et le polynôme de Bernstein

Soit λ une valeur propre de h . Il existe nécessairement une n-forme ω dans X telle que, dans le développement

$$J(t) = \int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df} = \Sigma \ d_{\alpha q}(\pi)\ t^{-\alpha}\ (\log t)^q ,$$

il existe un terme $d_{\alpha q}(\pi) \neq 0$ avec $e^{-2i\pi\alpha} = \lambda$ (sinon, il est facile de voir que λ n'apparaîtrait jamais comme valeur propre de la monodromie).

Soit $\alpha_o = \sup\{\alpha \mid \exists\ \pi\ ,\ \exists\ q\ ,\ d_{\alpha q}(\pi) \neq 0 \text{ et } e^{-2i\pi\alpha} = \lambda\}$

et soit $q_o = \sup\{q \mid \exists\ \pi\ ,\ d_{\alpha_o q}(\pi) \neq 0\}$.

Nous nous bornerons ici à démontrer le résultat très partiel suivant :

THÉORÈME 6.1.- <u>Le polynôme de Bernstein</u> b <u>admet</u> α_o <u>comme racine d'ordre</u> q_o+1 .

Soit donc π une n-forme avec $d_{\alpha_o q_o}(\pi) \neq 0$. Nous allons utiliser le même type d'arguments que pour 4.3(c) : on prend une trivialisation de $f : X \cap f^{-1}(]0,1[) \to\ ]0,1]$ (en se ramenant au cas où $1 \in T$). On peut alors supposer $\gamma(t) = \{t\} \times \gamma_o$ où γ_o est un $n-1$-cycle fixe. On pose $\Delta(t) = [t,1] \times \gamma_o$.

On a alors $\int_{t_o}^1 t^{s-1}\ dt \int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df} = \int_{\Delta(t_o)} f^{s-1}\ \pi$, et donc

$$b(s) \int_{t_o}^1 t^{s-1}\ dt \int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df} = \int_{\Delta(t_o)} [P(s\ ,x\ ,\frac{\partial}{\partial x})\ f^s]\pi\ .$$

Soit P^* l'adjoint formel de P opérant sur les n-formes (c'est-à-dire l'opérateur différentiel tel que, si φ est une fonction et ω une n-forme, l'une des deux étant à support compact, on ait $\int P\varphi\,\omega = \int \varphi P^*\omega$). On a alors

$$\int_{\Delta(t_o)} P\varphi\,\omega - \int_{\Delta(t_o)} \varphi P^*\omega = \int_{\gamma(1)-\gamma(t_o)} \theta$$

où θ est une $n-1$ forme dépendant de φ et ω dont on voit facilement dans le calcul d'intégration par parties, qu'elle a une expression du type

$$\theta = \sum_{|\beta| < k} \frac{\partial^\beta \varphi}{\partial x^\beta} \theta_\beta \qquad \text{où } k \text{ est l'ordre de l'opérateur } P .$$

On a donc

$$\int_{\Delta(t_0)} [P(s, x, \frac{\partial}{\partial x}) f^s]\pi = \int_{\Delta(t_0)} f^s P^* \pi + \int_{\gamma(1)-\gamma(t_0)} \theta$$

avec $\theta = f^{s-k+1}\theta_1$.

$$b(s) \int_{t_0}^1 t^{s-1} dt \int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df} = \int_{t_0}^1 t^s dt \int_{\gamma(t)} \frac{P^*\pi}{df} + \int_{\gamma(1)} \theta_1 - t_0^{s-k+1} \int_{\gamma(t_0)} \theta_1 .$$

Pour Re s assez grand, on peut passer à la limite, et on a

$$(*) \qquad b(s) \int_0^1 t^{s-1} dt \int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df} = \int_0^1 t^s \int_{\gamma(t)} \frac{P^*\pi}{df} + \int_{\gamma(1)} \theta_1 .$$

En utilisant les développements de $\int_{\gamma(t)} \frac{\pi}{df}$ et $\int_{\gamma(t)} \frac{P^*\pi}{df}$ et $\int_0^1 t^{s-1-\alpha} (\log t)^q dt = \frac{d^q}{ds^q} \left(\frac{1}{s-\alpha} \right)$, on voit que le membre de gauche de (*), divisé par b , a un pôle d'ordre $q_0 + 1$ en α_0 , tandis que les pôles du membre de droite, soit ne sont pas congrus à α_0 (mod 1) , soit sont situés en des points $\alpha \le \alpha_0 - 1$. Le polynôme de Bernstein b doit donc avoir un zéro d'ordre $q_0 + 1$ en α_0 .

En poursuivant cet argument et en examinant l'ordre des pôles (si p est la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique de h , il existe un α , peut-être plus petit que α_0 , mais tel que $e^{-2i\pi\alpha} = \lambda$ et $d_{\alpha,p-1}(\pi) \neq 0$ par un π convenable), et en considérant à part le cas $\alpha = 0$, on arrive au résultat suivant [7] :

THÉORÈME 6.2.- <u>Si</u> λ <u>est une valeur propre de</u> h <u>dont la multiplicité dans le polynôme minimal est</u> p , <u>il existe</u> p <u>rationnels</u> $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \dots \le \alpha_p < 1$ <u>tels que</u> $e^{-2i\pi\alpha_j} = \lambda$ <u>et</u> $(s - \alpha_1) \dots (s - \alpha_p)$ <u>divise</u> $\tilde{b}(s)$.

<u>Remarque</u> 6.3.- Nous n'avons pas utilisé jusqu'ici le fait que b est <u>le</u> polynôme de Bernstein (le générateur de l'idéal) et nous nous sommes donc bornés à

démontrer que $\tilde{b}$ possède un certain nombre de zéros rationnels. Pour démontrer le théorème 2.2, l'une des étapes, due à Kashiwara [5], consiste à déduire d'une étude des modules sur l'anneau des germes d'opérateurs différentiels, la construction d'un $\mathcal{O}$-module à connexion, tel que $\tilde{b}$ soit le polynôme minimal de la matrice de connexion.

Il "ne reste plus qu'à" démontrer que c'est la même chose que la connexion de Gauss-Manin, ce qui ne nécessite qu'un nombre fini d'étapes intermédiaires - pour lesquelles nous renvoyons à [9].

BIBLIOGRAPHIE

[1] I.N. BERNSTEIN - Prolongement analytique des fonctions généralisées avec paramètres [en russe], Funkts. Analyz 6.4 (1972), p. 26-40 ; [traduction : Funct. Anal. Appl., 6 (1972), p. 273-285].

[2] J.E. BJÖRK - Dimensions over algebras of differial operators, à paraître.

[3] P. DELIGNE - Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lecture Notes in Math. 163, Springer Verlag 1970.

[4] M. HERRERA - Integration on a semi-analytic set, Bull. Soc. Math. France, 94 (1966), 141-180.

[5] M. KASHIWARA - Papiers non publiés (en japonais).

[6] S. ŁOJASIEWICZ - Triangulation of semi-analytic sets, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa, III, 18.4 (1964), 449-474.

[7] B. MALGRANGE - Sur les polynômes de I. N. Bernstein, Uspekhi Mat. Nauk, 29.4 (1974), 81-88 et Sém. Goulaouic-Schwartz, exposé 20, 1973/74.

[8] B. MALGRANGE - Intégrales asymptotiques et monodromie, Ann. Ec. Norm. Sup. Paris, t. 7 (1974), 405-430.

[9] B. MALGRANGE - Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, preprint.

[10] J. MILNOR - Singular points of complex hypersurfaces, Ann. Math. Studies, 61 (1968), Princeton