LUC ILLUSIE

Cohomologie cristalline

Séminaire N. Bourbaki, 1974-1975, exp. nº 456, p. 53-60
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1974-1975__17__53_0>

COHOMOLOGIE CRISTALLINE
[d'après P. BERTHELOT]

par Luc ILLUSIE

Les paragraphes 1 et 2 de cet exposé sont un résumé très succinct de la thèse de Berthelot [2]. Pour un compte-rendu un peu plus complet, mais tout aussi dépourvu de démonstrations, le lecteur pourra se reporter à [10]. Aux paragraphes 3 et 4, nous indiquons brièvement quelques applications et prolongements de la théorie.

1. Définition de la cohomologie cristalline

1.0 Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$, $W = W(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k . La théorie de Berthelot associe fonctoriellement à chaque variété (= schéma de type fini) X/k des "groupes de cohomologie cristalline" $H^i(X/W)$ qui sont des modules sur W . Pourvu qu'on se limite aux variétés propres et lisses sur k , la cohomologie cristalline remplit le vide laissé en p par les cohomologies ℓ-adiques de Grothendieck : elle permet, par exemple, pour X projective et k fini, une étude p-adique des zéros et des pôles de la fonction zêta de X , voir § 3. L'idée de la construction est due à Grothendieck (cf. [7], [8]).

1.1 Soient A un anneau (commutatif, unitaire), I un idéal de A . Rappelons [26] qu'une structure de puissances divisées (en abrégé, PD-structure) sur I est la donnée d'une famille d'applications $(\gamma_n : I \to A)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés formelles de $x \mapsto x^n/n!$. Un idéal muni d'une PD-structure s'appelle un PD-idéal. Si A est de caractéristique nulle, tout idéal est muni naturellement d'une unique PD-structure. Si A est de torsion, tout PD-idéal est un nil-idéal. L'idéal maximal pW de W est muni d'une unique PD-structure, dite canonique. Elle induit une PD-structure canonique sur l'idéal maximal de chaque quotient $W_n = W/p^{n+1}W$. Désignons par R l'anneau W ou un quotient W_n . Soit (A,I) une paire formée d'une R-algèbre et d'un idéal, le foncteur associant à chaque paire (B,J) formée d'une R-algèbre B et d'un idéal J muni d'une PD-structure compatible avec la PD-structure canonique de pR l'ensemble des homomorphismes de R-algèbres $A \to B$ envoyant I dans J est représenté par une paire $(D_{A/R}(I), \bar{I})$ appelée PD-enveloppe de I relativement à R. On a $D_{A/R}(I)/\bar{I} = A$. Si $I = pA$, on a $(D_{A/R}(I), \bar{I}) = (A,I)$. Cette construction se faisceautise.

1.2 Fixons $n \in \mathbb{N}$. Soit X une variété sur k. Une W_n-immersion fermée $i : U \hookrightarrow \bar{U}$, où U est un ouvert de Zariski de X et l'Idéal de i est muni d'une PD-structure compatible avec la structure canonique de pW_n, s'appelle un PD-W_n-épaississement de X. Les PD-W_n-épaississements de X forment de manière évidente une catégorie, sur laquelle on définit une topologie de Grothendieck en prenant pour familles couvrantes les familles $((U_\alpha \hookrightarrow \bar{U}_\alpha) \to (V \hookrightarrow \bar{V}))$ telles que $(\bar{U}_\alpha \to \bar{V})$ soit un recouvrement ouvert de $\bar{V}$. Le site ainsi obtenu s'appelle site cristallin de X relativement à W_n et se note X/W_n. Les $\mathcal{O}_{\bar{U}}$ définissent un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{X/W_n}$ sur X/W_n. Les groupes de cohomologie $H^i(X/W_n) \overset{\text{dfn}}{=} H^i(X/W_n, \mathcal{O}_{X/W_n})$ sont des W_n-modules, ils forment une algèbre graduée anti-commutative.

Supposons qu'on dispose d'une W_n-immersion fermée $i : X \hookrightarrow Y$, avec Y lisse sur W_n. Alors on peut calculer les $H^i(X/W_n)$ par le procédé suivant. Notons $(\mathcal{D}_X(Y), \bar{I})$ la PD-enveloppe de l'Idéal I de i. $\mathcal{D}_X(Y)$ est une $\mathcal{O}_Y$-Algèbre quasi-cohérente, qui est munie naturellement d'une connexion intégrable par rapport à W_n, de sorte qu'on peut former le complexe de De Rham de Y/W_n à coefficients dans $\mathcal{D}_X(Y)$, soit $\Omega^\bullet_{Y/W_n} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_X(Y)$. Comme $\bar{I}$ est un nil-Idéal et que $\mathcal{D}_X(Y)/\bar{I} = \mathcal{O}_X$, ce complexe est à support dans X. Un des résultats principaux de Berthelot est qu'on a alors un isomorphisme canonique

1.2.1 $$H^*(X/W_n) \simeq H^*(X, \Omega^\bullet_{Y/W_n} \otimes \mathcal{D}_X(Y)) .$$

En particulier, si X est la réduction sur k d'un schéma lisse X'/W_n, on a

1.2.2 $$H^*(X/W_n) \simeq H^*_{DR}(X'/W_n) ,$$

vu que $\mathcal{D}_X(X') = \mathcal{O}_{X'}$ (si $Y \to Z$ est un morphisme de schémas, on note $H^*_{DR}(Y/Z) \overset{\mathrm{dfn}}{=} H^*(Y, \Omega^{\cdot}_{Y/Z})$ la cohomologie de De Rham de Y/Z).

1.3 Pour i fixé et n variable, les $H^i(X/W_n)$ forment un système projectif dont la limite, notée $H^i(X/W)$, est par définition le i-ième groupe de cohomologie cristalline de X par rapport à W . $H^*(X/W) = \oplus H^i(X/W)$ est une W-algèbre graduée anti-commutative, qui dépend fonctoriellement de X/k : tout carré commutatif $X'/k' \to X/k$ induit un homomorphisme $H^*(X/W) \otimes_W W' \to H^*(X'/W')$ $(W' = W(k'))$. En dehors du cas X/k propre et lisse, $H^*(X/W)$ est plutôt pathologique (e.g., si X est la droite affine (resp. la réunion de deux droites projectives se coupant en un point), $H^1(X/W)$ n'est pas de type fini).

2. Cohomologie cristalline des variétés propres et lisses

2.1 Soient k et W comme dans 1.0. Soit X une variété propre et lisse sur k , de dimension d . Les $H^i(X/W)$ sont alors de type fini sur W , nuls pour $i > 2d$ Si X/k est projective ou relevable sur W , le rang de $H^i(X/W)$ est égal au i-ième nombre de Betti ℓ-adique de X , $b^i_\ell(X)$, pour tout $\ell \neq p$ (rappelons que $b^i_\ell(X) = \dim H^i(\bar{X}, \mathbb{Q}_\ell)$, où $\bar{X}$ est déduit par extension des scalaires à une clôture algébrique de k) (*). On le note $b^i(X)$.

La formation de $H^*(X/W)$ commute à toute extension de corps parfaits k'/k : si X'/k' se déduit par extension des scalaires de X/k , on a $H^*(X/W) \otimes_W W' \xrightarrow{\sim} H^*(X'/W')$.

2.2 Pour tout entier i , on a une suite exacte

$$0 \to H^i(X/W) \otimes_W k \to H^i_{DR}(X/k) \to \mathrm{Tor}_1^W(H^{i+1}(X/W), k) \to 0 .$$

Donc $\dim_k H^i_{DR}(X/k) \geq b^i(X)$, avec égalité si et seulement si $H^i(X/W)$ et $H^{i+1}(X/W)$ n'ont pas de torsion.

2.3 Si X/k est la réduction d'un schéma propre et lisse X'/W , on a un isomorphisme canonique

$$H^*(X/W) \simeq H^*_{DR}(X/W)$$

(*) Les conjectures de Weil ([6], [13]) sont en filigrane dans cette assertion.

(déduit de 1.2.2 par passage à la limite). C'est un analogue du théorème d'invariance de Washnitzer et Monsky dans le cas affine [24].

2.4 Pour les variétés propres et lisses sur k, la cohomologie cristalline vérifie un formulaire (Künneth, dualité de Poincaré, morphisme de Gysin) analogue à celui dont on dispose en cohomologie ℓ-adique. La seule différence notable est qu'on ne sait pour l'instant définir la classe de cohomologie $c(Y/W) \in H^{2d}(X/W)$ d'un cycle Y de codimension d sur X que si Y est non singulier.

2.5 Supposons que k soit le corps fini $\mathbb{F}_q$, notons K le corps des fractions de W. Soit X une variété propre et lisse sur k. L'endomorphisme de Frobenius F de X ($x \longmapsto x^q$ sur $\mathcal{O}_X$) induit un automorphisme, noté encore F, de $H^*(X/W)_K \overset{\mathrm{dfn}}{=} H^*(X/W) \otimes_W K$. Berthelot montre que la fonction zêta de X/k est donnée par la formule

2.5.1 $$Z(X/k) = \Pi\, P_{2i-1}(t) / \Pi\, P_{2i}(t) ,$$

où $P_n(t) = \det(\mathrm{Id} - Ft, H^n(X/W)_K)$. <u>A priori</u>, on a $P_n(t) \in K[t]$, mais Katz et Messing [13] ont déduit des conjectures de Weil [6] que si X/k est projective $P_n(t)$ est à coefficients entiers et coïncide, pour tout nombre premier $\ell \neq p$, avec le polynôme caractéristique analogue en cohomologie ℓ-adique.

2.6 Le corps k étant à nouveau un corps parfait quelconque de car. $p > 0$, soit S une variété affine et lisse sur k, et soit S' un schéma formel lisse sur W relevant S et tel que $S' = \varinjlim S'_n$, où $S'_n = S' \otimes W_n$, $W_n = W/p^{n+1}W$.

Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et lisse. Pour $n \in \mathbb{N}$, f définit un morphisme de sites cristallins $f_n : X/W_n \to S'_n/W_n$. Pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, la limite des $R^i f_{n*} \mathcal{O}_{X/W_n}$ est un F-<u>cristal</u> cohérent sur S' au sens de Katz [12], qui exprime la variation des i-ièmes groupes de cohomologie cristalline des fibres de f. Pour la comparaison de ce point de vue avec ceux de Dwork et de Washnitzer-Monsky, le lecteur pourra consulter [23] et l'introduction de [2].

3. Polygones de Newton cristallins, d'après Mazur [16], [17], [18]

3.1 Soient k , W , K comme en 2.5, notons $\bar{K}$ une clôture algébrique de K , et v la valuation sur $\bar{K}$ telle que $v(q) = 1$. Rappelons qu'on appelle polygone de Newton (p-adique) d'un polynôme $f = \Sigma a_i t^i \in \bar{K}[t]$ l'enveloppe convexe dans $\mathbf{R}^2$ des points $(i , v(a_i))$. Si $f = \prod_1^N (1 - \alpha_i t)$, avec $\alpha_i \neq 0$ pour $1 \leq i \leq N$, les points extrémaux du polygone de Newton de f forment une ligne polygonale convexe $(A_o = (0,0) , A_1, \dots, A_r)$ dont les pentes des côtés sont les valuations des α_j ; si m_i est la pente de $A_{i-1}A_i$ et s_i le nombre de α_j tels que $v(\alpha_j) = m_i$, on a $A_i = (s_1 + \dots + s_i , m_1 s_1 + \dots + m_i s_i = v(a_{s_1 + \dots + s_i}))$ (et $s_1 + \dots + s_r = N$).

3.2 Soient n un entier, X une variété projective et lisse sur $k = \mathbf{F}_q$, b_n le rang de $H^n(X/W)$, F et $P_n(t)$ comme en 2.5. Le n-ième polygone de Newton cristallin de X est par définition le polygone de Newton $Cr_n(X/W)$ de $P_n(t)$. D'après un lemme d'algèbre p-linéaire de Dieudonné-Manin [15], les points extrémaux $(0 , A_1, \dots, A_{b_n})$ de $Cr_n(X/W)$ ont des coordonnées entières [1]. De plus, la dualité de Poincaré (2.4) et le théorème de Lefschetz "fort" en cohomologie cristalline [13] impliquent que $A_{b_n} = (b_n , nb_n/2)$.

Supposons que X soit la réduction sur k d'un schéma projectif et lisse X'/W tel que les W-modules $H^i(X' , \Omega^j_{X'/W})$ soient libres, de rangs notés h^{ji} . On a $b_n = \sum_{i+j=n} h^{ij}$, et $h^{ij} = h^{ji}$. On appelle n-ième polygone de Hodge de X' le polygone de Newton $Hdg_n(X'/W)$ du polynôme (de degré b_n) $\prod_{i=0}^n (1 - q^i t)^{h^{i,n-i}}$. Il a pour points extrémaux les $B_i = (h^{0,n} + \dots + h^{i,n-i} , 0.h^{0,n} + \dots + ih^{i,n-i})$, et $B_{b_n} = A_{b_n}$. Mazur [17] a démontré le beau résultat suivant, conjecturé par Katz [11] pour les intersections complètes (et prouvé par Dwork pour les hypersurfaces) :

---

[1] $Cr_n(X/W)$ est aussi le polygone de Newton associé par la théorie de [15] à $H^n(X/W)$ muni de l'endomorphisme semi-linéaire induit par l'élévation à la puissance p-ième sur X ; cela permet d'étendre la définition de $Cr_n(X/W)$ au cas où k est un corps parfait quelconque de car. $p > 0$ (voir [3], [16]).

THÉORÈME 3.3. $Cr_n(X/W)$ <u>est au-dessus de</u> $Hdg_n(X'/W)$.

En particulier, si c est le plus petit entier tel que $h^{c,n-c}$ soit non nul, toutes les "racines inverses" de $P_n(t)$ sont divisibles par q^c . Ce résultat de divisibilité - qui généralise le théorème classique de Chevalley-Warning [28] ainsi qu'il est montré dans [11] - avait été obtenu par Katz dans le cas des intersections complètes à l'aide de la théorie de Dwork. Pour des applications de 3.3, ainsi qu'un exposé de diverses variantes et conjectures, nous renvoyons le lecteur à [16], [18]. Signalons que le polygone de Newton cristallin croît par spécialisation (résultat non publié de Grothendieck), d'où l'on déduit, pour une famille propre et lisse paramétrée par une variété T/k , une stratification de T par des strates à polygone cristallin constant : voir [1], [14] pour une analyse de ces stratifications pour certaines familles modulaires.

4. Compléments

4.1 A la suite de Grothendieck [9], Mazur et Messing [19], [20], [21] ont étudié en détail le H^1 cristallin en relation avec la "théorie de Dieudonné" des groupes p-divisibles (= Barsotti-Tate) sur des bases générales S . Toutefois, en dehors du cas où S est le spectre d'un corps parfait, on ne sait pas faire le lien entre cette théorie et la théorie de Cartier des groupes formels [5], [25].

4.2 A l'aide de la cohomologie cristalline (et aussi de la cohomologie fppf), Milne [22] a démontré les analogues pour $\ell = p$ des théorèmes de Tate ([27], 5.1 et 5.2) sur le groupe de Brauer des surfaces projectives lisses sur des corps finis.

4.3 Bloch [4] sait définir, pour X propre et lisse sur un corps k parfait, un complexe de faisceaux zariskiens sur X , formé à l'aide de K_i à la Quillen, dont l'hypercohomologie est $H^*(X/W)$, et qui permet, si $\dim(X) < p$, une interprétation remarquable des "pentes" de $H^*(X/W)$, voir l'exposé de Berthelot [3].

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN - Supersingular K3 surfaces, Ann. Sc. ENS, t. 8, 1975, à paraître

[2] P. BERTHELOT - Cohomologie cristalline, Lecture Notes in Math. 407, Springer Verlag, Berlin, 1974.

[3] P. BERTHELOT - The slope filtration on crystalline cohomology, Proc. of the AMS Summer Institute 1974, à paraître.

[4] S. BLOCH - Article en préparation.

[5] P. CARTIER - Groupes formels associés aux anneaux de Witt généralisés, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 265 (1967), 50-52, et Modules associés à un groupe formel commutatif, courbes typiques, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 265 (1967) 129-132.

[6] P. DELIGNE - La conjecture de Weil I, Pub. Math. de l'I.H.E.S., n° 43, 1974.

[7] A. GROTHENDIECK - Lettre à J. Tate, mai 1966.

[8] A. GROTHENDIECK - Crystals and the De Rham cohomology of schemes, Notes by I. Coates and O. Jussila, in Dix exposés, Advanced Studies in pure Math., North Holland, 1968.

[9] A. GROTHENDIECK - Groupes de Barsotti-Tate et cristaux, Actes Congrès Intern. Math. 1970, I, 431-436.

[10] L. ILLUSIE - Report on crystalline cohomology, Proc. of the AMS Summer Institute 1974, à paraître.

[11] N. KATZ - On a theorem of Ax, Amer. J. Math., 93 (1971), 485-499.

[12] N. KATZ - Travaux de Dwork, Séminaire Bourbaki, exposé 409 (février 1972), Lecture Notes in Math. 383, Springer-Verlag, 1974.

[13] N. KATZ and W. MESSING - Some Consequences of the Riemann Hypothesis for Varieties over Finite Fields, Inv. Math., 23 (1974), 73-77.

[14] N. KOBLITZ - p-adic variation of the zeta-function over families of varieties defined over finite fields, Thesis, Princeton, 1974.

[15] I. MANIN - The theory of commutative formal groups over fields of finite characteristics, Russian Math. Surveys, 18 (1963).

[16] B. MAZUR - Frobenius and the Hodge filtration, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 78, n° 5, 1972.

[17] B. MAZUR - Frobenius and the Hodge filtration, estimates, Ann. of Maths., 98 (1973), 58-95.

[18] B. MAZUR - Eigenvalues of Frobenius acting on algebraic varieties over finite fields, Proc. of the AMS Summer Institute 1974, à paraître.

[19] B. MAZUR and W. MESSING - Universal Extensions and One Dimensional Crystalline Cohomology, Lecture Notes in Math. 370, Springer Verlag, 1974.

[20] W. MESSING - The Crystals associated to Barsotti-Tate Groups, Lecture Notes in Math. 264, Springer Verlag, 1972.

[21] W. MESSING - The Universal Extension of an Abelian Variety by a Vector Group, Ist. Nazion. di Alta Mat., Sumposia Math., Vol. XI, 1973.

[22] J. S. MILNE - preprint.

[23] P. MONSKY - p-adic analysis and Zeta functions, 1969

[24] P. MONSKY and G. WASHNITZER - Formal Cohomology I, Ann. of Maths., 88 (1968), 181-217.

[25] D. MUMFORD - Bi-extensions of formal groups, Algebraic Geometry, Bombay Colloquium 1968, p. 307-322, Oxford Univ. Press 1969.

[26] N. ROBY - Les algèbres à puissances divisées, Bull. Soc. Math. France, 89 (1965), 75-91.

[27] J. TATE - On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog, in Dix exposés, Advanced Studies in pure Math., North Holland, 1968.

[28] E. WARNING - Bemerkung zur Vorstehenden Arbeit von Herr Chevalley, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, vol. 11 (1936), 76-83.