JEAN-PIERRE SERRE

Valeurs propres des endomorphismes de Frobenius

Séminaire N. Bourbaki, 1973-1974, exp. nº 446, p. 190-204

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1973-1974__16__190_0>

Séminaire BOURBAKI 446-01
26e année, 1973/74, n° 446 Février 1974

VALEURS PROPRES DES ENDOMORPHISMES DE FROBENIUS

[d'après P. DELIGNE]

par Jean-Pierre SERRE

1. Rappels sur quelques résultats de Grothendieck [10]

Soient $\mathbb{F}_q$ un corps fini à q éléments, de caractéristique p, $\bar{\mathbb{F}}_q$ une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, X_o une variété algébrique sur $\mathbb{F}_q$, $X = X_o \otimes_{\mathbb{F}_q} \bar{\mathbb{F}}_q$, et F l'endomorphisme de Frobenius $x \mapsto x^q$ de X (ou X_o). On note $|X|$ (resp. $|X_o|$) l'ensemble des points fermés de X (resp. X_o) ; l'ensemble des orbites de F dans $|X|$ s'identifie à $|X_o|$.

Soit ℓ un nombre premier distinct de p. Grothendieck a défini des "groupes de cohomologie ℓ-adiques à support propre" $H^i_c(X, \mathbb{Q}_\ell)$, qui sont des $\mathbb{Q}_\ell$-espaces vectoriels de dimension finie. L'endomorphisme F opère par fonctorialité sur les $H^i_c(X, \mathbb{Q}_\ell)$, et l'on a la "formule de Lefschetz"

(1) $$\mathrm{Card}\ |X|^F = \sum_i (-1)^i \, \mathrm{Tr}(F ; H^i_c(X, \mathbb{Q}_\ell)) ,$$

où $|X|^F$ désigne l'ensemble des éléments de $|X|$ invariants par F (ou, ce qui revient au même, l'ensemble $X_o(\mathbb{F}_q)$ des $\mathbb{F}_q$-points de X_o). Une formule analogue vaut pour les itérés F^n de F : si l'on pose $N_n = \mathrm{Card}\ |X|^{F^n} = \mathrm{Card}\ X_o(\mathbb{F}_{q^n})$, on a

(2) $$N_n = \sum_i (-1)^i \, \mathrm{Tr}(F^n ; H^i_c(X, \mathbb{Q}_\ell)) = \sum_{i,j} (-1)^i \alpha^n_{ij} ,$$

où les α_{ij} sont les valeurs propres de F dans $H^i_c(X, \mathbb{Q}_\ell)$. Si l'on définit avec Weil la fonction zêta $Z(X_o ; t)$ de X_o par la formule

$$(3) \qquad Z(X_o\,;t) = \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty} N_n t^n/n\Big) = \prod_{x\in|X_o|} \frac{1}{1-t^{\deg(x)}} \quad ,$$

la formule (2) équivaut à

$$(4) \qquad Z(X_o\,;t) = \prod_i P_i(t)^{(-1)^{i+1}} \quad ,$$

où $P_i(t) = \prod_j (1-\alpha_{ij}t) = \det(1-tF\,;H^i_c(X,\mathbb{Q}_\ell))$.

Cette dernière formule montre en particulier que $Z(X_o\,;t)$ est une fonction rationnelle de t , résultat conjecturé par Weil [19], et démontré par Dwork [9].

Grothendieck énonce même un résultat plus général : si $\underline{E}_o$ désigne un $\mathbb{Q}_\ell$-faisceau "constructible" sur X_o , et $\underline{E}$ le faisceau sur X correspondant, on a une formule, analogue à (1) :

$$(5) \qquad \sum_{x\in|X|^F} \mathrm{Tr}(F_x\,;\underline{E}_x) = \sum_i (-1)^i\,\mathrm{Tr}(F\,;H^i_c(X,\underline{E})) \quad ,$$

où le terme $\mathrm{Tr}(F_x\,;\underline{E}_x)$ désigne la trace de l'endomorphisme F_x ("Frobenius local") opérant sur la fibre $\underline{E}_x$ de $\underline{E}_o$ en x . Comme ci-dessus, cette formule peut se traduire en termes de fonctions zêta (ou plutôt de fonctions L , à la Artin) : on pose

$$(6) \qquad Z(X_o,\underline{E}_o\,;t) = \prod_{x\in|X_o|} 1/\det(1-t^{\deg(x)}F_x\,;\underline{E}_x) \quad ,$$

et l'on a

$$(7) \qquad Z(X_o,\underline{E}_o\,;t) = \prod_i \det(1-tF\,;H^i_c(X,\underline{E}))^{(-1)^{i+1}} \quad .$$

Ici encore, on obtient une fonction rationnelle de t ; ses zéros sont fournis par les H^i_c , i impair, et ses pôles par les H^i_c , i pair ; ce fait jouera un rôle essentiel dans la suite.

Remarques bibliographiques

[Ces remarques sont destinées au lecteur - plus consciencieux que le conférencier - qui désire remplacer les affirmations de [10] par des démonstrations.]

1) Les propriétés fondamentales de la topologie étale, et de la cohomologie

correspondante (éventuellement à support propre) sont exposées avec tous les détails nécessaires, ainsi que beaucoup d'autres, dans les 1583 pages de SGA 4, [2] ; l'essentiel est le troisième fascicule, qui contient les exposés de M. Artin et P. Deligne. On recommande également les notes originales d'Artin [1].

2) Aucune démonstration de la formule de Lefschetz (5) n'a encore été publiée. On attend depuis 1966 la version définitive de SGA 5, qui devrait être plus convaincante que les exposés polycopiés existants. Pour le moment, les seules références sont une brève esquisse de Verdier [15] et quelques indications de Deligne ([4], p. 581-590).

2. Le théorème de Deligne

On suppose à partir de maintenant que X_o est projective non singulière. Cela permet en particulier de remplacer les groupes de cohomologie à support propre $H^i_c(X, \mathbf{Q}_\ell)$ par les groupes de cohomologie "ordinaires" $H^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$.

THÉORÈME 1 ([7], th. 1.6).- (i) *Les polynômes*

(8) $$P_i(t) = \prod_j (1 - \alpha_{ij} t) = \det(1 - tF ; H^i(X, \mathbf{Q}_\ell))$$

sont à coefficients entiers, et ne dépendent pas de ℓ .

(ii) *Les "racines inverses"* α_{ij} *de* P_i , *considérées comme éléments de* $\mathbf{C}$, *vérifient* :

(9) $$|\alpha_{ij}| = q^{i/2} .$$

[Plus brièvement : les valeurs propres de Frobenius, opérant sur $H^i(X)$, sont de valeur absolue $q^{i/2}$.]

La démonstration de ce théorème est exposée dans [7] ; on en trouvera les grandes lignes aux n^{os} 3 et 4 ci-après. Elle utilise de façon essentielle les résultats de Grothendieck [10] rappelés au n° 1, ainsi que la théorie cohomologique des pinceaux de Lefschetz [13], transposée en topologie étale par Deligne et Katz [8].

Remarques.- 1) Le théorème 1 achève la démonstration (*) des classiques conjectures de Weil [19] ; on sait le rôle essentiel que ces conjectures ont joué dans le déve-

(*) modulo SGA 5 ...

loppement de la géométrie algébrique depuis vingt-cinq ans. Divers cas particuliers avaient été déjà traités par Weil, puis Deligne :

courbes algébriques et variétés abéliennes [17], [18] ; hypersurfaces monomiales [19] ; surfaces cubiques [20] ; intersections de deux quadriques [21] ; surfaces K3 [5] ; intersections complètes de niveau de Hodge un [6].

2) Dans l'énoncé ci-dessus, l'essentiel est l'assertion (ii), autrement dit le fait que, pour tout plongement ι de $\mathbb{Q}(\alpha_{ij})$ dans $\mathbf{C}$, on a $|\iota(\alpha_{ij})| = q^{i/2}$. L'assertion (i) s'en déduit facilement en remarquant que, d'après (4), le produit alterné des $P_i(t)$ est une série formelle à coefficients dans $\mathbf{Z}$.

3) On ignore si les endomorphismes de Frobenius, opérant sur les $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$, sont semi-simples. C'est vrai si $i \leq 1$. Le cas général résulterait des optimistes "conjectures standard" [12].

3. Démonstration du théorème 1 : le point crucial

Soient U_o une courbe affine lisse absolument irréductible sur $\mathbb{F}_q$, et $U = U_o \otimes_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$. On note $\pi_1(U_o)$ le groupe fondamental de U_o (relativement à un point-base fixé) ; il contient comme sous-groupe distingué le groupe fondamental géométrique $\pi_1(U)$; le quotient $\pi_1(U_o)/\pi_1(U)$ est isomorphe à $\hat{\mathbf{Z}}$.

Soit $\rho : \pi_1(U_o) \to \mathrm{Aut}(E)$ une représentation ℓ-adique de $\pi_1(U_o)$, i.e. un homomorphisme continu de ce groupe dans le groupe des automorphismes d'un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel E de dimension finie. Cette représentation définit un faisceau ℓ-adique $\underline{E}_o$ sur U_o, qui est localement constant de rang $n = \dim E$ (inversement, tout faisceau ℓ-adique localement constant sur U_o s'obtient de cette manière).

Si a est un entier, nous dirons que $\underline{E}_o$ est de poids a si, pour tout $x \in |U_o|$, les valeurs propres de F_x dans la fibre $\underline{E}_x$ de $\underline{E}_o$ en x sont des nombres algébriques de valeurs absolues toutes égales à $q_x^{a/2}$, où $q_x = q^{\deg(x)}$.

PROPOSITION 1.- Faisons les trois hypothèses suivantes :

(i) la puissance extérieure maximale $\det(\underline{E}_o) = \bigwedge^n \underline{E}_o$ de $\underline{E}_o$ est de poids na ;

(ii) pour tout $x \in |U_o|$, le polynôme $\det(1 - tF_x ; \underline{E}_x)$ est à coefficients dans $\mathbb{Q}$;

(iii) la restriction de ρ à $\pi_1(U)$ est absolument irréductible.

Alors $\underline{E}_o$ est de poids a .

Remarque

L'énoncé ci-dessus est celui obtenu initialement par Deligne (non publié). Dans [7], il remplace (i) et (iii) par l'hypothèse plus forte :

(iv) E est muni d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée

$$\Psi : E \times E \to \mathbb{Q}_\ell(-a) \qquad \text{("twist" de Tate)}$$

telle que $\rho(\pi_1(U))$ soit un sous-groupe ouvert du groupe symplectique $\mathbf{Sp}(\Psi)$.

Démonstration de la proposition 1

Soit k un entier ≥ 0 . On applique les résultats du n° 1 au faisceau $\otimes^k \underline{E}_o$, puissance tensorielle k-ième de $\underline{E}_o$. Si l'on pose

(10) $$Z_k(t) = Z(U_o, \otimes^k \underline{E}_o ; t) ,$$

on a

(11) $$Z_k(t) = \prod_{x \in |U_o|} Z_{k,x}(t) ,$$

avec

(12) $$Z_{k,x}(t) = 1/\det(1 - t^{\deg(x)}F_x ; \otimes^k \underline{E}_x) .$$

Vu (ii), les coefficients de ces séries sont des nombres rationnels. Lorsqu'en outre k est pair, on vérifie que les coefficients de $\log Z_{k,x}(t)$ sont positifs, et il en est de même de ceux de $Z_{k,x}(t)$, donc aussi de ceux de $Z_k(t)$. Ces propriétés de positivité entraînent que, pour tout $x \in |U_o|$, le rayon de convergence de la série $Z_{k,x}(t)$ est au moins égal à celui de $Z_k(t)$. Or :

Lemme 1.- La série $Z_k(t)$ est une fonction rationnelle de t ; ses pôles sont sur le cercle $|t| = q^{-(1+ka/2)}$.

Admettons provisoirement ce lemme. Vu ce qui précède, le rayon de convergence de $Z_{k,x}(t)$, $x \in |U_o|$, k pair, est $\geq 1/q^{1+ka/2}$. Vu (12), il s'ensuit que, si λ_k est une valeur propre de F_x dans $\otimes^k \underline{E}_x$, on a $|\lambda_k| \leq q_x^{1+ka/2}$. Mais, si α est une valeur propre de F_x dans $\underline{E}_x$, il est clair que α^k est une valeur propre de F_x dans $\otimes^k \underline{E}_x$. On en déduit

$$|\alpha^k| \leq q_x^{1+ka/2} , \qquad \text{i.e.} \quad |\alpha| \leq q_x^{a/2 + 1/k} ,$$

et en faisant tendre k vers $+\infty$ par valeurs paires, on obtient

$$(13) \qquad |\alpha| \leq q_x^{a/2} .$$

Le même argument, appliqué au dual de $\underline{E}_o$, donne :

$$(14) \qquad |\alpha^{-1}| \leq q_x^{-a/2} ,$$

d'où finalement

$$(15) \qquad |\alpha| = q_x^{a/2} ,$$

ce qui montre bien que $\underline{E}_o$ est de poids a .

Reste à démontrer le lemme 1. La rationalité de $Z_k(t)$ résulte de la formule (7). Cette formule se réduit ici à

$$(16) \qquad Z_k(t) = P_k^1(t)/P_k^2(t) ,$$

où :

$$(17) \qquad P_k^i(t) = \det(1 - tF ; H_c^i(U, \otimes^k \underline{E})) .$$

[Les H_c^i sont nuls pour $i > 2$ puisque U est de dimension 1 , et aussi pour $i = 0$ puisque U est irréductible et non complète.] Tout revient donc à estimer les valeurs propres de F opérant sur $H_c^2(U, \otimes^k \underline{E})$. Or la dualité de Poincaré permet de déterminer ce dernier groupe : si l'on note E_π^k le plus grand quotient de $E^k = \otimes^k E$ sur lequel le groupe $\pi = \pi_1(U)$ opère trivialement, on a un isomorphisme canonique

$$(18) \qquad H_c^2(U, \otimes^k \underline{E}) \simeq E_\pi^k \otimes \mathbb{Q}_\ell(-1) , \qquad \text{(cf. [2], XVIII, § 1).}$$

On est ainsi ramené à prouver que les valeurs propres de F sur E_π^k sont de valeur absolue $q^{ka/2}$. Vu (i), il suffit pour cela de voir que, si ψ est un caractère de $\pi_1(U_o)/\pi_1(U)$ intervenant dans E_π^k , et χ le caractère $\det(\rho)$ de $\pi_1(U_o)$, on a :

(19) <u>le caractère $\psi^n \chi^{-k}$ est d'ordre fini.</u>

Or cela résulte de l'hypothèse (iii) par un argument de théorie des représentations : si S (resp. G) désigne l'adhérence de Zariski de $\rho(\pi_1(U))$ (resp. de $\rho(\pi_1(U_o))$) dans GL_E , on montre que S est semi-simple, que son commutant dans GL_E est réduit au groupe $\mathbb{G}_m$ des homothéties, et que G contient $S.\mathbb{G}_m$ (resp. S) comme sous-groupe d'indice fini si $a \neq 0$ (resp. si $a = 0$). Ainsi, les représentations de G triviales sur S se font " à travers $\mathbb{G}_m$ " (à un groupe fini près) ; l'assertion (19) en résulte aussitôt. [Lorsque l'hypothèse (iv) est satisfaite, on peut remplacer l'argument esquissé ci-dessus par un calcul explicite, basé sur la théorie des invariants du groupe symplectique ; c'est ce qui est fait dans [7], n° 3.7.]

COROLLAIRE.- <u>Les valeurs absolues des valeurs propres de</u> F <u>sur</u> $H_c^1(U, \underline{E})$ <u>sont</u> $\leq q^{a/2+1}$.

En effet, puisque $\underline{E}_o$ est de poids a , le produit infini

$$Z(U_o, \underline{E}_o ; t) = Z_1(t) = \prod_{x \in |U_o|} Z_{1,x}(t)$$

converge absolument dans le disque $|t| < 1/q^{a/2+1}$, et y définit une fonction sans zéros ni pôles. Or, si F avait une valeur propre λ dans $H_c^1(U, \underline{E})$ de valeur absolue $> q^{a/2+1}$, λ^{-1} serait un zéro du polynôme $P_1^1(t)$, et ne serait pas un zéro de $P_1^2(t)$, vu ce qui a été démontré ci-dessus. D'après (16), ce serait un zéro de $Z_1(t)$, d'où contradiction.

<u>Remarque</u>

L'idée d'utiliser les $\otimes^k E$ a été inspirée à Deligne par un travail de Rankin [14], que l'on peut interpréter comme l'étude de $\otimes^2 E$, où E désigne la "représentation de Ramanujan" de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, au sens de [3]. Rankin prouve que la série de Dirichlet attachée à $\otimes^2 E$ a les pôles " qu'il faut ", et en déduit une bonne majoration de $\tau(p)$. S'il avait pu obtenir un résultat analogue pour tous les $\otimes^k E$ (ce que l'on ne sait pas faire - c'est l'un des principaux problèmes de la théorie des formes modulaires !), il en aurait tiré la conjecture de Ramanujan et la répartition asymptotique des $\tau(p)/p^{11/2}$. Le point de départ de Deligne a été la remarque que la situation est plus favorable en égale caractéristique que sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Z})$, puisque la théorie de Grothendieck donne les pôles cherchés.

4. Démonstration du théorème 1 : pinceaux de Lefschetz et monodromie

Cette seconde partie de la démonstration utilise une technique maintenant standard ([8], [16]) ; je me borne à la résumer.

On passe par l'intermédiaire suivant :

PROPOSITION 2.- Soit Y_o une variété projective non singulière absolument irréductible sur $\mathbf{F}_q$, de dimension paire d. Les valeurs propres de F, opérant sur $H^d(Y, \mathbf{Q}_\ell)$, sont de valeur absolue $\leq q^{d/2+1/2}$.

Montrons que la proposition 2 entraîne le théorème 1. Soit X_o une variété projective non singulière sur $\mathbf{F}_q$, et soit λ une valeur propre de F sur $H^i(X, \mathbf{Q}_\ell)$. Quitte à étendre les scalaires, et à décomposer X_o, on peut supposer X_o absolument irréductible. Soit $m = \dim X$. Supposons d'abord que $i = m$. Pour tout entier pair $n \geq 0$, λ^n est une valeur propre de F, opérant sur $H^{nm}(X^n, \mathbf{Q}_\ell)$: cela résulte de la formule de Künneth. Appliquant la prop. 2 à $Y = X^n$, on en déduit que

$$|\lambda^n| \leq q^{nm/2+1/2} \qquad \text{pour tout } n \text{ pair } \geq 0 ,$$

d'où $|\lambda| \leq q^{m/2}$. Mais la dualité de Poincaré montre que q^m/λ est aussi une valeur propre de F sur $H^m(X, \mathbf{Q}_\ell)$. Cela donne l'inégalité $|q^m/\lambda| \leq q^{m/2}$ d'où en définitive $|\lambda| = q^{m/2}$. Supposons maintenant que $i < m$, et raisonnons par récurrence sur $m - i$; si Z est une section hyperplane générale de X, le théorème de Lefschetz "facile" (SGA 5, VII, 7.1) dit que l'application de restriction $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell) \to H^i(Z, \mathbb{Q}_\ell)$ est injective ; il en résulte que λ est une valeur propre de F dans $H^i(Z, \mathbb{Q}_\ell)$, et l'on conclut en appliquant l'hypothèse de récurrence à λ et à Z . Le cas $i > m$ se ramène au cas $i < m$ par dualité de Poincaré.

Démonstration de la proposition 2

On raisonne par récurrence sur l'entier pair d , le cas $d = 0$ étant trivial. Supposons donc $d \geq 2$. Quitte à agrandir le corps de base (ce qui est loisible), on peut munir Y_o d'un pinceau de Lefschetz (cf. [8], XVII-XVIII ainsi que [16]). On obtient ainsi une variété $\widetilde{Y}_o$ qui se déduit de Y_o par éclatement le long d'une sous-variété Z_o de dimension $d-2$ de Y_o (section de Y_o par une sous-variété linéaire de codimension 2 générale). Comme la cohomologie de Y se plonge dans celle de $\widetilde{Y}$, il suffit de prouver la prop. 2 pour $\widetilde{Y}_o$. Or $\widetilde{Y}_o$ est munie d'une projection f sur une droite projective $\bar{U}_o$; il existe un ouvert affine non vide U_o de $\bar{U}_o$ au-dessus duquel f est lisse ; on notera j l'injection de U_o dans $\bar{U}_o$. Si u est un point de $\bar{U}$, sa fibre $H_u = f^{-1}(u)$ est une section hyperplane de Y ; elle est non singulière si u appartient à U .

Si s est un entier ≥ 0 , notons $\underline{R}_o^s$ le $\bar{U}_o$-faisceau $R^s f_* \mathbb{Q}_\ell$ et $\underline{R}^s$ le faisceau correspondant sur $\bar{U}$. Compte tenu de la suite spectrale de Leray

$$E_2^{r,s} = H^r(\bar{U}, \underline{R}^s) \Rightarrow H^*(\widetilde{Y}, \mathbb{Q}_\ell) ,$$

on voit que l'on est ramené à estimer les valeurs propres de F opérant sur $H^0(\bar{U}, \underline{R}^d)$, $H^1(\bar{U}, \underline{R}^{d-1})$ et $H^2(\bar{U}, \underline{R}^{d-2})$.

a) Action de F sur $H^2(\bar{U}, \underline{R}^{d-2})$

Le faisceau $\underline{R}^{d-2}$ est constant, et sa fibre s'identifie à un sous-espace vectoriel de $H^{d-2}(Z, \mathbb{Q}_\ell)$, cf. [8], XVII. On a, par dualité de Poincaré,

$$H^2(\bar{U}, \underline{R}^{d-2}) \subset H^{d-2}(Z, \mathbb{Q}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell(-1) ,$$

et l'on applique l'hypothèse de récurrence à la variété Z_o , qui est de dimension paire $d-2$.

b) Action de F sur $H^o(\bar{U}, \underline{R}^d)$

L'argument est analogue à celui de a), à cela près qu'il faut distinguer deux cas, suivant que les cycles évanescents sont nuls ou non (cf. [7], 7.1 (B), où le second "non nuls" doit être remplacé par "nuls").

c) Action de F sur $H^1(\bar{U}, \underline{R}^{d-1})$

La restriction de $\underline{R}_o^{d-1}$ à U_o est un faisceau localement constant $\underline{V}_o$ dont la fibre en un point $u \in U$ s'identifie à l'espace vectoriel $V = H^{d-1}(H_u, \mathbb{Q}_\ell)$, muni de l'action naturelle du groupe fondamental $\pi_1(U_o)$. On a $\underline{R}_o^{d-1} = j_* \underline{V}_o$ ([8], XVII). De plus, la dualité de Poincaré munit V d'une forme bilinéaire alternée non dégénérée à valeurs dans $\mathbb{Q}_\ell(1 - d)$. Soit E le sous-espace vectoriel de V engendré par les "cycles évanescents" ([8], loc. cit.), et soit $E^\perp$ son orthogonal. Supposons d'abord que $E \cap E^\perp = 0$, i.e. que la restriction Ψ à E de la forme bilinéaire ci-dessus soit non dégénérée. Comme E est stable par l'action de $\pi_1(U_o)$, il définit un sous-faisceau $\underline{E}_o$ de $\underline{V}_o$, et $\underline{R}_o^{d-1}$ est somme directe d'un faisceau localement constant $\underline{A}_o$ et du faisceau $j_* \underline{E}_o$. On a $H^1(\bar{U}, \underline{A}) = 0$ et l'homomorphisme $H_c^1(U, \underline{E}) \to H^1(\bar{U}, j_* \underline{E})$ est surjectif. On est ainsi ramené à montrer que les valeurs absolues des valeurs propres de F opérant sur $H_c^1(U, \underline{E})$ sont $\leq q^{(d+1)/2}$. On applique pour cela le corollaire à la prop. 1, avec $a = d - 1$. Il y a essentiellement deux choses à vérifier :

c_1) la rationalité des coefficients des $\det(1 - tF_x ; \underline{E}_x)$ pour $x \in |U_o|$; c'est fait dans [7], § 6, par une méthode très voisine de celle exposée par Verdier dans [16] ;

c_2) le fait que l'image de $\pi_1(U)$ dans GL_E est un sous-groupe ouvert du groupe $Sp(\Psi)$; cela résulte de la formule de Picard-Lefschetz et d'un lemme sur les représentations des algèbres de Lie, cf. [7], 5.10 et [16].

Cela achève la démonstration de la prop. 2 (et du théorème 1) lorsque $E \cap E^\perp = 0$. Le cas général se traite de manière tout à fait semblable : on filtre $\underline{R}_o^{d-1}$ par $j_*\underline{E}_o$ et $j_*(\underline{E}_o \cap \underline{E}_o^{\perp})$ et l'on applique le cor. 1 de la prop. 1 à $E/(E \cap E^{\perp})$, cf. [7], 7.1 (C). [Signalons d'ailleurs que Deligne a récemment démontré que $E \cap E^{\perp}$ est toujours réduit à 0 ; autrement dit, le théorème de Lefschetz "difficile" est vrai en toute caractéristique.]

5. Compléments

5.1. Une généralisation du théorème 1

Deligne a démontré le résultat suivant (Séminaire IHES, nov. 1973-févr. 1974) :

THÉORÈME 2.- Soient X_o une variété sur $\mathbf{F}_q$ et $\underline{E}_o$ un $\mathbf{Q}_\ell$-faisceau localement constant sur X_o . On suppose $\underline{E}_o$ de poids a (au sens du n° 3). Alors, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, et toute valeur propre α de F sur $H_c^i(X, \underline{E})$, il existe un entier $j \leq i + a$ tel que tous les conjugués complexes de α soient de valeur absolue $q^{j/2}$.

En utilisant la dualité de Poincaré, on en tire :

COROLLAIRE.- Si X_o est propre et non singulière, les valeurs propres de F sur $H^i(X, \underline{E})$ sont de valeur absolue $q^{(i+a)/2}$.

Lorsque $\underline{E}$ est le faisceau constant $\mathbf{Q}_\ell$, on retrouve le théorème 1 (avec "projective" remplacé par "propre").

5.2. Composantes de Künneth de la classe diagonale

Soit X une variété projective non singulière sur un corps algébriquement clos. Grothendieck a posé la question suivante : si l'on décompose la classe de cohomologie de la diagonale de $X \times X$ suivant la décomposition de Künneth

$$H^*(X \times X, \mathbf{Q}_\ell) = \bigoplus H^i(X, \mathbf{Q}_\ell) \otimes H^j(X, \mathbf{Q}_\ell) ,$$

est-ce que chacune des composantes Δ_{ij} ainsi obtenues est algébrique (i.e. associée à un cycle algébrique, à coefficients dans $\mathbf{Q}$, et indépendant de ℓ) ?

On ignore la réponse à cette question. Toutefois, Katz et Messing [11] ont remarqué que c'est oui lorsque X provient par extension des scalaires d'une variété sur un corps fini (c'est une simple conséquence du th. 1 : on exprime les Δ_{ij} comme des polynômes en la correspondance de Frobenius). Dans le cas général, on peut donc dire que les Δ_{ij} sont "presque algébriques" : elles deviennent algébriques lorsqu'on spécialise les coefficients des équations de X dans des corps finis. De là on tire facilement ([11], [12]) que, si $f : X \to X$ est un endomorphisme de X, le polynôme caractéristique de f, agissant sur $H^i(X, \mathbb{Q}_\ell)$, est à coefficients entiers et est indépendant de ℓ.

6. Applications arithmétiques

6.1. Nombre de points d'une intersection complète

Soit X_o une intersection complète non singulière sur $\mathbb{F}_q$, de dimension n. Soit B le n-ième nombre de Betti de X, diminué d'une unité si n est pair. [Cet entier se calcule par les mêmes formules que sur $\mathbb{C}$; il ne dépend que de n et du multidegré de X.] On a :

$$|\mathrm{Card}(X_o(\mathbb{F}_q)) - (1 + q + \ldots + q^n)| \leq B.q^{n/2} .$$

Cela résulte (facilement) du théorème 1, cf. [7], 8.1.

6.2. Majoration d'une somme d'exponentielles

Soient $Q \in \mathbb{F}_q[X_1,\ldots,X_n]$ de degré d, et Q_d la composante homogène de degré d de Q. On suppose que $(d,p) = 1$, et que l'hypersurface de $\mathbb{P}_{n-1}$ définie par Q_d est non singulière. Soit ψ un homomorphisme non trivial du groupe additif de $\mathbb{F}_q$ dans le groupe $\mathbb{C}^*$ (par exemple $x \longmapsto e^{2\pi i\,\mathrm{Tr}(x)/p}$). On a :

$$\Big|\sum_{x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{F}_q} \psi(Q(x_1,\ldots,x_n))\Big| \leq (d-1)^n q^{n/2} .$$

Cela résulte (difficilement) du théorème 1, cf. [7], 8.4 à 8.13.

[Ce résultat devrait pouvoir être utilisé en théorie additive des nombres.]

6.3. <u>Conjecture de Ramanujan-Petersson</u>

Soit $f = \Sigma\, a_n e^{2\pi i n z}$ une forme modulaire parabolique de poids entier $k \geq 1$ sur un sous-groupe de congruence de $SL_2(\mathbb{Z})$. <u>On a</u> :

$$a_n = \underline{O}(n^{(k-1)/2+\varepsilon}) \qquad \underline{\text{pour tout}}\ \ \varepsilon > 0\ ,\ \text{cf. [7], 8.2.}$$

En effet, Deligne a montré dans [3] (*) que cet énoncé se déduit des conjectures de Weil (du moins pour $k \geq 2$ - il faut une démonstration spéciale pour $k = 1$).

En particulier, le coefficient $\tau(p)$ de x^p dans la série $\Delta = x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24}$ vérifie l'inégalité

$$|\tau(p)| \leq 2\, p^{11/2}\ .$$

(*) J'espère que Deligne publiera un jour un exposé plus détaillé et plus complet que [3] ; le sujet le mérite.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. ARTIN - Grothendieck Topologies, notes polycopiées, 133 p., Harvard, 1962.

[2] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER - Théorie des Topos et Cohomologie Etale des Schémas (SGA 4), 1583 p., 2810 g, Lecture Notes in Math. 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972-1973.

[3] P. DELIGNE - Formes modulaires et représentations ℓ-adiques, Sém. Bourbaki n° 355, 34 p., Lecture Notes in Math. 179, Springer-Verlag, 1971.

[4] P. DELIGNE - Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, Modular Functions of One Variable II, p. 501-597, Lecture Notes in Math. 349, Springer-Verlag, 1973.

[5] P. DELIGNE - La conjecture de Weil pour les surfaces K3, Invent. Math., 15 (1972), p. 206-226.

[6] P. DELIGNE - Les intersections complètes de niveau de Hodge un, Invent. Math., 15 (1972), p. 237-250.

[7] P. DELIGNE - La conjecture de Weil I. Publ. Math. IHES, n° 43, P.U.F, 1974.

[8] P. DELIGNE et N. KATZ - Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique (SGA 7_{II}), 438 p., Lecture Notes in Math. 340, Springer-Verlag, 1973.

[9] B. DWORK - On the rationality of the zeta function of an algebraic variety, Amer. J. of Math., 82 (1960), p. 631-648.

[10] A. GROTHENDIECK - Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L, Sém. Bourbaki n° 279, 15 p., W. A. Benjamin, N.Y., 1966.

[11] N. KATZ et W. MESSING - Some consequences of the Weil conjectures, Invent. Math., 23 (1974), p. 73-77 .

[12] S. KLEIMAN - Algebraic cycles and the Weil conjectures, Dix exposés sur la cohomologie des schémas, p. 359-386, North-Holland Publ. Cy., Amsterdam-Paris, 1968.

[13] S. LEFSCHETZ - L'analysis situs et la géométrie algébrique, Gauthier-Villars, Paris, 1924.

[14] R. RANKIN - Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions, Proc. Cambridge Phil. Soc., 35 (1939), p. 351-372.

[15] J.-L. VERDIER - The Lefschetz Fixed Point Formula in Etale Cohomology, Proc. Conf. on Local Fields, p. 199-214, Springer-Verlag, 1967.

[16] J.-L. VERDIER - Indépendance par rapport à ℓ des polynômes caractéristiques des endomorphismes de Frobenius de la cohomologie ℓ-adique (d'après P. DELIGNE), Sém. Bourbaki n° 423, 18 p., Lecture Notes in Math. 383, Springer-Verlag, 1974.

[17] A. WEIL - Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent, Act. Sci. Ind. 1041, Hermann, Paris, 1948.

[18] A. WEIL - Variétés abéliennes et courbes algébriques, Act. Sci. Ind. 1064, Hermann, Paris, 1948.

[19] A. WEIL - Number of solutions of equations in finite fields, Bull. Amer. Math. Soc., 55 (1949), p. 497-508.

[20] A. WEIL - Abstract versus classical algebraic geometry, Proc. Int. Congress Math. 1954, vol. III, p. 550-558, North-Holland Publ. Cy., Amsterdam, 1956.

[21] A. WEIL - Footnote to a recent paper, Amer. J. of Math., 76 (1954), p. 347-350.