CLAUDE GODBILLON

Cohomologies d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. nº 421, p. 69-87
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__69_0>

Séminaire BOURBAKI 421-01
25e année, 1972/73, n° 421 Novembre 1972

COHOMOLOGIES D'ALGÈBRES DE LIE DE CHAMPS DE VECTEURS FORMELS

par Claude GODBILLON

1. Introduction

Soit k un corps commutatif de caractéristique 0, et soient E l'espace vectoriel k^n, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n,k)$ l'algèbre de Lie des endomorphismes de E et $k[[E]] = \prod_{p \geq 0} S^p(E^*)$ l'algèbre des séries formelles sur E. Chaque vecteur u de E opère sur $k[[E]]$ par la dérivation $D(u)$ égale sur E^* au produit intérieur par u.

On désigne par $\mathfrak{a}(n)$, ou plus souvent simplement par $\mathfrak{a}$, le produit tensoriel $k[[E]] \otimes E$: $\mathfrak{a}$ s'identifie au produit $\prod_{p \geq -1} \mathfrak{g}^{(p)}$, où $\mathfrak{g}^{(p)} = S^{p+1}(E^*) \otimes E$ (on notera X^p la composante dans $\mathfrak{g}^{(p)}$ d'un élément X de $\mathfrak{a}$). En particulier $\mathfrak{g}^{(-1)}$ est isomorphe à E et $\mathfrak{g}^{(0)}$ à $\mathfrak{g}$; H sera alors l'élément de $\mathfrak{g}^{(0)}$ correspondant à l'automorphisme identique de E.

On munit $\mathfrak{a}$ de la structure d'algèbre de Lie obtenue en posant $[f \otimes u , g \otimes v] = (f.D(u)(g)) \otimes v - (g.D(v)(f)) \otimes u$: $\mathfrak{a}$ est l'<u>algèbre de Lie des champs de vecteurs formels à</u> n <u>variables sur</u> k. On a $[X,Y]^p = \sum_{r+s=p} [X^r,Y^s]$; et $\mathfrak{g}^{(0)}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{a}$ isomorphe à $\mathfrak{g}$. De plus, les sous-algèbres $\mathfrak{a}^p = \mathfrak{a}$ pour $p \leq -1$ et $\mathfrak{a}^p = \prod_{r \geq p} \mathfrak{g}^{(r)}$ pour $p \geq -1$ définissent une filtration décroissante de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ (on a $[\mathfrak{a}^r,\mathfrak{a}^s] \subset \mathfrak{a}^{r+s}$).

Si $e_1,\ldots,e_n$ est une base de E, et si $\xi_1,\ldots,\xi_n$ est la base duale de E^*, tout élément de $\mathfrak{a}$ s'écrit $\sum_{i=1}^{n} p_i(\xi_1,\ldots,\xi_n)e_i$ où $p_i(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ est une série formelle en $\xi_1,\ldots,\xi_n$. On a alors

$[\Sigma\, p_i e_i , \Sigma\, q_j e_j] = \Sigma(p_j \frac{\partial q_i}{\partial \xi_j} - q_j \frac{\partial p_i}{\partial \xi_j})e_i$; et par exemple $H = \Sigma\, \xi_i e_i$ et $[H , \Sigma\, p_i e_i] = \Sigma\, \xi_j \frac{\partial p_i}{\partial \xi_j} e_i - \Sigma\, p_i e_i$. Le sous-espace $\mathfrak{g}^{(p)}$ de $\mathfrak{a}$ est donc l'ensemble des champs de vecteurs formels X tels que $[H,X] = pX$.

On munit le corps k de la topologie discrète et l'algèbre $\mathfrak{a}$ de la topologie associée à sa filtration : $\mathfrak{a}$ est alors une algèbre de Lie topologique sur k.

Si M est un $\mathfrak{a}$-module topologique (i.e. M est un espace vectoriel topologique sur k et l'application $\mathfrak{a} \times M \to M$ est continue), on désigne ici par $C^q(\mathfrak{a},M)$ l'espace M pour $q = 0$, l'espace des cochaînes continues de degré q sur $\mathfrak{a}$ à valeurs dans M pour $q > 0$ (*). L'algèbre $\mathfrak{a}$ opère sur $C^q(\mathfrak{a},M)$ (pour $X \in \mathfrak{a}$ et $\omega \in C^q(\mathfrak{a},M)$, $q > 0$, $X.\omega = \theta(X)\omega$ est la cochaîne $(X_1,\ldots,X_q) \mapsto X.\omega(X_1,\ldots,X_q) - \sum_i \omega(X_1,\ldots,[X,X_i],\ldots,X_q)$) ; et $C^q(\mathfrak{a},M)$ est un $\mathfrak{a}$-module topologique lorsqu'on le munit de la topologie faible.

Le complexe des cochaînes continues sur $\mathfrak{a}$ à valeurs dans M est alors la somme directe $C^*(\mathfrak{a},M) = \sum_{q \geq 0} C^q(\mathfrak{a},M)$ avec le cobord d défini par

$$dm(X) = X.m \qquad \text{pour } m \in C^0(\mathfrak{a},M) ,$$

(*) Naturellement les notions qui suivent sont en fait valables pour toute algèbre de Lie topologique sur un corps topologique commutatif.

$$d\omega(X_1,\dots,X_{q+1}) = \sum_i (-1)^{i+1} X_i.\omega(X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_{q+1})$$
$$+ \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{q+1}) \quad \text{pour } \omega \in C^q(\mathfrak{a},M) \ , \ q>0 \ .$$

La cohomologie $H^*(\mathfrak{a},M) = \sum_{q \geq 0} H^q(\mathfrak{a},M)$ de ce complexe est la <u>cohomologie continue de</u> $\mathfrak{a}$ <u>à valeurs dans</u> M .

Lorsque M est une $\mathfrak{a}$-algèbre topologique sur k le produit extérieur définit sur $C^*(\mathfrak{a},M)$ une structure d'algèbre différentielle graduée, anticommutative si M est commutative.

Dans [5] et [6] I. M. Gelfand et D. B. Fuks ont déterminé $H^*(\mathfrak{a},M)$ pour divers $\mathfrak{a}$-modules topologiques M . Ces cohomologies jouent un rôle essentiel dans la théorie des classes caractéristiques des feuilletages [9].

On fera usage dans cet exposé de la suite spectrale de Hochschild-Serre associée à une sous-algèbre $\mathfrak{b}$ de $\mathfrak{a}$ image d'un projecteur continu de $\mathfrak{a}$. Dans cette situation on filtre le complexe $C^*(\mathfrak{a},M)$ par les sous-espaces $A^p = \sum_q A^{p,q}$ où $A^{p,q}$ est nul pour $q<0$, est l'espace $C^{p+q}(\mathfrak{a},M)$ pour $p \leq 0$, et l'ensemble des cochaînes $\omega \in C^{p+q}(\mathfrak{a},M)$ telles que $\omega(X_1,\dots,X_{p+q}) = 0$ si $q+1$ des X_i sont dans $\mathfrak{b}$ pour $p>0$ et $q \geq 0$. Chaque $A^{p,q}$ est un $\mathfrak{b}$-module topologique ; et on vérifie comme dans [10] que le terme $E_1^{p,q}$ de la suite spectrale correspondant à cette filtration est isomorphe à $H^q(\mathfrak{b},A^{p,o})$ ($A^{p,o} = \{\omega \in C^p(\mathfrak{a},M) \mid i(X)\omega = 0 \ \forall X \in \mathfrak{b}\}$ est l'espace des cochaînes de degré p sur $\mathfrak{a}$ semi-basiques relativement à $\mathfrak{b}$).

On rappelle enfin que l'algèbre de Weil $W(\mathfrak{h})$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ sur k est le produit tensoriel $\Lambda(\mathfrak{h}^*) \otimes S(\mathfrak{h}^*)$ des algèbres extérieure et symétrique de $\mathfrak{h}^*$, gradué par les sous-espaces $W^p = \sum_{r+2s=p} \Lambda^r(\mathfrak{h}^*) \otimes S^s(\mathfrak{h}^*)$ et muni du cobord d déterminé par la relation $d\gamma = d_{\mathfrak{h}}\gamma + \Gamma$, $\gamma \in \Lambda^1(\mathfrak{h}^*)$, où $d_{\mathfrak{h}}$ est le cobord du complexe $\Lambda(\mathfrak{h}^*)$ des cochaînes sur $\mathfrak{h}$ à valeurs dans k , et Γ l'élément γ de $S^1(\mathfrak{h}^*)$ [2]. Les produits intérieurs par les éléments de $\mathfrak{h}$ sont étendus à $W(\mathfrak{h})$ par 0 sur $S(\mathfrak{h}^*)$.

2. La cohomologie de $\mathfrak{a}$ à valeurs dans k

Lorsque M est un $\mathfrak{a}$-module topologique dont la topologie est discrète l'espace $C^q(\mathfrak{a},M)$, $q > 0$, est l'ensemble des applications q-linéaires alternées ω de $\mathfrak{a}$ dans M pour lesquelles il existe un entier m tel que $\omega(X_1,\dots,X_q) = 0$ si l'un des X_i est de filtration supérieure à m . La topologie de $C^q(\mathfrak{a},M)$ est alors discrète.

En particulier, pour le $\mathfrak{a}$-module trivial k , on a
$C^1(\mathfrak{a},k) = \sum_{p\geq -1} \mathfrak{g}_{(p)}$, où $\mathfrak{g}_{(p)} = (\mathfrak{g}^{(p)})^* = S^{p+1}(E) \otimes E^*$; et
$C^q(\mathfrak{a},k) = \Lambda^q(C^1(\mathfrak{a},k))$ est la somme directe pour $p_{-1} + p_o + p_1 + \dots = q$ des sous-espaces $\Lambda^{p_{-1}}(\mathfrak{g}_{(-1)}) \otimes \Lambda^{p_o}(\mathfrak{g}_{(o)}) \otimes \Lambda^{p_1}(\mathfrak{g}_{(1)}) \otimes \dots$ (on remarquera que ces sous-espaces sont invariants par $\mathfrak{g}^{(o)}$).

La projection continue $\pi : X \longmapsto X^o$ de $\mathfrak{a}$ sur $\mathfrak{g}^{(o)}$ est, si on identifie $\mathfrak{g}^{(o)}$ à $\mathfrak{g}$, une forme de connexion sur $\mathfrak{a}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$: on a $\pi(X) = X$ et $\pi([X,Y]) = [X , \pi(Y)]$ quels que soient $X \in \mathfrak{g}^{(o)}$ et $Y \in \mathfrak{a}$.
La forme de courbure $\Pi = d\pi + \frac{1}{2}[\pi,\pi]$ de cette connexion est alors
$(X,Y) \longmapsto [Y^1,X^{-1}] - [X^1,Y^{-1}]$.

Cette forme de connexion détermine un morphisme φ du complexe $W = W(\mathfrak{g})$ dans $C^*(\mathfrak{a},k)$ [2] ; ce morphisme est caractérisé par les relations suivantes, où γ est un élément de $\Lambda^1(\mathfrak{g}^*)$ et Γ l'élément correspondant de $S^1(\mathfrak{g}^*)$:

$$\varphi(\gamma)(X) = \gamma(\pi(X)) , \qquad X \in \mathfrak{a} ;$$

$$\begin{aligned}\varphi(\Gamma)(X,Y) &= (d\varphi(\gamma) - \varphi(d\gamma))(X,Y) \\ &= \Gamma(\Pi(X,Y)) \qquad X , Y \in \mathfrak{a} .\end{aligned}$$

Il envoie donc $\Lambda^p(\mathfrak{g}^*)$ dans $\Lambda^p(\mathfrak{g}_{(o)})$ et $S^p(\mathfrak{g}^*)$ dans $\Lambda^p(\mathfrak{g}_{(-1)}) \otimes \Lambda^p(\mathfrak{g}_{(1)})$ et par conséquent s'annule sur l'idéal J de W engendré par $\sum_{r>n} S^r(\mathfrak{g}^*)$. Cet idéal est un sous-complexe de W , et on désignera par W_n le complexe quotient W/J : en tant qu'algèbre graduée W_n est isomorphe au produit tensoriel $\Lambda(\mathfrak{g}^*) \otimes (S(\mathfrak{g}^*)/(\sum_{r>n} S^r(\mathfrak{g}^*))$. Le morphisme φ induit un morphisme ψ de W_n dans $C^*(\mathfrak{a},k)$.

Le premier résultat de Gelfand et Fuks est alors :

THÉORÈME 1.- <u>Le morphisme</u> $\psi : W_n \to C^*(\mathfrak{a},k)$ <u>induit un isomorphisme de</u> $H(W_n)$ <u>sur</u> $H^*(\mathfrak{a},k)$.

On en déduit :

COROLLAIRE 1.- <u>Les espaces</u> $H^q(\mathfrak{a},k)$ <u>sont de dimensions finies et nuls pour</u> $q > n^2 + 2n$.

Désignant par <u>jet d'ordre</u> r , $r \geq 0$, d'un champ de vecteurs formel $X \in \mathfrak{a}$ la somme $\sum_{s<r} X^s$, on a :

COROLLAIRE 2.- <u>Toute classe de cohomologie de</u> $H^*(\mathfrak{a},k)$ <u>contient un cocycle dont les valeurs ne dépendent que des jets d'ordre</u> 2 <u>des champs de vecteurs formels.</u>

En effet l'image de ψ est en degré q contenue dans

$$\sum_{r+2s=q} \Lambda^s(\mathfrak{g}_{(-1)}) \otimes \Lambda^r(\mathfrak{g}_{(o)}) \otimes \Lambda^s(\mathfrak{g}_{(1)}) .$$

<u>Remarque</u> 1.- On peut démontrer directement le corollaire 1 de la façon suivante :

Une cochaîne $\omega \in C^*(\mathfrak{a},k)$ est dite de <u>poids</u> r si elle vérifie $\theta(H)\omega = -r\omega$. En particulier une cochaîne dans $\Lambda^{p_{-1}}(\mathfrak{g}_{(-1)}) \otimes \Lambda^{p_o}(\mathfrak{g}_{(o)}) \otimes \Lambda^{p_1}(\mathfrak{g}_{(1)}) \otimes \dots$, $p_{-1} + p_o + p_1 + \dots = q$, est de poids $-p_{-1} + p_1 + 2p_2 + \dots$.

L'ensemble C_r des cochaînes de poids r est un sous-complexe de $C^*(\mathfrak{a},k)$ stable par le produit intérieur $i(H)$; et $C^*(\mathfrak{a},k)$ est la somme directe des C_r . De plus, pour $r \neq 0$, le complexe C_r est acyclique : si ω est un cocycle de C_r , on a $-r\omega = \theta(H)\omega = di(H)\omega$. Et par conséquent l'inclusion de C_o dans $C^*(\mathfrak{a},k)$ induit un isomorphisme en cohomologie.

Enfin le complexe C_o est de dimension finie en chaque degré et nul en degré supérieur à $n^2 + 2n$.

Par exemple lorsque $n = 1$, les composantes non nulles de C_o sont k , $\mathfrak{g}_{(o)}$, $\mathfrak{g}_{(-1)} \otimes \mathfrak{g}_{(1)}$ et $\mathfrak{g}_{(-1)} \otimes \mathfrak{g}_{(o)} \otimes \mathfrak{g}_{(1)}$ respectivement en degrés 0 , 1 , 2 et 3 . On peut alors trouver un générateur α_i de $\mathfrak{g}_{(i)}$, $i = -1 , 0 , 1$, de façon que $d\alpha_o = \alpha_{-1} \otimes \alpha_1$. On en déduit que $H^q(\mathfrak{a}(1),k) = 0$ pour $q \neq 0 , 3$ et $H^3(\mathfrak{a}(1),k) = k$, avec pour générateur la classe du cocycle $\alpha_o \otimes d\alpha_o$.

<u>Démonstration du théorème 1</u>

On filtre le complexe $C^*(\mathfrak{a},k)$ par les sous-complexes A_p correspondant à la sous-algèbre $\mathfrak{g}^{(o)}$. Le terme $E_1^{p,q}$ de la suite spectrale associée à cette filtration est alors isomorphe à $H^q(\mathfrak{g},A^{p,o})$, où $A^{p,o}$ est la somme directe pour

$p_{-1} + p_1 + \ldots = p$ des sous-espaces $\Lambda^{p_{-1}}(\mathfrak{g}_{(-1)}) \otimes \Lambda^{p_1}(\mathfrak{g}_{(1)}) \otimes \ldots$. Ces sous-espaces sont invariants par $\mathfrak{g}^{(o)}$ et semi-simples pour $\theta(H)$. Par conséquent, $E_1^{p,q}$ est encore isomorphe à $H^q(\mathfrak{g}, B^p)$ où B^p est l'ensemble des éléments de $A^{p,o}$ invariants par $\mathfrak{g}^{(o)}$ ($B^p = \{\omega \in C^p(\mathfrak{a},k) \mid i(X)\omega = \theta(X)\omega = 0 \ \forall\ X \in \mathfrak{g}^{(o)}\}$ est l'espace des <u>cochaînes de degré</u> p <u>sur</u> $\mathfrak{a}$ <u>basiques relativement à</u> $\mathfrak{g}^{(o)}$).

On filtre d'autre part le complexe W_n par les sous-complexes

$U_p = \sum_{q \geq 0} U^{p,q}$, $p \geq 0$, où

$$U^{p,q} = \{w \in W_n^{p+q} \mid i(X_1) \ldots i(X_{q+1})w = 0 \ \forall\ X_1, \ldots, X_{q+1} \in \mathfrak{g}\}$$

($U^{p,q}$ est l'image dans W_n de la somme directe pour $r + 2s = p + q$ et $r \leq q$ des sous-espaces $\Lambda^r(\mathfrak{g}^*) \otimes S^s(\mathfrak{g}^*)$). Le terme $E_1^{p,q}$ de la suite spectrale correspondant à cette filtration est nul pour p impair ou $p > 2n$, et isomorphe à $H^q(\mathfrak{g}, S^r)$ pour $p = 2r \leq 2n$; soit encore comme précédemment à $H^q(\mathfrak{g}, I_S^r(\mathfrak{g}))$, où $I_S^r(\mathfrak{g})$ est l'espace des invariants symétriques de degré r sur $\mathfrak{g}$ (éléments basiques de W_n pour la filtration (U_p)).

Enfin le morphisme $\psi : W_n \to C^*(\mathfrak{a},k)$ induit un morphisme des premiers termes de ces suites spectrales compatible avec les isomorphismes précédents.

Le théorème 1 sera donc une conséquence directe de la proposition ci-dessous. C.Q.F.D.

PROPOSITION 1.- <u>Le morphisme</u> $\psi : W_n \to C^*(\mathfrak{a},k)$ <u>induit un isomorphisme de la sous-algèbre</u> P_n <u>des basiques de</u> W_n <u>sur la sous-algèbre</u> B <u>des basiques de</u> $C^*(\mathfrak{a},k)$ <u>relativement à</u> $\mathfrak{g}^{(o)}$.

La démonstration de cette proposition, dont la version exposée ici est due à J. Vey, fera l'objet du paragraphe suivant.

3. Détermination des basiques de $C^*(\mathfrak{a},k)$

Lemme 1.- *Toute forme linéaire sur* $\Lambda^q(\mathfrak{g}^{(-1)}) \otimes \mathfrak{g}^{(\ell_1)} \otimes \ldots \otimes \mathfrak{g}^{(\ell_r)}$, $1 \leq \ell_1 \leq \ldots \leq \ell_r$, *invariante par* $\mathfrak{g}^{(o)}$ *est nulle lorsque* $r < q$.

Démonstration. Soit ω une telle forme invariante. Il suffit de vérifier que ω est nulle sur les éléments de la forme

$(u_1 \wedge \ldots \wedge u_q) \otimes (\xi_1^{\ell_1+1} \otimes v_1) \otimes \ldots \otimes (\xi_r^{\ell_r+1} \otimes v_r)$, où $u_1,\ldots,u_q$, $v_1,\ldots,v_r$ sont des éléments de $\mathfrak{g}^{(-1)} = E$ et $\xi_1,\ldots,\xi_r$ des éléments de $\mathfrak{g}_{(-1)} = E^*$.

On peut supposer que $\xi_1,\ldots,\xi_r$ sont choisis dans une base $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ de E^*. Désignant par $e_1,\ldots,e_n$ la base duale de E, on est ramené à vérifier que ω est nulle sur tout élément Z de la forme

$(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q}) \otimes (\xi_1^{\ell_1+1} \otimes e_{j_1}) \otimes \ldots \otimes (\xi_r^{\ell_r+1} \otimes e_{j_r})$, $i_1 < \ldots < i_q$.

Lorsqu'on a $q > r$ une des formes $\zeta_{i_1},\ldots,\zeta_{i_q}$, soit ζ_{i_k}, n'apparaît pas dans la suite des ζ_i correspondant à $\xi_1,\ldots,\xi_r$. Dans ces conditions, si X est le champ de vecteurs formel $\zeta_{i_k} e_{i_k}$, on a $[X,e_i] = 0$ pour $i \neq i_k$, $[X,e_{i_k}] = -e_{i_k}$ et $\theta(X)\xi_i = 0$ pour $i = 1,\ldots,r$; et donc $\theta(X)Z = -cZ$ où c est un entier positif non nul.

Mais alors, $c\omega(Z) = -\omega(\theta(X)Z) = \theta(X)\omega(Z) = 0$.

C.Q.F.D.

Lemme 2.- *On a* $B^p = 0$ *pour* p *impair et* $B^p \subset \Lambda^r(\mathfrak{g}_{(-1)}) \otimes \Lambda^r(\mathfrak{g}_{(1)})$ *pour* $p = 2r$.

Démonstration. Puisque $A^{p,o}$ est la somme directe pour $p_{-1} + p_1 + \ldots = p$ des sous-espaces $\Lambda^{p_{-1}}(\mathfrak{g}_{(-1)}) \otimes \Lambda^{p_1}(\mathfrak{g}_{(1)}) \otimes \ldots$, on déduit du lemme 1 que B^p est contenu dans la somme de ces sous-espaces pour lesquels $p_{-1} \leq p_1 + p_2 + \ldots$.

D'autre part, une cochaîne basique étant invariante par $\theta(H)$, B^p est également contenu dans la somme de ces sous-espaces pour lesquels on a de plus $p_{-1} = p_1 + 2p_2 + \ldots$. Ce qui correspond à $p_i = 0$ pour $i > 1$ et $p_{-1} = p_1$.

C.Q.F.D.

Lemme 3.- Soit c un invariant symétrique de degré r sur $\mathfrak{g}$, et soient $u_1,\ldots,u_r$, $v_1,\ldots,v_r$ des éléments de $\mathfrak{g}^{(-1)}$ et $\xi_1,\ldots,\xi_r$ des éléments de $\mathfrak{g}_{(-1)}$. On a

$$\varphi(c)((u_1\wedge\ldots\wedge u_r)\otimes(\xi_1^2\otimes v_1)\otimes\ldots\otimes(\xi_r^2\otimes v_r)) =$$
$$(-1)^r\, 2^{r+1} \det(\xi_j(u_i))\; c(\xi_1\otimes v_1\;,\ldots,\;\xi_r\otimes v_r)\;.$$

Démonstration. On a en effet $\Pi(u_i,u_j) = \Pi(\xi_i^2\otimes v_i\,,\,\xi_j^2\otimes v_j) = 0$ et $\Pi(u_i\,,\,\xi_j^2\otimes v_j) = [\xi_j^2\otimes v_j\,,\,u_i] = -2\xi_j(u_i)\xi_j\otimes v_j$. Et par conséquent

$$\varphi(c)((u_1\wedge\ldots\wedge u_r)\otimes(\xi_1^2\otimes v_1)\otimes\ldots\otimes(\xi_r^2\otimes v_r))$$
$$= \frac{2}{r!}\sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_r}\varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)c(\Pi(u_{\sigma 1}\,,\,\xi_{\tau 1}^2\otimes v_{\tau 1}),\ldots,\Pi(u_{\sigma r}\,,\,\xi_{\tau r}^2\otimes v_{\tau r}))$$
$$= (-1)^r\, 2^{r+1}\det(\xi_j(u_i))\; c(\xi_1\otimes v_1,\ldots,\xi_r\otimes v_r)\;.$$

C.Q.F.D.

Lemme 4.- Soit β une cochaîne invariante de degré $2r$, et soit $Z = (u_1\wedge\ldots\wedge u_r)\otimes(\xi_1^2\otimes v_1)\otimes\ldots\otimes(\xi_r^2\otimes v_r)$, $u_1,\ldots,u_r$, $v_1,\ldots,v_r\in\mathfrak{g}^{(-1)}$ et $\xi_1,\ldots,\xi_r\in\mathfrak{g}_{(-1)}$. On a $\beta(Z) = 0$ si $\det(\xi_j(u_i)) = 0$.

Démonstration. On peut tout d'abord supposer que $u_1,\ldots,u_r$ sont les premiers éléments d'une base $u_1,\ldots,u_n$ de $\mathfrak{g}^{(-1)}$, dont on désignera par $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ la base duale, et que $v_1,\ldots,v_r$ sont choisis dans cette base. Si $\det(\xi_j(u_i)) = 0$ on peut de plus supposer que $\xi_j(u_1) = 0$ pour $j = 1,\ldots,r$.

Soit alors X le champ de vecteurs formel $\zeta_1 u_1$. On a $[X,u_1] = -u_1$, $[X,u_i] = 0$ pour $i > 1$ et $\theta(X)\xi_j = 0$ pour $j = 1,\dots,r$.

On conclut alors comme dans la démonstration du lemme 2.

C.Q.F.D.

Démonstration de la proposition 1. On déduit tout d'abord du lemme 3 que ψ est injective, et du lemme 2 qu'elle est bijective en degrés impairs et en degrés supérieurs à $2n$.

Soit alors $\beta \in B^{2r}$, $r \leq n$. Le lemme 4 montre que l'on peut écrire
$$\beta((u_1 \wedge \dots \wedge u_r) \otimes (\xi_1^2 \otimes v_1) \otimes \dots \otimes (\xi_r^2 \otimes v_r)) = \det(\xi_j(u_i)) f(\xi_1,\dots,\xi_r, v_1,\dots,v_r)$$
où f est linéaire en les ξ_i et v_j et symétrique en les $\xi_i \otimes v_i$.

C.Q.F.D.

Remarque 2.- Dans le cas où k est le corps des nombres réels, Gelfand et Fuks ont donné l'interprétation géométrique suivante de $H^*(a(n), \mathbb{R})$ [5] :

Soit $\eta : E \to BU(n, \mathbb{C})$ un fibré principal universel de groupe $U(n, \mathbb{C})$, et soient K le squelette de dimension $2n$ du classifiant $BU(n, \mathbb{C})$ et X_n l'espace total du fibré induit par η sur K : la cohomologie réelle de X_n est isomorphe à celle de $H^*(a(n),k)$.

En effet, $U(n, \mathbb{C})$ et $Gl(n, \mathbb{R})$ ont des algèbres de Weil isomorphes, et une connexion sur le fibré $\eta|_K$ détermine un morphisme de W_n dans le complexe singulier de X_n induisant un isomorphisme du deuxième terme de la suite spectrale de W_n sur le deuxième terme de la suite spectrale de Leray-Serre du fibré $\eta|_K$.

4. Description de $H^*(\mathfrak{a}(n), k)$

On rappelle tout d'abord les résultats suivants concernant le terme E_1 de la suite spectrale associée à la filtration de W_n [3] :

(i) il existe des éléments $u_q \in E_1^{o,2q-1} = H^{2q-1}(\mathfrak{g},k)$, $q = 1,\dots,n$, tels que $E_1^o = \sum_p E_1^{o,p}$ soit isomorphe à l'algèbre extérieure $E[u_1,\dots,u_n]$ du sous-espace engendré par $u_1,\dots,u_n$;

(ii) chaque u_q possède un représentant w_q dans $U^{o,2q-1}$ tel que $c_q = dw_q$ appartienne à $U^{2q,o}$, et par conséquent soit un élément basique de W_n ;

(iii) l'algèbre P_n des éléments basiques de W_n est isomorphe à l'algèbre $P_n[c_1,\dots,c_n]$ des polynômes en $c_1,\dots,c_n$, où c_q est de degré $2q$, à coefficients dans k tronqués en degrés supérieurs à $2n$.

Soit alors V_n l'algèbre graduée $E[u_1,\dots,u_n] \otimes P_n[c_1,\dots,c_n]$ munie du cobord d déterminé par $du_q = c_q$ et filtrée par les idéaux T_p engendrés par les polynômes de degrés au moins p en les c_q . La correspondance $u_q \mapsto w_q$ et $c_q \mapsto dw_q$ détermine un morphisme de complexes $\chi : V_n \to W_n$ compatible avec les filtrations et induisant un isomorphisme des premiers termes des suites spectrales correspondantes, et par conséquent également des anneaux de cohomologie. Ce qui ramène la description de $H^*(\mathfrak{a}(n),k)$ à celle de $H(V_n)$.

Dans un travail non publié, J. Vey a plus généralement déterminé pour toute partie I de $\{1,\dots,n\}$ la cohomologie de la sous-algèbre $V_{n,I}$ de V_n engendrée par $c_1,\dots,c_n$ et les u_q avec $q \in I$.

Soit $\mathcal{J}_n$ l'ensemble des suites croissantes finies (éventuellement vides) d'entiers positifs dont la somme est inférieure à n . Pour une telle suite

$j = (j_1, j_2, \dots)$, on posera $|j| = j_1 + j_2 + \dots$ et on désignera par j_o le plus petit élément de j dans I s'il y en a un et $+\infty$ sinon. De même pour toute partie i de I , on désignera par i_o le plus petit élément de i si i est non vide et $+\infty$ sinon.

A toute partie $i = (i_1, i_2, \dots)$, $i_1 < i_2 < \dots$, de I et à toute suite $j = (j_1, j_2, \dots)$ de $\mathcal{S}_n$ on associe l'élément $v_{ij} = (u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge \dots) \otimes (c_{j_1} c_{j_2} \dots)$ de $V_{n,I}$; v_{ij} est un cocycle de $V_{n,I}$ si et seulement si on a $i_o + |j| > n$.

THÉORÈME 2 (J. Vey).- <u>Les classes de cohomologie des cocycles</u> v_{ij} , $i \subset I$, $j \in \mathcal{S}_n$ <u>et</u> $i_o + |j| > n$, <u>vérifiant</u> $i_o \leq j_o$ <u>forment une base de</u> $H(V_{n,I})$.

<u>Démonstration</u>. La suite spectrale associée à la filtration de $V_{n,I}$ induite par celle de V_n a ses différentielles d_o et d_{2r+1} , $r \geq 0$, nulles.

On va alors montrer par récurrence sur r que l'on obtient une base de E_{2r} en prenant les classes des éléments v_{ij} vérifiant l'une des deux conditions suivantes :

A_r : $i_o < r$, $i_o + |j| > n$ et $i_o \leq j_o$;

B_r : $i_o \geq r$ et $j_o \geq r$.

Pour $r = 1$, E_2 est isomorphe au gradué associé à $V_{n,I}$, et la condition B_1 est satisfaite par tous les v_{ij} .

On subdivise le type B_r en quatre sous-types :

B_r^1 : $i_o = r$, $i_o + |j| \leq n$ et $j_o \geq r$;

B_r^2 : $i_o = r$, $i_o + |j| > n$ et $j_o \geq r$;

B_r^3 : $i_o > r$ et $j_o = r$; B_r^4 : $i_o > r$ et $j_o > r$.

La différentielle d_{2r} annule les classes des éléments v_{ij} de type A_r, B_r^2, B_r^3 ou B_r^4. D'autre part, si r n'est pas dans I les types B_r^1, B_r^2 et B_r^3 sont vides, et par conséquent d_{2r} est nulle. Mais dans ce cas, on a $A_r = A_{r+1}$ et $B_r = B_{r+1}$.

Si r est dans I, soit $v_{ij} = (u_r \wedge u_{i_2} \wedge \ldots) \otimes (c_{j_1} \ldots)$ un élément de type B_r^1. La différentielle d_{2r} envoie la classe de v_{ij} sur celle de l'élément $(u_{i_2} \wedge \ldots) \otimes (c_{j_1} \ldots c_{j_\alpha}, c_r, c_{j_{\alpha+1}}, \ldots)$, où j_α est le dernier terme de la suite j inférieur à r. La suite $j' = (j_1, \ldots, j_\alpha, r, j_{\alpha+1}, \ldots)$ est alors dans $\mathcal{J}_n$ et vérifie $j'_0 = r$. Ce qui montre que d_{2r} transforme bijectivement les classes de type B_r^1 en celles de type B_r^3.

Une base du noyau (resp. de l'image) de d_{2r} est donc constituée par les classes de types A_r, B_r^2, B_r^3 et B_r^4 (resp. B_r^3) ; et on obtient une base de $E_{2r+1} = E_{2r+2}$ en prenant les classes de types A_r et B_r^2, ce qui coïncide avec A_{r+1}, et de type $B_r^4 = B_{r+1}$.

Le résultat voulu est ainsi démontré, et le théorème 2 s'en déduit immédiatement.

C.Q.F.D.

COROLLAIRE 3.- <u>La dimension de</u> $H^q(\mathfrak{a}(n),k)$, $q > 0$, <u>est égale au nombre d'écritures de l'entier</u> q <u>de la forme</u> $2(i_1 + \ldots + i_r + j_1 + \ldots + j_s) - r$ <u>où</u> $i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_s$ <u>sont des entiers vérifiant les relations suivantes</u> :

(i) $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$;

(ii) $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_s \leq n$;

(iii) $j_1 + \ldots + j_s \leq n$;

(iv) $i_1 + j_1 + \ldots + j_s > n$;

(v) $i_1 \leq j_1$.

Par exemple, $H^q(\mathfrak{a}(2),k)$ est nul pour $q \neq 0$, 5 , 7 et 8 et respectivement de dimension 2 , 1 et 2 pour $q = 5$, 7 et 8 .

COROLLAIRE 4.- _L'espace_ $H^q(\mathfrak{a}(n),k)$ _est nul pour_ $1 \leq q \leq 2n$.

COROLLAIRE 5.- _La structure multiplicative de_ $H^*(\mathfrak{a}(n),k)$ _est triviale_.

5. _La cohomologie de_ $\mathfrak{a}$ _à valeurs dans les formes différentielles_ [6]

Soit U (resp. V) l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{a}$ (resp. de la sous-algèbre $\mathfrak{a}_o$ de $\mathfrak{a}$). Puisque $\mathfrak{g}^{(-1)}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathfrak{a}$ supplémentaire de $\mathfrak{a}_o$, U est isomorphe (en tant qu'espace vectoriel) au produit tensoriel de V et de l'algèbre symétrique de E . Par conséquent si M est un $\mathfrak{a}_o$-module, l'extension contravariante $\widetilde{M} = \mathrm{Hom}_V(U,M)$ de M est isomorphe à $k[[E]] \otimes M$.

En particulier, si M est le $\mathfrak{a}_o$-module déduit du $\mathfrak{g}$-module $\Lambda(E^*)$ par la projection de $\mathfrak{a}_o$ sur $\mathfrak{g}$, $\widetilde{M}$ est le $\mathfrak{a}$-module des formes différentielles formelles sur E ; et $H^*(\mathfrak{a},\widetilde{M})$ est isomorphe à $H^*(\mathfrak{a}_o,M)$ [4].

Avant de déterminer cette dernière algèbre de cohomologie, on remarquera que le complexe $C^*(\mathfrak{a}_o,M)$ est une algèbre différentielle bigraduée par les sous-espaces $C^p(\mathfrak{a}_o,\Lambda^r(E^*))$, et que l'on a $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq+rs} \beta \wedge \alpha$ pour $\alpha \in C^p(\mathfrak{a}_o,\Lambda^r(E^*))$ et $\beta \in C^q(\mathfrak{a}_o,\Lambda^s(E^*))$.

PROPOSITION 2.- _Il existe des éléments_ $u_q \in H^{2q-1}(\mathfrak{a}_o,k)$ _et_ $c_q \in H^q(\mathfrak{a}_o,\Lambda^q(E^*))$, $q = 1,\dots,n$, _tels que l'algèbre de cohomologie_ $H^*(\mathfrak{a}_o,M)$ _soit isomorphe au produit tensoriel_ $E[u_1,\dots,u_n] \otimes P_n[c_1,\dots,c_n]$ _de l'algèbre extérieure_ $E[u_1,\dots,u_n]$ _en_ $u_1,\dots,u_n$ _et de l'algèbre_ $P_n[c_1,\dots,c_n]$ _des polynômes en_ $c_1,\dots,c_n$, _où_

c_q <u>est de degré</u> q , <u>tronquée en degrés supérieurs à</u> n .

<u>Démonstration</u>. La suite spectrale de Hochschild-Serre associée à la sous-algèbre $\mathfrak{g}^{(o)}$ de $\mathfrak{a}_o$ a son terme $E_1^{p,q}$ isomorphe à $H^q(\mathfrak{g},k) \otimes D^p$ où D^p est l'espace des cochaînes de $C^p(\mathfrak{a}_o,M)$ basiques relativement à $\mathfrak{g}^{(o)}$.

L'intersection $D^p \cap C^p(\mathfrak{a}_o, \Lambda^r(E^*))$ est isomorphe au sous-espace des éléments invariants par $\mathfrak{g}$ de la somme directe des $\Lambda^r(E^*) \otimes \Lambda^{p_1}(\mathfrak{g}_{(1)}) \otimes \Lambda^{p_2}(\mathfrak{g}_{(2)}) \otimes \dots$ pour $p_1 + p_2 + \dots = p$. On déduit donc de l'étude du paragraphe 3 que D^p est isomorphe à l'espace B^p des éléments invariants de $\Lambda^p(\mathfrak{g}_{(-1)}) \otimes \Lambda^p(\mathfrak{g}_{(1)})$; et plus précisément que l'algèbre D des basiques de $C^*(\mathfrak{a}_o,M)$ est isomorphe à l'algèbre B des basiques de $C^*(\mathfrak{a},k)$.

Ce qui montre que le terme E_1 est isomorphe au produit tensoriel (non gradué) de $H^*(\mathfrak{g},k)$ et de D , et que les différentielles d_s , $s \geq 1$, sont nulles.

C.Q.F.D.

6. <u>Cohomologies relatives</u> [9]

Lorsque $k = \mathbb{R}$, on identifie l'algèbre de Lie $\underline{\mathfrak{o}}(n)$ des matrices antisymétriques à une sous-algèbre de $\mathfrak{g}^{(o)}$, et on désigne par $C^*(\mathfrak{a},0)$ le sous-complexe des cochaînes de $C^*(\mathfrak{a},\mathbb{R})$ basiques relativement au groupe orthogonal $O(n)$: $C^*(\mathfrak{a},0)$ est l'ensemble des cochaînes ω invariantes par $O(n)$ et telles que $i(X)\omega = 0$ pour tout $X \in \underline{\mathfrak{o}}(n)$.

On introduit de même le sous-complexe $C^*(\mathfrak{a},SO)$ des cochaînes de $C^*(\mathfrak{a},\mathbb{R})$ basiques relativement au groupe spécial orthogonal $SO(n)$, ainsi que les sous-complexes WO_n et WSO_n des éléments de W_n basiques relativement à $O(n)$ et

$SO(n)$ respectivement. L'homomorphisme $\psi : W_n \to C^*(\mathfrak{a}, R)$ envoie WO_n dans $C^*(\mathfrak{a}, O)$ et WSO_n dans $C^*(\mathfrak{a}, SO)$.

On désigne par $H^*(\mathfrak{a}, O)$, $H^*(\mathfrak{a}, SO)$, $H^*(WO_n)$ et $H^*(WSO_n)$ les algèbres de cohomologie de ces complexes.

PROPOSITION 3.- <u>L'homomorphisme</u> ψ <u>induit un isomorphisme de</u> $H^*(WSO_n)$ <u>sur</u> $H^*(\mathfrak{a}, SO)$ <u>et de</u> $H^*(WO_n)$ <u>sur</u> $H^*(\mathfrak{a}, O)$.

<u>Démonstration</u>. La filtration (A_p) de $C^*(\mathfrak{a}, R)$ détermine une filtration de $C^*(\mathfrak{a}, SO)$, et le terme E_1^p de la suite spectrale correspondante est isomorphe à $H^*(\mathfrak{g}, \underline{\mathfrak{o}}) \otimes B^p$ où $H^*(\mathfrak{g}, \underline{\mathfrak{o}})$ est l'algèbre de cohomologie des cochaînes sur $\mathfrak{g}$ à valeurs réelles, basiques relativement à $\underline{\mathfrak{o}}(n)$.

De même, la filtration (U_p) de W_n détermine une filtration de WSO_n , et le terme E_1^p de la suite spectrale correspondant à cette filtration est nul pour p impair et isomorphe à $H^*(\mathfrak{g}, \underline{\mathfrak{o}}) \otimes I_S^r(\mathfrak{g})$ pour $p = 2r$. La proposition 1 permet alors de conclure.

La vérification est analogue pour $H^*(WO_n)$.

C.Q.F.D.

PROPOSITION 4.- <u>L'algèbre de cohomologie</u> $H^*(WO_n)$ <u>est isomorphe à l'algèbre de cohomologie du complexe</u> $V_{n,I}$ <u>où</u> I <u>est l'ensemble des entiers impairs de</u> $\{1, \ldots, n\}$.

<u>Démonstration</u>. Le terme E_1^p de la suite spectrale associée à la filtration de WO_n est nul pour p impair et isomorphe à $H^*(\mathfrak{g}, O) \otimes I_S^r(\mathfrak{g})$ pour $p = 2r$. On peut alors préciser la description donnée au début du paragraphe 4 de la façon suivante [1] :

(i) pour q impair les représentants $w_q \in U^{o,2q-1}$ des classes u_q peuvent être choisis dans WO_n ;

(ii) si l'on désigne encore par u_q , $q = 1, 3, 5, \ldots$, la classe de w_q dans $H^{2q-1}(\mathfrak{g}, O)$, $H^*(\mathfrak{g}, O)$ est isomorphe à l'algèbre extérieure $E[u_1, u_3, \ldots]$.

On vérifie alors comme précédemment que l'homomorphisme $\chi : V_{n,I} \to WO_n$ déterminé par $\chi(u_q) = w_q$, $q \in I$, et $\chi(c_q) = dw_q$, $q = 1, \ldots, n$, induit un isomorphisme de $H^*(V_{n,I})$ sur $H^*(WO_n)$.

C.Q.F.D.

On déduit alors du théorème 2 que, pour n pair, c_n est un cocycle de $V_{n,I}$ dont la classe de cohomologie n'est pas nulle. On désignera encore par c_n la classe de cohomologie correspondante dans $H^*(WO_n)$.

PROPOSITION 5.- <u>L'algèbre de cohomologie</u> $H^*(WSO_n)$ <u>est isomorphe à</u> $H^*(WO_n)$ <u>pour</u> n <u>impair et à</u> $H^*(WO_n)[\chi]/(\chi^2 - c_n)$ <u>pour</u> n <u>pair</u>.

<u>Démonstration</u>. Lorsque n est impair la description donnée dans la démonstration précédente pour WO_n est également valable pour WSO_n . Dans le cas $n = 2r$, il faut la modifier de la façon suivante [1] :

(i) pour $q = 1, 3, \ldots, 2r-1$, les représentants $w_q \in U^{o,2q-1}$ des classes u_q peuvent être choisis dans WSO_n (en fait dans WO_n) ;

(ii) il existe un élément $v \in U^{o,2r-1}$ et un choix de $w_n \in U^{o,2n-1}$ tel que $(dv)^2 = dw_n$;

(iii) si l'on désigne encore par u_q , $q = 1, 3, \ldots, 2r-1$, la classe de w_q dans $H^{2q-1}(\mathfrak{g}, \underline{o})$ et par $\chi \in H^{2r}(\mathfrak{g}, \underline{o})$ la classe de dv , $H^*(\mathfrak{g}, \underline{o})$ est isomorphe à l'algèbre extérieure $E[u_1, \ldots, u_{2r-1}, \chi]$.

On vérifie alors que la correspondance $u_q \mapsto w_q$, $c_q \mapsto dw_q$ et $\chi \mapsto dv$ détermine un homomorphisme du complexe $V_{n,I} \otimes R[\chi]/(\chi^2 - c_n)$, où $I = \{1,3,\ldots,2r-1\}$ et $d\chi = 0$, dans WSO_n induisant un isomorphisme en cohomologie.

C.Q.F.D.

7. Appendice

Des résultats plus ou moins complets ont également été obtenus concernant la cohomologie des algèbres de Lie infinies transitives et primitives [11], [12]. On sait qu'une telle algèbre s'identifie à une sous-algèbre d'une algèbre de Lie de champs de vecteurs formels ; et dans la situation où cette sous-algèbre contient l'élément H , on peut montrer, comme dans la remarque 1, que sa cohomologie est de dimension finie. Par contre, on ignore si la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels hamiltoniens est de dimension finie [8].

Signalons enfin que la cohomologie $H^*(\mathfrak{a},R)$ joue un rôle essentiel dans la détermination de la cohomologie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs différentiables sur une variété [7].