

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

HAROLD ROSENBERG

Un contre-exemple à la conjecture de Seifert

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. n° 434, p. 294-306

http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__294_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN CONTRE-EXEMPLE À LA CONJECTURE DE SEIFERT

[d'après P. SCHWEITZER]

par Harold ROSENBERG

En 1950, Georges Seifert a démontré que tout champ de vecteurs X qui est une C^0 -perturbation du champ Y sur S^3 défini par

$$Y(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3) ,$$

admet au moins une orbite périodique [8]. Ceci est vrai pour X continu avec des solutions uniques. Dans cet article, Seifert dit : " It is unknown if every continuous vector field of the three-dimensional sphere contains a closed integral curve " ; d'où l'origine de la conjecture de Seifert.

En 1972, Paul Schweitzer a trouvé un champ de vecteurs sur S^3 , de classe C^1 , sans orbites compactes [7]. Plus généralement, il a démontré :

THÉORÈME 1.- Soit V une variété fermée de dimension trois et soit Y un champ de vecteurs sur V sans zéros. Alors Y est homotope à un champ de vecteurs X , de classe C^1 , et X n'a pas d'orbites compactes. L'homotopie entre Y et X est dans l'espace des champs sur V sans zéros.

On construit X en deux étapes. D'abord, on rend Y homotope à un champ Y_0 ayant un nombre fini d'orbites compactes ; Y_0 aura la même classe de différentiabilité que Y . Ensuite, on casse chaque orbite périodique de Y en insérant un piège dans un flot-box contenant un segment de l'orbite périodique. Naturellement, pour un contre-exemple à la conjecture de Seifert, on n'a pas besoin de la première étape ; c'est facile de construire un champ sur S^3 sans zéro, ayant exactement une orbite compacte.

1. Construction du champ Y_0 ayant un nombre fini d'orbites compactes

Lemme 1.1.- Il existe un entier k et des plongements $f_i : S^1 \times [1,4] \rightarrow V$ pour $i = 1, \dots, k$, tels que :

(i) $f_i(S^1 \times [1,4]) \cap f_j(S^1 \times [1,4]) = \emptyset$ si $i \neq j$;

- (ii) Y est transverse à $\bigcup_i f_i(S^1 \times [1,4])$;
 (iii) chaque orbite de Y rencontre un $f_i(S^1 \times [2,3])$.

Démonstration. Nous construirons des disques D_1, \dots, D_n , de dimension deux, dans V , tels que $D_i \cap D_j = \emptyset$ si $i \neq j$, et tels que Y soit transverse à $\bigcup_i D_i$ et que chaque orbite de Y rencontre au moins un D_j . Puis, on construit des f_i de la façon suivante : il existe des nombres positifs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ tels que les $2n$ disques D_1, \dots, D_n , $\Phi_{\varepsilon_1}(D_1), \dots, \Phi_{\varepsilon_n}(D_n)$ sont disjoints deux par deux ; Φ_t est le groupe à un paramètre de difféomorphismes de V associé à Y . Soient A_i et B_i deux disques ouverts dans D_i tels que $\bar{A}_i \cap \bar{B}_i = \emptyset$ et $\bar{A}_i \cup \bar{B}_i \subset$ intérieur de D_i . Alors $D_1 - A_1, \dots, D_n - A_n$, $\Phi_{\varepsilon_1}(D_1 - B_1), \dots, \Phi_{\varepsilon_n}(D_n - B_n)$ sont $2n$ anneaux, disjoints deux par deux, transverses à Y , et chaque orbite de Y passe par l'un d'eux. On obtient des f_i en épaississant ces anneaux. Donc, il suffit de construire D_1, \dots, D_n .

Soient W_1, \dots, W_p des flot-boxes pour Y qui recouvrent V et tels que chaque W_i soit difféomorphe à $D^2 \times I$ avec Y correspondant au champ $\frac{d}{dt}$. On prend $D_1 =$ la partie de W_1 correspondant à $D^2 \times (0)$. Maintenant regardons W_2 ; identifions W_2 avec $D^2 \times I$ et soit $A = D_1 \cap W_2$. Pour ε petit, $H_\varepsilon = \{\Phi_t(A) \mid -\varepsilon < t < \varepsilon\} \cap W_2$ est un voisinage tubulaire trivial de A dans W_2 . Soit $W = W_2 - H(\varepsilon/2)$. Pour $x \in W$, il existe un voisinage de x de la forme $B_x \times [a_x, b_x] \subset W_2$, tel que $B_x \subset D^2$, $[a_x, b_x] \subset [0,1]$ et $[(B_x \times (a_x)) \cup (B_x \times (b_x))] \cap A = \emptyset$. Donc, on peut recouvrir W par un nombre fini de tels voisinages, $B_1 \times [a_1, b_1], \dots, B_m \times [a_m, b_m]$, où chaque B_i est difféomorphe à D^2 . Maintenant, pour ε_i assez petit, et choisi convenablement, on aura

$$B_1 \times [a_1 - \varepsilon_1, b_1], \dots, B_m \times [a_m - \varepsilon_m, b_m],$$

un recouvrement de W et les disques $B_1 \times (a_1 - \varepsilon_1), \dots, B_m \times (a_m - \varepsilon_m)$ disjoints deux par deux. On prend $D_2 = B_1 \times (a_1 - \varepsilon_1), \dots, D_{m+1} = B_m \times (a_m - \varepsilon_m)$, et on refait le même raisonnement dans W_3 avec A remplacé par

$$(D_1 \cup \dots \cup D_{m+1}) \cap W_3 .$$

Lemme 1.2.- Il existe un champ de vecteurs X sur $M = S^1 \times [1,4] \times I$ tel que

- (i) $X = \frac{d}{dt}$ dans un voisinage de ∂M , où t est la coordonnée de I ,
- (ii) X a quatre orbites périodiques dans M ,
- (iii) l'orbite de X d'un point $(x,s,0)$ arrive en $(x,s,1)$ si $1 \leq s < 2$ ou $3 < s \leq 4$,
- (iv) l'orbite positive d'un point $(x,s,0)$ tend vers une orbite périodique de X si $2 \leq s \leq 3$, et de même pour l'orbite négative du point $(x,s,1)$ si $2 \leq s \leq 3$,
- (v) X est homotope à $\frac{d}{dt}$ rel ∂M .

Démonstration. Soit Z un champ unitaire tangent à $S^1 \times [1,4] \times (1/2)$ tel que les orbites de Z par $(x) \times (s) \times (1/2)$ sont des cercles $S^1 \times (s) \times (1/2)$ si $1 \leq s \leq 2$ ou $3 \leq s \leq 4$, et dans $S^1 \times [2,3] \times (1/2)$, les orbites de Z spiralent de $S^1 \times (2) \times (1/2)$ à $S^1 \times (3) \times (1/2)$. C'est clair qu'on peut choisir un tel Z de classe C^∞ . Soit $\varphi : [1,4] \rightarrow [0,1]$ une fonction de classe C^∞ telle que $\varphi(t) = 0$ pour t dans un voisinage de 1 , $\varphi(t) < 1$ pour $1 < t < 2$, $\varphi(t) = 1$ pour $2 \leq t \leq 3$ et $\varphi(3+t) = \varphi(2-t)$ pour $0 \leq t \leq 1$. On définit X sur $S^1 \times [1,4] \times (1/2)$ par

$$X(x,s,\frac{1}{2}) = (1 - \varphi(s)) \frac{d}{dt} + \varphi(s) Z(x,s,\frac{1}{2}) .$$

Ensuite, soit $\lambda : I \rightarrow I$ une fonction C^∞ telle que $\lambda(t) = 0$ pour t dans un voisinage de $\partial[0,1]$, $\lambda(t) = 1$ si et seulement si $t = \frac{1}{2}$, et

$\lambda(t) = \lambda(1-t)$. On définit X sur $S^1 \times [1,4] \times I$ par

$$X(x,s,t) = (1 - \lambda(t)) \frac{d}{dt} + \lambda(t) X(x,s,\frac{1}{2}) .$$

Alors ce champ X a deux orbites périodiques et satisfait aux conditions (i), (iv) et (v), mais X ne satisfait pas (iii). Pour obtenir un champ qui satisfait (i),..., (v), nous prenons le "mirror image" du champ X sur $S^1 \times [1,4] \times [1,2]$ et puis X plus son "mirror image" définissent un champ sur $S^1 \times [1,4] \times [0,2]$

qui satisfait toutes les conditions.

THÉOREME 1.1 ([9]). Soient V une variété fermée de dimension trois et Y un champ sur V sans zéros. Alors Y est homotope à un champ Y_0 ayant un nombre fini d'orbites compactes. L'homotopie est dans l'espace des champs sans zéros.

Démonstration. Soient f_1, \dots, f_k des plongements de $S^1 \times [1,4]$ dans V donné par le lemme 1.1. Par les conditions (i) et (ii) de 1.1, on peut étendre f_1, \dots, f_k aux plongements g_1, \dots, g_k de $S^1 \times [1,4] \times I \rightarrow V$ tels que

- a) $g_i / S^1 \times [1,4] \times (0) = f_i$ pour $i = 1, \dots, k$,
- b) $g_i \left(\frac{d}{dt} \right) = Y$ pour tout i ,
- c) $g_i(S^1 \times [1,4] \times I) \cap g_j(S^1 \times [1,4] \times I) = \emptyset$ si $i \neq j$.

Soit Y_0 le champ sur V défini par

- 1) $Y_0 = Y$ sur $V - \bigcup_{i=1}^k g_i(S^1 \times [1,4] \times I)$,
- 2) $Y_0 = g_i(X)$ dans $g_i(S^1 \times [1,4] \times I)$, où X est le champ donné par le lemme 1.2.

Par la condition (i) de 1.2, Y_0 est de classe C^∞ si Y l'est, et par les conditions (ii), (iii) et (iv), les orbites périodiques de Y_0 sont les images par g_i des quatre orbites périodiques de X pour $i = 1, \dots, k$.

2. Construction d'un champ sur V sans orbites compactes

Pour construire ce champ, Schweitzer utilise un exemple de Denjoy que nous expliciterons dans le numéro 4.

THÉOREME 2.1 ([1]). Il existe un champ de vecteurs Z sur le tore T^2 , de classe C^1 , sans orbite compacte et ayant un ensemble minimal non trivial K .

Remarque. L'existence d'un tel champ de classe C^0 n'est pas difficile et c'était déjà connu de Poincaré. Par contre, Denjoy (et Van Kampen) a démontré

que de tels champs de classe C^2 n'existent pas, [1].

Maintenant, soit D un 2-disque dans $T^2 - K$ et posons $M = T^2 - \text{int}(D)$, $Z = Z/M$.

Lemme 2.2. - Il existe un champ X , de classe C^1 , sur $M \times [-2, +2]$ satisfaisant :

- (i) $X = \frac{d}{dt}$ sur $A \times [-2, +2]$, où $A = M - U$, U voisinage ouvert de K , $U \neq M$,
- (ii) si $x \in M - K$, l'orbite positive de X commençant en $(x, -2)$ arrive au point $(x, +2)$.
- (iii) si $x \in K$, l'orbite positive de X par $(x, -2)$ tend vers $K \times (-1)$ et l'orbite négative de X par $(x, +2)$ tend vers $K \times (1)$,
- (iv) X n'a pas d'orbites compactes, et
- (v) X est homotope à $\frac{d}{dt}$ rel $A \times [-2, 2]$.

Démonstration. Soit $\varphi : M \rightarrow [0, 1]$ une fonction de classe C^∞ telle que $K = \varphi^{-1}(1)$ et φ à support compact ; disons $\varphi = 0$ sur $A = M - U$, U voisinage ouvert de K , $U \neq M$.

Soit $\lambda : [-2, 0] \rightarrow I$ une fonction de classe C^∞ telle que $\lambda = 0$ dans un voisinage de $\partial[-2, 0]$ et $\lambda(t) = 1$ si et seulement si $t = -1$. On étend λ à $[-2, 2]$ par $\lambda(t) = -\lambda(-t)$. On définit X sur $M \times [-2, 2]$ par :

$$X(x, t) = (1 - \varphi(x)|\lambda(t)|) \frac{d}{dt} + \varphi(x)\lambda(t)Z(x).$$

Il est clair que X est de classe C^1 et satisfait à la condition (i) de 2.2. Par définition, X sur $M \times [0, 2]$ est le négatif de la réflexion de $X/(M \times [-2, 0])$ par $M \times (0)$; c.à.d. X sur $M \times [0, 2]$ est le "mirror image" de $X/M \times [-2, 0]$. Donc une orbite de X dans $M \times [0, 2]$ est la réflexion d'une orbite dans $M \times [-2, 0]$. Il en résulte que si une orbite de X commençant en un point $(x, -2)$ arrive au point $(y, 0)$, alors cette même orbite arrive au point $(x, 2)$. Or, pour $x \notin K$, la composante suivant $\frac{d}{dt}$ de $X(x, t)$ est strictement positive, d'où la condition (ii). Si $x \in K$, $X(x, t) = (1 - |\lambda(t)|) \frac{d}{dt} + \lambda(t)Z(x)$. Donc,

$K \times (-1)$ et $K \times (1)$ sont des ensembles minimaux pour X et la condition (iii) est satisfaite. Sur le complément de $K \times (-1)$ et $K \times (1)$, la composante de X suivant $\frac{d}{dt}$ est positive, donc X n'a pas d'orbite compacte. La condition (v) est claire.

3. L'exemple de P. Schweitzer

Soit Y_0 un champ de vecteurs sur V ayant un nombre fini d'orbites périodiques, C_1, \dots, C_n . Soit x_i un point de C_i et U_i un flot-box de Y_0 contenant x_i . Choisissons les U_i de sorte qu'ils soient difféomorphes à $D^2 \times I$ et que Y_0 corresponde au champ $\frac{d}{dt}$. Aussi $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Nous allons modifier Y_0 dans chaque U_i .

Soit $f : M \rightarrow \text{int}(D^2 \times I)$ un plongement transverse au champ $\frac{d}{dt}$, où $M = T^2 - \text{int}(D)$ est la variété définie dans le numéro 2. Pour obtenir un tel f , on peut immerger M dans $\text{int}(D^2 \times (1/2))$ de sorte que les self-intersections soient un petit carré, voir figure 1 :

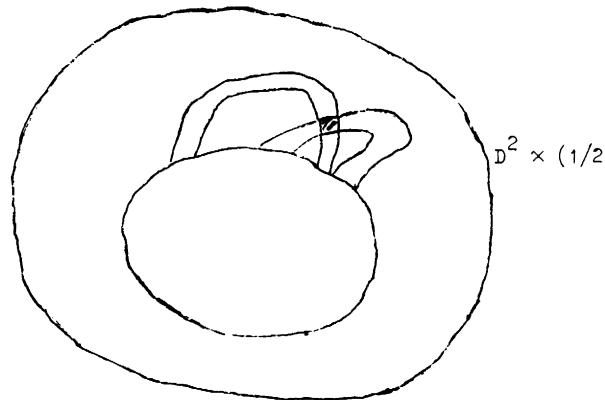


Figure 1

Puis on relève légèrement une des anses dans $D^2 \times I$ pour obtenir f .

Ensuite on étend f à un plongement $f : M \times [-2, +2] \rightarrow \text{int}(D^2 \times I)$ tel que

$f(x \times [-2, +2])$ soit contenu dans le segment vertical par $f(x)$ pour chaque $x \in M$. Soit X le champ sur $M \times [-2, +2]$ construit dans 2.2. Soit X_0 le champ dans $D^2 \times I$ qui est égal à $f_*(X)$ dans $f(M \times [-2, +2])$ et $X_0 = \frac{d}{dt}$ dans $D^2 \times I - f(M \times [-2, +2])$. Il est clair que X_0 est un champ de classe C^1 sur $D^2 \times I$.

Maintenant, dans V , nous modifions Y_0 dans chaque U_i en mettant l'image de X_0 dans U_i par le difféomorphisme qui identifie U_i avec $D^2 \times I$. Il faut prendre une précaution : le plongement de M dans U_i se fait de sorte que x_i appartienne à K , l'ensemble minimal de X . Alors le champ X ainsi obtenu est de classe C^1 est sans orbite compacte. Ceci démontre le théorème 1. Il nous reste à décrire l'exemple de Denjoy.

4. Un difféomorphisme de S^1

Associé à un difféomorphisme $f : V \rightarrow V$ de classe C^k , nous avons un champ de vecteurs $X(f)$, de classe C^k , sur la suspension de V par $f : V(f) =$ le quotient de $V \times \mathbb{R}$ par la relation $(x, t + 1) = (fx, t)$ pour $t \in \mathbb{R}$. Le champ $X(f)$ sur $V(f)$ est l'image du champ $\frac{d}{dt}$ sur $V \times \mathbb{R}$ par la projection canonique. Il y a une correspondance bijective entre les points périodiques de f et les orbites périodiques de $X(f)$. De même, pour les ensembles minimaux. Lorsque $V = S^1$ et f conserve l'orientation, $V(f) = T^2$. Donc pour construire un champ Z sur T^2 sans orbite compacte, de classe C^1 et non ergodique, il suffit de démontrer :

THÉOREME 4.1 (Denjoy [1], expliqué dans une lettre de J. Milnor).- Il existe un C^1 difféomorphisme $f : S^1 \rightarrow S^1$, sans point périodique et avec un ensemble minimal K non trivial.

Démonstration. L'idée est de construire d'abord la dérivée de f et puis f par intégration. Soient $\ell_n > 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$, tels que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \ell_n = 1$ et

$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 1$. Soit α un nombre irrationnel entre 0 et 1, et $\alpha_n = n\alpha \pmod{1}$. Les α_n sont distincts et denses dans $[0,1]$.

Soient $I_n = (b_n, c_n)$ où $b_n = \sum_{\{m/\alpha_m < \alpha_n\}} \ell_m$ et $c_n = \sum_{\{m/\alpha_m \leq \alpha_n\}} \ell_m = b_n + \ell_n$.

Les I_n sont ordonnés sur $[0,1]$ de la même façon que les α_n , c.à.d., $\alpha_n < \alpha_p$ alors $c_n < b_p$. Donc les I_n sont disjoints deux par deux et leur réunion est dense dans $[0,1]$.

Pour chaque entier n , soit $f' : I_n \rightarrow (0, \infty)$ une fonction continue telle que :

- (i) $f'(t) \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow b_n$ et $t \rightarrow c_n$,
- (ii) $f'(t) \rightarrow 1$ uniformément quand $n \rightarrow \pm\infty$,
- (iii) $\int_{I_n} f' = \ell_{n+1}$.

C'est pour la condition (ii) qu'on a choisi les ℓ_n tels que

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = 1.$$

On étend f' à une fonction continue $f' : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ par $f'(t) = 1$ pour $t \in \mathbb{I} - \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ et $f'(t+1) = f'(t)$. Soit $f(t) = b_1 + \int_0^t f'(s) ds$. Alors f

est de classe C^1 et f est un difféomorphisme. Il est clair que

$$f(t+1) = f(t) + 1, \text{ car}$$

$$f(t+1) = b_1 + \int_0^{t+1} f' = b_1 + \int_0^1 f' + \int_1^{1+t} f' = b_1 + 1 + \int_0^t f'.$$

Donc f induit un difféomorphisme $\bar{f} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, de classe C^1 . Pour démontrer que \bar{f} satisfait aux conditions désirées, nous avons besoin de deux lemmes.

Lemme 4.2. - Si $\alpha_n < 1 - \alpha$ alors $f(I_n) = I_{n+1}$. Si $\alpha_n \geq 1 - \alpha$ alors $f(I_n) = (b_{n+1} + 1, c_{n+1} + 1)$. Donc, en tous cas, $f(I_n) = I_{n+1} \pmod{1}$.

Démonstration. Nous avons

$$f(b_n) = b_1 + \int_0^{b_n} f' = b_1 + \sum_{\{m/\alpha_m < \alpha_n\}} \ell_{m+1} .$$

Cas 1 : $\alpha_n < 1 - \alpha$

$$\begin{aligned} f(b_n) &= b_1 + \sum_{\{m/\alpha_{m+1} < \alpha_{n+1}\}} \ell_{m+1} - \sum_{\{m/\alpha_{m+1} < \alpha_1\}} \ell_{m+1} \\ &= b_1 + b_{n+1} - b_1 = b_{n+1} . \end{aligned}$$

Car si $\alpha_m < \alpha_n$, $\alpha_{m+1} = \alpha_m + \alpha < \alpha_n + \alpha = \alpha_{n+1}$. Et si $\alpha_{m+1} < \alpha_{n+1}$ et $\alpha_m \geq \alpha_n$, alors $\alpha_{m+1} = \alpha_m + \alpha - 1 < \alpha$. Donc

$$\{m/\alpha_m < \alpha_n\} = \{m/\alpha_{m+1} < \alpha_{n+1}\} - \{m/\alpha_{m+1} < \alpha_1\} .$$

Cas 2 : $\alpha_n \geq 1 - \alpha$, donc $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha - 1$, alors

$$\{m/\alpha_m < \alpha_n\} = \{m/\alpha_{m+1} < \alpha_{n+1} \text{ où } \alpha_{m+1} \geq \alpha_1\} .$$

Donc

$$\begin{aligned} f(b_n) &= b_1 + \sum_{\{m/\alpha_{m+1} < \alpha_{n+1}\}} \ell_{m+1} + \sum_{\{m/\alpha_{m+1} \geq \alpha_1\}} \ell_{m+1} \\ &= b_1 + b_{n+1} + \sum_{m \in \mathbb{Z}} \ell_{m+1} - \sum_{\{m/\alpha_{m+1} < \alpha\}} \ell_{m+1} \\ &= b_1 + b_{n+1} + 1 - b_1 = b_{n+1} + 1 . \end{aligned}$$

Alors $f(c_n) = f(b_n) + \int_{b_n}^{c_n} f' = c_{n+1} + 1$.

Lemme 4.3.- $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{f^n(0)}{n} = \alpha$.

Démonstration. Notons par $[n\alpha]$, le plus grand entier dans $n\alpha$;

$\alpha_n = n\alpha - [n\alpha]$. On voit, par récurrence, que $f^n(0) = [n\alpha] + b_n$:

$$f^{n+1}(0) = [n\alpha] + b_{n+1} \text{ si } \alpha_n < 1 - \alpha ,$$

et $f^{n+1}(0) = [n\alpha] + b_{n+1} + 1 = [(n+1)\alpha] + b_{n+1}$ si $\alpha_n \geq 1 - \alpha$.

Donc $|f^n(0) - n\alpha| < 1$.

Maintenant, nous pouvons terminer la démonstration de 4.1. Par le lemme 4.3,

\bar{f} a un nombre de rotations égal à α , donc \bar{f} est sans point périodique. Par le lemme 4.2, \bar{f} laisse invariant l'ensemble fermé, de mesure zéro, égal à

$$\mathbb{R}/\mathbb{Z} - \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_n \pmod{1}.$$

Mais tout ensemble, fermé, invariant par \bar{f} et non vide, contient un ensemble minimal. Si K est un tel ensemble minimal, il est clair que $K \neq S^1$.

5. Le théorème de Seifert

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, G. Seifert a démontré que toute perturbation de la fibration de Hopf de S^3 admet au moins une orbite compacte. A la fin de son article, il affirme que ce théorème se généralise aux variétés de dimension trois fibrées en cercles au-dessus d'une variété de dimension deux de caractéristique d'Euler différente de zéro. F. Fuller a développé une théorie de l'indice des orbites compactes des champs de vecteurs qui permet de généraliser le théorème de Seifert aux variétés de dimension n .

6. La théorie de Fuller [2]

Soient X un champ de vecteurs sur variété V et C une orbite périodique de X de période T . Soit $\pi = \{(\varphi_t(x), mT \mid 0 \leq t \leq mT)\}$. Alors on dit que π est une orbite périodique de X de période mT et de multiplicité m . On dit que π est isolé s'il existe un voisinage U de π dans $V \times \mathbb{R}^+$ tel qu'il n'y a pas de solution de $\varphi_t(x) = x$ dans $U - \pi$. Notons par $i(\pi)$ l'indice de l'holonomie de C^m . Voici le théorème fondamental :

THÉORÈME 6.1.- Supposons que S soit un ensemble compact isolé d'orbites compactes de X dans $V \times \mathbb{R}^+$. On peut associer à (X, S) un nombre rationnel $i(X, S)$ satisfaisant :

- 1) Si $S = \pi$ est une orbite compacte isolée, alors $i(X, S) = i(\pi)/m$.
- 2) Si S_1 et S_2 sont deux ensembles d'orbites compactes isolées de X et $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, alors $i(X, S_1 \cup S_2) = i(X, S_1) + i(X, S_2)$.
- 3) Soit X_t une homotopie de X telle que $U\{(S_t, t) \mid t \in [0, 1]\}$ soit un

ensemble compact isolé d'orbites compactes dans $V \times \mathbb{R}^+ \times [0,1]$. Alors

$i(X_t, S_t) = i(X_0, S_0)$ pour $t \in [0,1]$. Donc cet indice est invariant par des homotopies qui gardent les périodes uniformément majorées.

COROLLAIRE 6.2.- Soit V une variété fermée, fibrée en cercles au-dessus d'une variété B . Supposons que la caractéristique d'Euler de B soit différente de zéro et X soit un champ de vecteurs sur V tangent aux fibres et sans zéro. Alors toute perturbation de X admet une orbite compacte.

Démonstration. Soit $C \subset V \times \mathbb{R}^+$, l'ensemble des orbites périodiques de X . On voit que C est compact car les périodes des orbites de X sont majorées. Donc $i(X, C)$ est défini et il suffit de démontrer que $i(X, C) \neq 0$.

Soit H un champ de plans sur V transverse aux fibres de $p: V \rightarrow B$. Soit Z le champ gradient à une fonction de Morse sur B . Pour chaque $x \in V$, soit $Y(x)$ le vecteur dans $H(x)$ tel que $p(Y(x)) = Z(p(x))$. Y est de classe C^∞ et $Y = 0$ sur la fibre au-dessus d'un zéro de Z .

Soit $\varepsilon > 0$ et $X(\varepsilon) = X + \varepsilon Y$. Alors, pour ε petit, $X(\varepsilon)$ est proche de X , et $p(X(\varepsilon)) = \varepsilon Y$. Les orbites périodiques de $X(\varepsilon)$ sont les orbites de X au-dessus des zéros de Z (qui sont en nombre fini), car les orbites de $X(\varepsilon)$ se projettent sur les orbites de εY . Donc $i(X(\varepsilon)) = i(X) = \sum_{i=1}^m n_i$, où $n_i =$ l'indice de la i -ème orbite périodique de $X(\varepsilon)$. Or n_i est le degré de l'holonomie de l'orbite périodique π_i de $X(\varepsilon)$ car les multiplicités sont égales à un. Nous calculons l'holonomie de π_i avec un disque transverse à π_i , contenu dans le plan H . L'application de premier retour de l'orbite de $X(\varepsilon)$ de ce disque est conjuguée par p à l'application dans B qui est un déplacement suivant les orbites de εY . Le degré de cette dernière application est l'indice du zéro $p(\pi_i)$ de Z . Donc $i(X, C) = \sum_{i=1}^m n_i = x(B) \neq 0$.

Remarque.- Pour des feuilletages de S^3 de codimension un, nous savons d'après Novikov qu'il existe toujours une feuille compacte [3]. Par contre, pour les variétés de dimension ≥ 5 , P. Schweitzer a annoncé le résultat suivant :

THEOREME.- Soit \mathcal{F} un feuilletage de codimension un d'une variété V^n , $n \geq 5$. Alors, il existe un feuilletage \mathcal{F}_0 de V^n , de classe C^0 , sans feuille com-

pacte et le champ de plans de \mathcal{F}_0 est homotope à celui de \mathcal{F} .

Pour le champ de vecteurs, ceci était déjà connu :

THÉORÈME (Wilson [9]).— Soit X un champ de vecteurs sur une variété V^n , $n \geq 4$. Alors, il existe un champ de vecteurs Y sur V^n , homotope à X , et les seuls ensembles minimaux de Y sont des tores de dimension $n - 1$. En particulier, Y est sans orbite compacte. Aussi Y est de la même classe que X .

Pour beaucoup de gens, la conjecture de Seifert est vraie depuis que C. Pugh a démontré que c'est vrai génériquement :

THÉORÈME DE FERMETURE (Pugh [4]).— Soit X un champ de vecteurs sur une variété fermée V . Alors, on peut C^1 -approcher X par un champ Y avec des orbites compactes.

En conclusion, nous mentionnons un problème.

Problème 1.— Soit V une variété fermée, fibrée au-dessus d'une variété B de caractéristique d'Euler différente de zéro. Soit \mathcal{F} un feuilletage de V proche de la fibration. Est-ce que \mathcal{F} admet une feuille compacte ?

Je crois que ce problème admet une réponse affirmative quand la fibre est un tore de dimension k . Dans ce cas, ce problème est équivalent à

Problème.— Soit B une variété fermée, $\chi(B) \neq 0$. Soient f_1, \dots, f_k des difféomorphismes de B , qui commutent deux par deux et qui sont proches de 1_B . Alors ils ont un point fixe en commun.

Quand la fibration de V provient d'une action du groupe R^k , la réponse au problème 1 me semble positive.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. DENJOY - Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, Journal de Math., 11 (1932).
- [2] F. FULLER - An index of fixed point type for periodic orbits, Amer. Journ. Math., 1967, p. 133-148.
- [3] A. NOVIKOV - Topology of foliations, Trudy Mosk. Maths., 14, 513-583.
- [4] C. PUGH - On closing lemma, Amer. Journal Math., 1967.
- [5] G. REEB - Sur un théorème de Seifert sur les trajectoires fermées de certains champs de vecteurs, International Symposium on Nonlinear Differential Equations, New York, 1963.
- [6] G. REEB - Sur certaines propriétés topologiques des systèmes dynamiques, Mém. Acad. Roy. Belgique, 27 (1952), n° 9.
- [7] P. SCHWEITZER - A counter-example to the Seifert conjecture, à paraître.
- [8] G. SEIFERT - Closed integral curves in 3-space and isotopie two-dimensional deformations, Proc. A.M.S., 1 (1950), 287-302.
- [9] W. WILSON - On the minimal sets of non-singular vector fields, Annals of Math., Vol. 84, 1966, 529-536.