

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

JACQUES DIXMIER

Certaines représentations infinies des algèbres de Lie semi-simples

Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. n° 425, p. 141-156

http://www.numdam.org/item?id=SB_1972-1973__15__141_0

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTAINES REPRÉSENTATIONS INFINIES DES
ALGÈBRES DE LIE SEMI-SIMPLES

par Jacques DIXMIER

Les modules $M(\lambda)$ étudiés ici ont été considérés depuis assez longtemps (cf. par exemple [5]). Mais les premiers résultats difficiles à leur sujet sont dus à Verma [6]. Peu après, Bernstein, Gelfand, Gelfand ont à leur tour beaucoup approfondi la structure des $M(\lambda)$ [1], [2]. Ils ont aussi montré qu'on peut en déduire facilement certains théorèmes classiques. Comme on veut mettre ce point en évidence ci-dessous, il faut préciser ce qu'on suppose connu :

1) la théorie élémentaire des algèbres de Lie (Bourbaki, chap. I) ;

2) les propriétés des systèmes de racines (Bourbaki, chap. VI) ;

3) les représentations de $\mathfrak{sl}(2, k)$;

4) la décomposition d'une algèbre de Lie semi-simple en sous-espaces radiciels correspondant à une sous-algèbre de Cartan.

On ne suppose pas connu le théorème d'existence d'une algèbre de Lie ayant un système de racines donné (et encore moins la classification) ; on ne suppose rien sur les modules de dimension finie.

Notations. On note k un corps commutatif de caractéristique 0, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur k , $\mathfrak{h}$ une sous-algèbre de Cartan déployante de $\mathfrak{g}$, R le système de racines de $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, W le groupe de Weyl, B une base de R , R_+ (resp. R_-) l'ensemble des racines > 0 (resp. < 0) relativement à B , P l'ensemble des poids, Q l'ensemble des poids radiciels, Q_+ l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de B à coefficients dans $\mathbb{N}$, P_{++} l'ensemble des poids dominants, $\mu \leq \lambda$ la relation d'ordre $\lambda - \mu \in Q_+$ dans $\mathfrak{h}^*$. Si $w \in W$, on note $\ell(w)$ la longueur de w relativement à B , et $\varepsilon(w)$ le déterminant de w , égal à 1 ou -1 suivant que $\ell(w)$ est pair ou impair. On pose $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R_+} \alpha$, $\underline{n}_+ = \sum_{\alpha \in R_+} g^\alpha$,

$\underline{n} = \sum_{\alpha \in R_-} g^\alpha$, $b_+ = \mathfrak{h} + \underline{n}_+$, $b_- = \mathfrak{h} + \underline{n}_-$. Si $v \in \mathfrak{h}^*$, on note $\mathcal{P}(v)$ le nombre de familles $(n_\alpha)_{\alpha \in R_+}$, où les n_α sont des entiers ≥ 0 tels que $v = \sum_{\alpha \in R_+} n_\alpha \cdot \alpha$; on a $\mathcal{P}(v) > 0 \Leftrightarrow v \in Q_+$.

1. Les modules $M(\lambda)$ et $L(\lambda)$

1.1. Soient V un espace vectoriel, π une représentation de $\mathfrak{g}$ dans V . Pour tout $\mu \in \mathfrak{h}^*$, on note V_μ l'ensemble des $v \in V$ tels que $\pi(x)v = \mu(x)v$ pour tout $x \in \mathfrak{h}$. Si $V_\mu \neq 0$, on dit que μ est un poids de π , et $\dim V_\mu$ s'appelle la multiplicité du poids μ . La somme des V_μ est directe.

1.2. PROPOSITION.- (i) Soient $\alpha, \mu \in \mathfrak{h}^*$. On a $\pi(g^\alpha)V_\mu \subset V_{\mu+\alpha}$.

(ii) La somme $\bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$ est stable pour π .

Si $H \in \mathfrak{h}$, $X \in \mathfrak{g}^\alpha$ et $v \in V_\mu$, on a

$$HXv = XHv + [H, X]v = X\mu(H)v + \alpha(H)Xv = (\mu + \alpha)(H)Xv$$

d'où (i), et (i) entraîne (ii).

1.3. La représentation π peut n'admettre aucun poids. Pour les représentations qu'on va étudier ici, on aura au contraire $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$. (C'est toujours le cas si $\dim V < +\infty$; cf. 2.1.)

1.4. Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Soit τ_λ la représentation de dimension 1 de $b_+ = \mathfrak{h} + \underline{n}_+$ qui s'annule sur $\underline{n}_+$ et prolonge λ . Cela permet de considérer k comme un b_+ -module, donc un $U(b_+)$ -module à gauche (on note U l'algèbre enveloppante). On peut envisager $U(\mathfrak{g})$ comme un $U(b_+)$ -module à droite (et ce module est libre), donc former $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(b_+)} k$, qui est un $U(\mathfrak{g})$ -module à gauche. Ce module se note $M(\lambda)$.

L'élément $v = 1 \otimes 1$ engendre $M(\lambda)$; on l'appelle le générateur canonique de $M(\lambda)$. Si $X \in \underline{n}_+$, on a $Xv = 1 \otimes X.1 = 0$. Si $H \in \mathfrak{h}$, on a $Hv = 1 \otimes H.1 = \lambda(H)v$.

L'annulateur I de v dans $U(\mathfrak{g})$ est un idéal à gauche qui contient $\underline{n}_+$ et les $H - \lambda(H)$ ($H \in \mathfrak{h}$). Grâce à Poincaré-Birkhoff-Witt, il est facile de voir que I est l'idéal à gauche engendré par $\underline{n}_+$ et les $H - \lambda(H)$. Le module $M(\lambda)$ s'identifie à $U(\mathfrak{g})/I$ muni de la représentation régulière gauche. Toujours grâce à PBW, on a $U(\mathfrak{g}) = U(\underline{n}_-) \oplus I$. On peut donc encore identifier $M(\lambda)$ à $U(\underline{n}_-)$. Après cette identification, l'action de $\mathfrak{h}$ et $\underline{n}_+$ n'est pas transparente (sans être bien difficile à expliciter), mais l'action de $\underline{n}_-$, et même de $U(\underline{n}_-)$, est simplement la multiplication à gauche.

1.5. PROPOSITION.- Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Pour tout $\alpha \in R$, soit $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha - \{0\}$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les éléments, deux à deux distincts, de R_+ .

(i) On a $M(\lambda) = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} M(\lambda)_\mu$.

(ii) Les poids de $M(\lambda)$ appartiennent à $\lambda - Q_+$. Pour tout $\mu \in \mathfrak{h}^*$, on a $\dim M(\lambda)_\mu = \mathcal{B}(\lambda - \mu)$.

(iii) Pour tout $\mu \in \mathfrak{h}^*$, on a

$$M(\lambda)_\mu = \sum_{p_1, \dots, p_n \in \mathbb{N}, \lambda - p_1\alpha_1 - \dots - p_n\alpha_n = \mu} X_{-\alpha_1}^{p_1} \dots X_{-\alpha_n}^{p_n} \otimes k.$$

(iv) On a $M(\lambda)_\lambda = 1 \otimes k$, $M(\lambda) = U(\underline{n}_-).M(\lambda)_\lambda$, et $U(\underline{n}_+).M(\lambda)_\lambda = 0$.

Les $X_{-\alpha_1}^{p_1} \dots X_{-\alpha_n}^{p_n} \otimes 1$ forment une base de $M(\lambda)$, et l'on a, pour tout

$H \in \mathfrak{h}$,

$$\begin{aligned} H.(X_{-\alpha_1}^{p_1} \dots X_{-\alpha_n}^{p_n} \otimes 1) &= [H, X_{-\alpha_1}^{p_1} \dots X_{-\alpha_n}^{p_n}] \otimes 1 + X_{-\alpha_1}^{p_1} \dots X_{-\alpha_n}^{p_n} H \otimes 1 \\ &= (-p_1\alpha_1 - \dots - p_n\alpha_n)(H)X_{-\alpha_1}^{p_1} \dots X_{-\alpha_n}^{p_n} \otimes 1 + X_{-\alpha_1}^{p_1} \dots X_{-\alpha_n}^{p_n} \otimes \lambda(H) \\ &= (\lambda - p_1\alpha_1 - \dots - p_n\alpha_n)(H)(X_{-\alpha_1}^{p_1} \dots X_{-\alpha_n}^{p_n} \otimes 1). \end{aligned}$$

Cela prouve (iii). Le reste est évident ou résulte de (iii).

1.6. Les $M(\lambda)$ jouent à certains égards un rôle universel :

PROPOSITION.- Soient V un $\mathfrak{g}$ -module, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, v un élément $\neq 0$ de V_λ

annulé par $\underline{n}_+$. On suppose que V est engendré par v comme $\mathfrak{g}$ -module.

(i) Il existe un $\mathfrak{g}$ -homomorphisme φ et un seul de $M(\lambda)$ dans V tel que $\varphi(1 \otimes 1) = v$. Cet homomorphisme est surjectif.

(ii) On a $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$. Chaque V_μ est de dimension finie, et $\dim V_\lambda = 1$.
Tout poids de V est $\leq \lambda$.

(iii) On a $V = U(\underline{n}_-).v$.

(iv) Tout endomorphisme de V est scalaire.

(v) Pour que l'homomorphisme φ de (i) soit bijectif, il faut et il suffit que, pour tout $u \in U(\underline{n}_-)$, u_V soit injectif.

(i) résulte de 1.4 ; alors (ii), (iii) et la nécessité de (v) résultent de ce qu'on sait de $M(\lambda)$; la suffisance de (v) est facile. Soit c un $\mathfrak{g}$ -endomorphisme de V . Pour $H \in \mathfrak{h}$, on a $H_V cv = cH_V v = c\lambda(H)v$, donc $cv = \xi v$ pour un $\xi \in k$; alors, pour tout $u \in U(\mathfrak{g})$, on a $cu_V v = u_V cv = u_V \xi v$, d'où $c = \xi.1$.

1.7. Soit $Z(\mathfrak{g})$ le centre de $U(\mathfrak{g})$. Il résulte de 1.6(iv) appliqué pour $V = M(\lambda)$ qu'il existe un homomorphisme χ_λ de $Z(\mathfrak{g})$ dans k tel que $z_V = \chi_\lambda(z).1$ pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$. On dit que χ_λ est le caractère central de $M(\lambda)$.

1.8. D'après 1.6, il importe de connaître les sous- $\mathfrak{g}$ -modules de $M(\lambda)$. Ce sera l'un de nos buts principaux. Pour l'instant, contentons-nous de quelques résultats élémentaires.

1.9. PROPOSITION.- Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

(i) Soit $M(\lambda)_+ = \sum_{\mu \neq \lambda} M(\mu)$. Tout sous- $\mathfrak{g}$ -module de $M(\lambda)$ distinct de $M(\lambda)$ est contenu dans $M(\lambda)_+$.

(ii) Il existe un plus grand sous- $\mathfrak{g}$ -module K de $M(\lambda)$ distinct de $M(\lambda)$. Le $\mathfrak{g}$ -module $M(\lambda)/K$ est absolument simple.

Soit F un sous- $\mathfrak{g}$ -module de $M(\lambda)$. On a $F = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} F \cap M(\lambda)_\mu$. Si $F \neq M(\lambda)$, on a $F \cap M(\lambda)_\lambda = 0$, donc $F \subset M(\lambda)_+$. La somme des sous- $\mathfrak{g}$ -modules de $M(\lambda)$ distincts de $M(\lambda)$ est donc distincte de $M(\lambda)$. Le $\mathfrak{g}$ -module

$M(\lambda)/K$ est simple ; il est absolument simple d'après 1.6(iv).

1.10. Avec les notations de 1.9, on désigne par $L(\lambda)$ le $\mathfrak{g}$ -module $M(\lambda)/K$. On peut lui appliquer 1.6. L'image dans $L(\lambda)$ du générateur canonique de $M(\lambda)$ s'appelle le générateur canonique de $L(\lambda)$.

1.11. PROPOSITION.- Soient V un $\mathfrak{g}$ -module simple, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $v \in V_\lambda - \{0\}$. On suppose que $\underline{n}_+ \cdot v = 0$. Alors V est isomorphe à $L(\lambda)$.

Cela résulte aussitôt de 1.6.

1.12. Changeons de notation. Ce qu'on notait jusqu'ici $M(\lambda)$ sera noté $M(\lambda + \delta)$. Autrement dit, le plus grand poids de $M(\lambda)$ sera $\lambda - \delta$ au lieu de λ (idem pour $L(\lambda)$). L'avantage de cette convention bizarre commence avec l'énoncé suivant :

PROPOSITION.- Soient $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \in B$, $m = \lambda(H_\alpha)$. Supposons $m \in \mathbb{N}$. Soient v le générateur canonique de $M(\lambda)$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha} - \{0\}$, $v' = X_{-\alpha}^m v$, V le sous- $\mathfrak{g}$ -module de $M(\lambda)$ engendré par v' . Alors V est isomorphe à $M(s_\alpha \lambda)$.

On a $v' \neq 0$ (1.6). Pour tout $u \in U(\underline{n}_+)$, $u_V = u_{M(\lambda)}|_V$ est injectif. On a $s_\alpha \lambda = \lambda - m\alpha$, donc $v' \in M(\lambda)_{s_\alpha \lambda - \delta}$ (1.2). Pour $\beta \in B$ et $\beta \neq \alpha$, on a

$[g^{-\alpha}, g^\beta] = 0$ et $g^\beta v = 0$, donc $g^\beta v' = 0$. Si $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ est tel que $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ (où $\alpha(H_\alpha) = 2$), alors

$$X_\alpha v' = X_\alpha X_{-\alpha}^m v = X_{-\alpha}^m X_\alpha v + [X_\alpha, X_{-\alpha}^m] v = [X_\alpha, X_{-\alpha}^m] v$$

soit, d'après une formule de commutation facile

$$= m X_{-\alpha}^{m-1} (H_\alpha - m + 1) v = m X_{-\alpha}^{m-1} (\lambda(H_\alpha) - \delta(H_\alpha) - m + 1) v = 0$$

car $\delta(H_\alpha) = 1$. Ainsi, $\underline{n}_+ v' = 0$, et il suffit d'appliquer 1.6(v).

2. Représentations de dimension finie

On ne va pas insister sur cette théorie classique. Notons tout de même que l'essentiel, c'est-à-dire le th. 2.5, s'obtient en 2 pages en suivant la marche suivante.

2.1. PROPOSITION.- Soit V un g -module de dimension finie.

- (i) On a $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$.
- (ii) Tout poids de V appartient à P .
- (iii) Si μ est un poids de V et si $w \in W$, $w\mu$ est un poids de V de même multiplicité que μ .

On peut supposer V simple. Alors (i) résulte de 1.2 du moins si k est algébriquement clos car il existe alors au moins un poids. Le reste est facile en appliquant aux sous-algèbres $\mathfrak{g}^\alpha + \mathfrak{g}^{-\alpha} + kH_\alpha$ ($\alpha \in R$) la théorie des représentations de $\mathfrak{sl}(2, k)$.

2.2. PROPOSITION.- Soit V un g -module simple de dimension finie.

- (i) Il existe un $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ et un seul tel que V soit isomorphe à $L(\lambda + \delta)$.
- (ii) On a $\lambda \in P_{++}$ et λ est poids de multiplicité 1.
- (iii) Si μ est poids de V , on a $\mu \leq \lambda$.

Il existe un poids λ tel que, pour tout $\alpha \in B$, $\lambda + \alpha$ ne soit plus un poids. Alors tout résulte de 1.11, sauf l'assertion $\lambda \in P_{++}$ qui s'obtient grâce à la théorie de $\mathfrak{sl}(2, k)$.

2.3. Lemme.- Soient V , λ , v vérifiant les hypothèses de 1.6. Pour tout $\alpha \in R$, soit $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha - \{0\}$. On suppose que, pour tout $\beta \in B$, $X_{-\beta}^m v = 0$ pour m assez grand. Alors V est simple de dimension finie.

Cela, sans être long, est plus astucieux ; cf. [6], p. VII-12.

2.4. Lemme.- Soient $\lambda \in P_{++}$, K le plus grand sous- g -module de $M(\lambda + \delta)$ distinct de $M(\lambda + \delta)$, v le générateur canonique de $M(\lambda + \delta)$. Pour tout $\beta \in B$, soient $X_{-\beta} \in \mathfrak{g}^{-\beta} - \{0\}$ et $m_\beta = \lambda(H_\beta) + 1$. On a

$$K = \sum_{\beta \in B} U(\mathfrak{g}) X_{-\beta}^{m_\beta} v = \sum_{\beta \in B} U(\underline{n}_-) X_{-\beta}^{m_\beta} v$$

et $\dim M(\lambda + \delta)/K < +\infty$.

Soit $\beta \in B$. Comme $(\lambda + \delta)(H_\beta) = m_\beta \in \mathbb{N}^*$, le sous- g -module Y_β de $M(\lambda + \delta)$ engendré par $X_{-\beta}^{m_\beta} v$ est $U(\underline{n}_-) X_{-\beta}^{m_\beta} v$ (1.12) et est distinct de

$M(\lambda + \delta)$. Donc $\sum_{\beta \in B} Y_{\beta} \subset K$. D'après 2.3, $M(\lambda + \delta) / \sum_{\beta \in B} Y_{\beta}$ est simple de dimension finie. Donc $\sum_{\beta \in B} Y_{\beta} = K$ et $\dim M(\lambda + \delta) / K < +\infty$.

2.5. THÉORÈME.- L'application $\lambda \mapsto [L(\lambda + \delta)]$ est une bijection de P_{++} sur l'ensemble des classes de $\mathfrak{g}$ -modules simples de dimension finie.

Résulte aussitôt de 2.2 et 2.4.

2.6. En même temps, et compte tenu de 1.4, on a obtenu le résultat suivant :

PROPOSITION.- Soit $\lambda \in P_{++}$. Pour tout $\beta \in B$, soient $m_{\beta} = \lambda(H_{\beta}) + 1$ et $X_{-\beta} \in \mathfrak{g}^{-\beta} - \{0\}$. L'annulateur du générateur canonique de $L(\lambda + \delta)$ est

$$\begin{aligned} U(\mathfrak{g})\underline{n}_{+} + \sum_{h \in \mathfrak{h}} U(\mathfrak{g})(h - \lambda(h)) + \sum_{\beta \in B} U(\mathfrak{g})X_{-\beta}^{m_{\beta}} \\ = U(\mathfrak{g})\underline{n}_{+} + \sum_{h \in \mathfrak{h}} U(\mathfrak{g})(h - \lambda(h)) + \sum_{\beta \in B} U(\underline{n}_{-})X_{-\beta}^{m_{\beta}}. \end{aligned}$$

3. Invariants dans l'algèbre symétrique

3.1. On identifie l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g}^*)$ de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}^*$ à l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$. Comme $\mathfrak{g}$ opère canoniquement dans $\mathfrak{g}$ (représentation adjointe), donc dans $\mathfrak{g}^*$ et $S(\mathfrak{g}^*)$, on peut parler d'éléments invariants de $S(\mathfrak{g}^*)$. Ce sont d'ailleurs les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$ invariantes par les automorphismes élémentaires de $\mathfrak{g}$ (un automorphisme élémentaire est un produit fini d'automorphismes $\exp \operatorname{ad} x$, x nilpotent dans $\mathfrak{g}$). Notons $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des éléments invariants de $S(\mathfrak{g}^*)$. Notons $S(\mathfrak{h}^*)^W$ l'ensemble des éléments W -invariants de $S(\mathfrak{h}^*)$.

3.2. Lemme.- Soient π une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$, et $m \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto \operatorname{tr}(\pi(x)^m)$ sur $\mathfrak{g}$ appartient à $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$.

En multilinéarisant, cela résulte aussitôt des propriétés "commutatives" de la trace.

3.3. Lemme.- Soit $m \in \mathbb{N}$. Tout élément de $S^m(\mathfrak{h}^*)^W$ est combinaison linéaire de fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}$ de la forme $x \mapsto \operatorname{tr}(\pi(x)^m)$, où π est une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$.

Pour toute $f \in S(\mathfrak{g}^*)$, soit $\sigma f = \sum_{w \in W} f \circ w$. Les λ^m ($\lambda \in P$) engendrent $S^m(\mathfrak{g}^*)$ comme espace vectoriel, donc les $\sigma(\lambda^m)$ ($\lambda \in P_{++}$) engendrent $S^m(\mathfrak{g}^*)^W$. Soit π une représentation simple de plus grand poids λ de $\mathfrak{g}$. La fonction $x \mapsto g(x) = \text{tr}(\pi(x)^m)$ sur $\mathfrak{h}$ est combinaison linéaire à coefficients $\neq 0$ de $\sigma(\lambda^m)$ et des $\sigma(\mu^m)$ pour $\mu \in P_{++}$, $\mu < \lambda$. Par récurrence sur les éléments de P_{++} , on prouve donc que $\sigma(\lambda^m)$ est une combinaison linéaire du type annoncé.

3.4. THÉORÈME (Chevalley).- Soit $i : S(\mathfrak{g}^*) \rightarrow S(\mathfrak{h}^*)$ l'homomorphisme de restriction. L'application $i|S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ est un isomorphisme de $S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ sur $S(\mathfrak{h}^*)^W$.

Démonstration (attribuée à Kostant et Steinberg dans [7]). Pour tout $\alpha \in R$, la réflexion s_α de W est la restriction à $\mathfrak{h}$ de l'automorphisme élémentaire $(\exp \text{ad } X_\alpha)(\exp \text{ad } X_{-\alpha})(\exp \text{ad } X_\alpha)$ (calcul facile). Donc $i(S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}) \subset S(\mathfrak{h}^*)^W$.

On a égalité d'après 3.2 et 3.3. Soit $f \in S(\mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$ tel que $f|_{\mathfrak{h}} = 0$ et prouvons que $f = 0$. On peut supposer k algébriquement clos. Alors les transformés de $\mathfrak{h}$ par les automorphismes élémentaires contiennent tous les éléments réguliers de $\mathfrak{g}$, donc $f = 0$.

3.5. La forme de Killing définit un isomorphisme de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}^*$, donc de $S(\mathfrak{g})$ sur $S(\mathfrak{g}^*)$. Comme l'orthogonal de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$ est $\underline{n}_+ \oplus \underline{n}_-$, une traduction facile de 3.4 donne :

THÉORÈME.- Soit J l'idéal de $S(\mathfrak{g})$ engendré par $\underline{n}_+ \oplus \underline{n}_-$. On a $S(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{h}) \oplus J$; soit j l'homomorphisme $S(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{h})$ défini par cette décomposition. Alors $j|S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ est un isomorphisme de l'algèbre $S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ sur l'algèbre $S(\mathfrak{h})^W$.

4. L'homomorphisme de Harish-Chandra

4.1. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les éléments de R_+ , deux à deux distincts. Pour tout $\alpha \in R$, soit $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha - \{0\}$. Soit $(H_1, \dots, H_\ell)$ une base de $\mathfrak{h}$. D'après PBW, les éléments $u((q_i), (m_i), (p_i)) = X_{-\alpha_1}^{q_1} \dots X_{-\alpha_n}^{q_n} H_1^{m_1} \dots H_\ell^{m_\ell} X_{\alpha_1}^{p_1} \dots X_{\alpha_n}^{p_n}$ forment une

base de $U(\mathfrak{g})$. Pour $h \in \mathfrak{h}$, on a

$$[h, u((q_i), (m_i), (p_i))] = ((p_1 - q_1)\alpha_1 + \dots + (p_n - q_n)\alpha_n)(h)u((q_i), (m_i), (p_i)).$$

Donc, pour la représentation adjointe, on a $U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\lambda \in Q} U(\mathfrak{g})_\lambda$. En particulier, $U(\mathfrak{g})_0$ est le commutant de $\mathfrak{h}$ dans $U(\mathfrak{g})$, donc est une sous-algèbre de $U(\mathfrak{g})$.

4.2. Lemme. - (i) On a $U(\mathfrak{g})_0 \cap \underline{n}_- U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})_0 \cap U(\mathfrak{g})_{\underline{n}_+}$, et cet ensemble est un idéal bilatère L de $U(\mathfrak{g})_0$.

(ii) On a $U(\mathfrak{g})_0 = U(\mathfrak{h}) \oplus L$.

En effet, $\underline{n}_- U(\mathfrak{g})$ (resp. $U(\mathfrak{g})_{\underline{n}_+}$) est l'ensemble des combinaisons linéaires des $u((q_i), (m_i), (p_i))$ tels que $\sum q_i > 0$ (resp. $\sum p_i > 0$). D'autre part,

$$u((q_i), (m_i), (p_i)) \in U(\mathfrak{g})_0 \Leftrightarrow p_1\alpha_1 + \dots + p_n\alpha_n = q_1\alpha_1 + \dots + q_n\alpha_n,$$

d'où (i). Si $u = u((q_i), (m_i), (p_i)) \in U(\mathfrak{g})_0$, on a $u \in U(\mathfrak{h})$ (resp. L) si et seulement si $p_1 + \dots + q_n = 0$ (resp. > 0), d'où (ii).

4.3. D'après 4.2, le projecteur de $U(\mathfrak{g})_0$ sur $U(\mathfrak{h})$ de noyau L est un homomorphisme d'algèbres φ , l'homomorphisme de Harish-Chandra de $U(\mathfrak{g})_0$ sur $U(\mathfrak{h})$. Identifiant $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$ à l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{h}^*$, on a alors :

4.4. PROPOSITION. - Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. On a, pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$,

$$\chi_\lambda(z) = (\varphi(z))(\lambda - \delta).$$

Car il existe $u_1, \dots, u_p \in U(\mathfrak{g})$ et $n_1, \dots, n_p \in \underline{n}_+$ tels que $z = \varphi(z) + u_1 n_1 + \dots + u_p n_p$. Alors, si v est le générateur canonique de $M(\lambda)$, on a $\chi_\lambda(z)v = zv = \varphi(z)v = (\varphi(z))(\lambda - \delta)v$.

4.5. THÉORÈME [3]. - Soit γ l'automorphisme de l'algèbre $S(\mathfrak{h})$ qui transforme la fonction polynomiale p sur $\mathfrak{h}^*$ en la fonction $\lambda \mapsto p(\lambda - \delta)$. Soient $U(\mathfrak{g})_0$ et φ comme en 4.3. Alors $(\gamma \circ \varphi)|_{Z(\mathfrak{g})}$ est un isomorphisme de l'algèbre $Z(\mathfrak{g})$ sur l'algèbre $S(\mathfrak{h})^W$.

Démonstration [7]. Soient $\alpha \in B$, $\lambda \in P_{++}$, $\mu = s_\alpha \lambda$. Alors $M(\mu)$ est isomorphe à un sous- $\mathfrak{g}$ -module de $M(\lambda)$ (1.12), donc $\chi_\lambda = \chi_\mu$. D'après 4.4, on a,

pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$,

$$((\gamma \circ \varphi)(z))(\lambda) = (\varphi(z))(\lambda - \delta) = \chi_\lambda(z) = \chi_\mu(z) = ((\gamma \circ \varphi)(z))(\mu).$$

Ainsi, les fonctions polynomiales $(\gamma \circ \varphi)(z)$ et $(\gamma \circ \varphi)(z) \circ s_\alpha$ coïncident sur P_{++} , donc sont égales ; d'où $(\gamma \circ \varphi)(Z(\mathfrak{g})) \subset S(\mathfrak{h})^W$. Il reste à prouver l'assertion

(A) $\gamma \circ \varphi$ applique bijectivement $Z(\mathfrak{g})$ sur $S(\mathfrak{h})^W$.

Or φ ressemble beaucoup à l'homomorphisme j de 3.5 (dans les deux cas, on "efface" les termes dans $\underline{n}_+$ ou $\underline{n}_-$). Comme l'assertion analogue à (A) pour j est vraie (3.6), (A) est vraie d'après un argument classique de passage au gradué associé (on sait que $S(\mathfrak{g})$ est l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée $U(\mathfrak{g})$; d'autre part, $\text{gr}(\gamma)$ est l'identité).

4.6. COROLLAIRE 1.- L'algèbre $Z(\mathfrak{g})$ est une algèbre de polynômes en ℓ indéterminées ($\ell = \dim \mathfrak{h}$).

4.7. COROLLAIRE 2.- Si $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$, on a $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$ $\Leftrightarrow \lambda' \in W\lambda$.

D'après 4.6 et 4.5, dire que $\chi_\lambda = \chi_{\lambda'}$ revient à dire que λ et λ' définissent le même homomorphisme de $S(\mathfrak{h})^W$ dans k .

4.8. COROLLAIRE 3.- Si k est algébriquement clos, tout homomorphisme de $Z(\mathfrak{g})$ dans k est de la forme χ_λ .

En effet, tout homomorphisme de $S(\mathfrak{h})^W$ dans k se prolonge en un homomorphisme de $S(\mathfrak{h})$ dans k , donc est défini par un $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

5. Caractères

5.1. Soit $Z^{\mathfrak{h}^*}$ l'ensemble des fonctions à valeurs entières sur $\mathfrak{h}^*$. Nous préférons écrire $\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} f(\lambda) e^\lambda$ une telle fonction (où les e^λ sont des "symboles"). Les éléments de $Z^{\mathfrak{h}^*}$ à support fini forment l'algèbre $Z[\mathfrak{h}^*]$ (on a $e^\lambda e^\mu = e^{\lambda+\mu}$). On introduit $Z\langle \mathfrak{h}^* \rangle$ entre $Z[\mathfrak{h}^*]$ et $Z^{\mathfrak{h}^*}$; c'est l'ensemble des $f \in Z^{\mathfrak{h}^*}$ dont le support S possède la propriété suivante : S est contenu dans une réunion finie d'ensembles de la forme $\nu - Q_+$, où $\nu \in \mathfrak{h}^*$. Grâce

à cette propriété de supports, on peut munir $\mathbb{Z}\langle \mathfrak{h}^* \rangle$ d'une multiplication prolongeant celle de $\mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$:

$$\left(\sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} c_\lambda e^\lambda \right) \left(\sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} c'_\mu e^\mu \right) = \sum_{\nu \in \mathfrak{h}^*} \left(\sum_{\lambda + \mu = \nu} c_\lambda c'_\mu \right) e^\nu .$$

5.2. Lemme. - On pose $d = \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w\delta} \in \mathbb{Z}[\mathfrak{h}^*]$, $K = \sum_{\gamma \in Q_+} \mathcal{B}(\gamma) e^{-\gamma} \in \mathbb{Z}\langle \mathfrak{h}^* \rangle$.

Dans $\mathbb{Z}\langle \mathfrak{h}^* \rangle$, on a $Ke^{-\delta}d = 1$; en particulier, d est inversible.

La définition de K entraîne que

$$K = \prod_{\alpha \in R_+} (1 + e^{-\alpha} + e^{-2\alpha} + \dots) .$$

D'autre part, il est connu que

$$d = e^\delta \prod_{\alpha \in R_+} (1 - e^{-\alpha}) .$$

5.3. On dit qu'un $\mathfrak{g}$ -module V admet un caractère si $V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu$ et si $\dim V_\mu < +\infty$ pour tout μ . On pose alors $\text{ch}V = \sum_{\mu \in \mathfrak{h}^*} (\dim V_\mu) e^\mu$.

5.4. PROPOSITION. - Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Alors $\text{ch}M(\lambda) \in \mathbb{Z}\langle \mathfrak{h}^* \rangle$, et
 $\text{ch}M(\lambda) = d^{-1} \cdot e^\lambda$.

Cela résulte aussitôt de 1.5 et 5.2.

5.5. Lemme [1]. - Soit $\lambda_0 \in \mathfrak{h}^*$. Soit M un $\mathfrak{g}$ -module tel que :

- a) M admet le caractère central χ_{λ_0} ;
- b) M admet un caractère qui appartient à $\mathbb{Z}\langle \mathfrak{h}^* \rangle$.

Soit D_M l'ensemble des $\lambda \in W\lambda_0$ tels que $\lambda - \delta \in Q_+$ rencontre le support de $\text{ch}M$. Alors $\text{ch}M$ est combinaison $\mathbb{Z}$ -linéaire des $\text{ch}M(\lambda)$ pour $\lambda \in D_M$.

Soit $\mu - \delta$ un élément maximal de $\text{Supp } \text{ch}M$, et posons $\dim M_{\mu-\delta} = m$. Il existe un $\mathfrak{g}$ -homomorphisme φ de $(M(\mu))^m$ dans M qui applique bijectivement $(M(\mu)_{\mu-\delta})^m$ sur $M_{\mu-\delta}$ (1.6). Le caractère central de $M(\mu)$ est donc χ_{λ_0} , d'où $\mu \in W\lambda_0$ (4.7). On a une suite exacte

$$0 \rightarrow L \rightarrow M(\mu)^m \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$$

et L, N vérifient les mêmes propriétés que M (avec $D_L \subset D_M, D_N \subset D_M$), mais n'admettent plus le poids $\mu - \delta$. On en déduit facilement que

$\text{Card } D_L$, $\text{Card } D_N < \text{Card } D_M$. Raisonnant par récurrence, le lemme est vrai pour L et N . Or $\text{ch} M = m \text{ch} M(\mu) - \text{ch} L + \text{ch} N$.

5.6. THÉORÈME.- Soit V un $\mathfrak{g}$ -module simple de dimension finie, de plus grand poids λ .

$$(i) \quad \text{On a } \text{ch} V = d^{-1} \sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda + \delta)}.$$

$$(ii) \quad \text{Si } \mu \in \mathfrak{h}^*, \text{ la multiplicité de } \mu \text{ comme poids de } V \text{ est } \sum_{w \in W} \varepsilon(w) (\mathfrak{P}(w(\lambda + \delta) - (\mu + \delta))).$$

En effet ([1]), d'après 5.4 et 5.5, $d \text{ch} V$ est combinaison linéaire des $e^{w(\lambda + \delta)}$ pour $w \in W$. D'autre part, $w(d) = \varepsilon(w)d$ et $w(\text{ch} V) = \text{ch} V$ pour tout $w \in W$. Donc $d \text{ch} V$ est proportionnel à $\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda + \delta)}$, d'où facilement (i).

Compte tenu de 5.2, on a

$$\text{ch} V = (K e^{-\delta})(d \text{ch} V) = \left(\sum_{\gamma \in Q_+} \mathfrak{P}(\gamma) e^{-\delta - \gamma} \right) \left(\sum_{w \in W} \varepsilon(w) e^{w(\lambda + \delta)} \right),$$

d'où (ii).

6. Sous-modules de $M(\lambda)$

6.1. PROPOSITION.- Soit $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Alors $M(\lambda)$ est de longueur finie. Tout sous-quotient simple de $M(\lambda)$ est isomorphe à $L(\lambda')$ pour un $\lambda' \in W\lambda \cap (\lambda - Q_+)$.

Un sous-quotient simple de $M(\lambda)$ est un $L(\lambda')$ d'après 1.11 ; on a $\lambda' \in \lambda - Q_+$ d'après 1.5(ii), $\lambda' \in W\lambda$ d'après 4.7. Il n'y a donc, à isomorphisme près, qu'un nombre fini de possibilités pour les sous-quotients. Si $M(\lambda)$ n'est pas de longueur finie, il admet une suite infinie strictement décroissante de sous-modules, avec quotients simples (car $M(\lambda)$ est noethérien). Alors une infinité de ces quotients sont isomorphes, d'où contradiction avec 1.5(ii).

6.2. En fait, la plupart du temps, $M(\lambda)$ est simple :

THÉORÈME.- Pour que $M(\lambda)$ soit simple, il faut et il suffit que, pour tout $\alpha \in R_+$, on ait $\lambda(H_\alpha) \notin \{1, 2, 3, \dots\}$.

Ce théorème résulte aussitôt de 6.5 et 6.8 ci-dessous.

6.3. Dans le cas général, on sait déterminer les sous-quotients simples de $M(\lambda)$ (mais pas leur multiplicité) :

THÉOREME [2].- Soient $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $L(\lambda')$ est un sous-quotient simple de $M(\lambda)$;
- (ii) il existe $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in R_+$ tels que

$$\lambda \geq s_{\gamma_1} \lambda \geq s_{\gamma_2} s_{\gamma_1} \lambda \geq \dots \geq s_{\gamma_n} \dots s_{\gamma_2} s_{\gamma_1} \lambda = \lambda' .$$

Démonstration difficile.

6.4. La condition (ii) de 6.3 est plus stricte que la condition $\lambda' \in W\lambda \cap (\lambda - Q_+)$ (elle lui est équivalente pour A_2 , mais déjà plus pour B_2 [7]).

6.5. Au lieu de nous intéresser aux sous-quotients simples de $M(\lambda)$, intéressons-nous aux sous-modules de $M(\lambda)$. Verma avait cru démontrer que tout sous-module de $M(\lambda)$ est somme des sous-modules du type $M(\mu)$ qu'il contient. Malheureusement, un contre-exemple (pour A_3) est indiqué dans [1]. Ce fait rend très obscure la structure de l'ensemble des sous-modules de $M(\lambda)$. Toutefois, la recherche des sous-modules du type $M(\mu)$ est une étape importante, car :

PROPOSITION [7].- Tout sous-module de $M(\lambda)$ contient un sous-module simple isomorphe à un $M(\mu)$.

Facile à partir de 1.6.

6.6. D'autre part, la situation est clarifiée par la

PROPOSITION [7].- Soient $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$.

- (i) $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\mu), M(\lambda))$ est nul ou de dimension 1 sur k .
- (ii) Tout élément non nul de $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\mu), M(\lambda))$ est injectif.

a) Soient v, v' les générateurs canoniques de $M(\lambda)$, $M(\mu)$, et $\varphi : M(\mu) \rightarrow M(\lambda)$ un $\mathfrak{g}$ -homomorphisme. Il existe $u \in U(\underline{n})$ tel que $\varphi(v') = uv$. Si φ est non injectif, il existe $u' \in U(\underline{n})$ tel que $u'v' \neq 0$ et $0 = \varphi(u'v') = u'\varphi(v') = (u'u)v$. Alors $u' \neq 0$, $u'u = 0$, d'où $u = 0$ et alors $\varphi(M(\mu)) = \varphi(U(\underline{n})v') = U(\underline{n})uv = 0$. Cela prouve (ii).

b) Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\mu), M(\lambda))$. Si $\varphi_1(M(\mu)) = \varphi_2(M(\mu))$, φ_1 et φ_2

sont proportionnels d'après a) puisque tout automorphisme de $M(\mu)$ est scalaire.

c) $M(\mu)$ "contient" un $M(\nu)$ simple (6.5). Soit $\varphi \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\mu), M(\lambda))$. Si $\varphi|_{M(\nu)} = 0$, $\varphi = 0$ d'après a). Donc $\varphi \mapsto \varphi|_{M(\nu)}$ est injectif, ce qui ramène au cas où $M(\mu)$ est simple. Si $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\mu), M(\lambda))$ sont linéairement indépendants, $\varphi_1(M(\mu)) \neq \varphi_2(M(\mu))$ d'après b), donc la somme $\varphi_1(M(\mu)) + \varphi_2(M(\mu))$ est directe. D'après 1.5(ii), on en déduit $\mathcal{P}(\lambda - \delta - \xi) \geq 2\mathcal{P}(\mu - \delta - \xi)$ pour tout $\xi \in \mathfrak{h}^*$, d'où $\mathcal{P}(\xi + \lambda - \mu) \geq 2\mathcal{P}(\xi)$, d'où une croissance exponentielle de $\mathcal{P}$ alors qu'une telle fonction de partition croît polynomialement.

6.7. Soient $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. D'après 6.6, ou bien $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M(\mu), M(\lambda)) = 0$, ou bien $M(\mu)$ se plonge dans $M(\lambda)$ de manière essentiellement unique ; on écrit alors $M(\mu) \subset M(\lambda)$ par abus de notation. D'après 1.5 et 4.7, on a $M(\mu) \subset M(\lambda) \Rightarrow \mu \leq \lambda$ et $\mu \in W\lambda$; la réciproque est fautive :

6.8. THÉORÈME [2].- Soient $\lambda, \lambda' \in \mathfrak{h}^*$. Les conditions de 6.3 sont encore équivalentes à
(iii) $M(\lambda') \subset M(\lambda)$.

En fait, 6.3 et 6.8 se démontrent ensemble ; (iii) $\Rightarrow$ (i) est clair ; nous ne pouvons expliquer (i) $\Rightarrow$ (ii) ; (ii) $\Rightarrow$ (iii) (qui est aussi dans [7]) se ramène à ceci :

6.9. Lemme.- Soient $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\alpha \in R_+$, $m = \lambda(H_\alpha)$. Si $m \in \mathbb{N}$, on a $M(s_\alpha \lambda) \subset M(\lambda)$.

Lorsque $\alpha \in B$, c'est la prop. 1.12. Le cas présent est bien plus délicat (d'ailleurs le générateur canonique de $M(s_\alpha \lambda)$ n'est plus transformé du générateur canonique de $M(\lambda)$ par $X_{-\alpha}^m$). Disons seulement qu'on se ramène au cas où $\lambda \in P$ grâce à la remarque suivante : soit $\mu \in \mathfrak{h}^*$; l'ensemble des $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ tels que $M(\lambda - \mu) \subset M(\lambda)$ est une partie algébrique de $\mathfrak{h}^*$; cela se voit en identifiant tous les $M(\lambda)$ à $U(\underline{n})$.

6.10. Dans le cas 6.2, $M(\lambda)$ est simple. A l'opposé, considérons le cas où $\lambda \in P_{++}$. Alors, pour tout $w \in W$, on a $M(w\lambda) \subset M(\lambda)$: cela résulte de 6.8, mais s'établit sans peine directement à partir de 1.12. Il est intéressant

d'étudier les relations d'inclusion entre les $M(w\lambda)$ pour λ fixé et w variable. On démontre que la relation $M(w\lambda) \subset M(w'\lambda)$ ne dépend que de w et w' et non de λ , du moins si $\lambda \in \delta + P_{++}$ (c'est-à-dire si λ est un poids dominant n'appartenant à aucun mur). Plus précisément, écrivons $w \leftarrow w'$ s'il existe $\gamma \in R_+$ (nécessairement unique) tel que $w = s_\gamma w'$ et $\ell(w) = \ell(w') + 1$. Écrivons $w \leq w'$ s'il existe une chaîne $w \leftarrow w_1 \leftarrow w_2 \leftarrow \dots \leftarrow w_n \leftarrow w'$. (Cette relation d'ordre est liée à la décomposition de Bruhat.) Alors :

PROPOSITION [2].- Soit $\lambda \in \delta + P_{++}$. On a $M(w\lambda) \subset M(w'\lambda) \Leftrightarrow w \leq w'$.

6.11. Lemme [2].- A tout couple (w_1, w_2) d'éléments de W tels que $w_1 \leftarrow w_2$, on peut associer $\sigma(w_1, w_2) = \pm 1$, de telle sorte que la propriété suivante soit vérifiée :

si $w_1, w_2, w_3, w_4 \in W$ et si $w_1 \xleftarrow{w_2} w_4$ avec $w_2 \neq w_3$, alors

$$\sigma(w_1, w_2)\sigma(w_2, w_4) = -\sigma(w_1, w_3)\sigma(w_3, w_4).$$

6.12. Soient $\lambda \in P_{++}$, V un $\mathfrak{g}$ -module simple de plus grand poids λ . Pour $i = 0, 1, \dots$, soient W_i l'ensemble des éléments de W de longueur i et $C_i = \bigoplus_{w \in W_i} M(w(\lambda + \delta))$. En particulier, $C_0 = M(\lambda + \delta)$, de sorte qu'il existe

un $\mathfrak{g}$ -homomorphisme surjectif $\varepsilon : C_0 \rightarrow V$. Pour tout $w \in W$, fixons un plongement de $M(w(\lambda + \delta))$ dans $M(\lambda + \delta)$. Pour $i = 1, 2, \dots$, on définit une matrice (d_{w_1, w_2}^i) , où $w_1 \in W_i$, $w_2 \in W_{i-1}$, en posant $d_{w_1, w_2}^i = \sigma(w_1, w_2)$ (cf. 6.11) si $w_1 \leftarrow w_2$, $d_{w_1, w_2}^i = 0$ sinon. Cette matrice définit un homomorphisme d^i de C_i dans C_{i-1} , car $M(w_1(\lambda + \delta)) \subset M(w_2(\lambda + \delta))$ si $w_1 \leftarrow w_2$.

THÉORÈME [2].- Avec les notations précédentes, la suite

$$0 \rightarrow C_s \xrightarrow{d_s} C_{s-1} \rightarrow \dots \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} V \rightarrow 0$$

(où $s = \dim \underline{n}_+ = \dim \underline{n}_- = \frac{1}{2} \text{Card } R = \sup_{w \in W} \ell(w)$) est exacte.

6.13. D'après 1.4, les C_i , considérés comme $U(\underline{n}_-)$ -modules, sont libres. Appliquant alors la machinerie de l'algèbre homologique et quelques considérations supplémentaires, on en déduit dans [2] le théorème de Bott :

$$\dim H^i(\underline{n}_-, V) = \text{Card } W_i \text{ pour } i \geq 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. I. BERNSTEIN, I. M. GELFAND, S. I. GELFAND - Structure des représentations engendrées par des vecteurs de plus haut poids, Funct. Anal. i evo priilojenie, 5(1971), p. 1-9 [en russe].
- [2] I. I. BERNSTEIN, I. M. GELFAND, S. I. GELFAND - Opérateurs différentiels sur l'espace affine principal..., Inst. Prikladnoi Mat., Acad. Nauk SSSR, Moscou, 1971, [en russe].
- [3] HARISH-CHANDRA - On some applications..., Trans. Amer. Math. Soc., 70 (1951), p. 28-96.
- [4] B. KOSTANT - A formula for the multiplicity of a weight, Trans. Amer. Math. Soc., 93 (1959), p. 53-73.
- [5] Séminaire Sophus Lie, 1ère année, 1954/55, Paris.
- [6] J.-P. SERRE - Algèbres de Lie semi-simples complexes, Benjamin, 1966.
- [7] D. N. VERMA - Structure of certain induced representations of complex semisimple Lie algebras, Dissertation, Yale Univ., 1966 ; et Bull. Amer. Math. Soc., 74 (1968), p. 160-166.