GABRIEL MOKOBODZKI

Structure des cônes de potentiels

Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. nº 377, p. 239-252
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1969-1970__12__239_0>

Séminaire BOURBAKI
22e année, 1969/70, n° 377 Mai-Juin 1970

STRUCTURE DES CÔNES DE POTENTIELS

par Gabriel MOKOBODZKI

Introduction.

Dans les différentes théories du potentiel, on dégage un cône convexe fondamental que l'on appelle, suivant le cas, cône des fonctions excessives, cône des fonctions surharmoniques, cône des potentiels.

L'origine de cette étude réside dans le problème suivant : quelles sont les propriétés minimales que doit vérifier un cône convexe de fonctions numériques pour qu'on puisse le considérer comme le cône convexe fondamental d'une certaine théorie du potentiel ?

Le problème ainsi posé est imprécis, car on ne dit pas ce qu'on entend par théorie du potentiel. En fait, cette imprécision est dans la nature des choses : en théorie classique du potentiel dans un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$, on peut définir les fonctions surharmoniques à partir d'une fonction de Green, à partir du faisceau des fonctions harmoniques, de l'intégrale de Dirichlet, ou encore d'un semi-groupe d'opérateurs.

Le problème posé rejoint donc le problème du passage d'une forme de la théorie du potentiel à une autre et de fait, ce sont les mêmes techniques qui interviennent.

On trouvera d'autres exemples de cette démarche dans l'article de Meyer [5], et dans les travaux de Hansen [2] et de Mokobodzki-Sibony [8].

La notion de cône de potentiels introduite ici est plus large que celle qui figure dans [8] et [11] et permet d'aborder les problèmes de dualité et de représentation intégrale.

La première partie de cet exposé est consacrée à l'étude formelle des cônes de potentiels. La seconde partie comportera des indications sur la manière dont on peut résoudre le problème posé dans un cas particulier.

On a laissé de côté la vérification des propriétés des cônes de potentiels dans les différentes théories du potentiel ; on pourra consulter à ce sujet les articles [8], [10] et [11].

Préliminaires.

Tous les espaces vectoriels considérés sont définis sur $\mathbb{R}$.

I. Le théorème de Hahn-Banach et ses conséquences.

a) Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit p une application sous-linéaire de E dans $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in E$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $-p(-x) \leq \lambda \leq p(x)$, il existe $\ell \in E^*$ dual algébrique de E , telle que $\ell \leq p$ et $\ell(x) = \lambda$.

b) $A_p = \{\ell \in E^* \; ; \; \ell \leq p\}$ est convexe compact pour $\sigma(E^*, E)$.

c) Si p_1 , p_2 sont des formes sous-linéaires sur E , alors $A_{p_1 + p_2} = A_{p_1} + A_{p_2}$, ou encore, si $\ell \leq p_1 + p_2$, $\ell \in E^*$, alors il existe ℓ_1 , $\ell_2 \in E^*$, $\ell_1 \leq p_1$, $\ell_2 \leq p_2$ et $\ell = \ell_1 + \ell_2$.

d) Soit p sous-linéaire sur E . L'ensemble $H = \{x \in E \; ; \; p(x) + p(-x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E et pour tout $x \in H$, $y \in E$, $p(x + y) = p(x) + p(y)$, en particulier p est linéaire sur H . Si $A_p = \{\ell\}$ où $\ell \in E^*$, alors $p = \ell$.

II. Représentation des espaces ordonnés à unité.

Tous les espaces vectoriels ordonnés considérés seront supposés archimédiens.

Soit $(E, \leq)$ un espace vectoriel ordonné, et soit E^+ le cône positif de E . On dit que $u \in E^+$ est une unité pour l'ordre si, pour tout $v \in E$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $-\lambda u \leq v \leq \lambda u$. Si u est une unité, on définit une norme $\|.\|_u$

sur E par $\|v\|_u = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ ; -\lambda u \leq v \leq \lambda u\}$.

($\|v\|_u = 0$ entraîne $v \leq 0$ car E est archimédien, donc $v \geq 0$ et $v = 0$.)

Soit E' le dual de E muni de la norme $\|.\|_u$ et soit
$K = \{\mu \in E'^+ ; \langle \mu, u \rangle = 1\}$.

L'application canonique Π de E dans $\underline{A}(K)$, espace des fonctions affines continues sur K (muni de $\sigma(E', E)$) est une injection et Π est un isomorphisme d'espace normé ordonné de E dans $\Pi(E)$; enfin $\Pi(u) = 1$ et $\Pi(E)$ est dense dans $\underline{A}(K)$ pour la convergence uniforme sur K .

III. Simplexes et espaces simpliciaux. Théorème d'Edwards.

Soit $(E, \leq)$ un espace vectoriel ordonné. On dira que E est <u>simplicial</u> si E^{*+} (cône des formes linéaires positives sur $(E, \leq)$) est saillant et réticulé pour l'ordre qu'il définit.

On dit que E possède la propriété de décomposition de Riesz si, pour $u_1, u_2, u_3, u_4 \in E$ avec $u_1, u_2 \leq u_3, u_4$, il existe $v \in E$, tel que $u_1, u_2 \leq v \leq u_3, u_4$.

Si $E = E^+ - E^+$ et si E possède la propriété de décomposition de Riesz, alors E est simplicial.

Soit H un e. ℓ. c. s., K un convexe compact de H . On dit que K est un simplexe si le cône Γ de $H \times \mathbb{R}$, de base $K \times \{1\}$, est réticulé pour l'ordre qu'il définit.

<u>Théorème d'Edwards</u>.- Les conditions suivantes sont équivalentes :

K est un simplexe ;

$\underline{A}(K)$ est simplicial ;

$\underline{A}(K)$ a la propriété de décomposition de Riesz.

Soit $(E, \leq)$ un espace ordonné à unité d'ordre u.

THÉORÈME.- Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) E est simplicial ;

b) pour tous $t, v \in E$, $M(t,v) = \{w + \varepsilon u \mid \varepsilon > 0, w \in E, w \geq t \text{ et } v\}$ est filtrant décroissant pour l'ordre $\leq$.

(Utiliser la représentation fonctionnelle définie en II.)

1ère partie. Cônes de potentiels en dualité.

Notations.

Soient $(E, \leq)$ un espace vectoriel ordonné, E^+ le cône positif de E, E^* dual algébrique de E, E^{*+} le cône des formes linéaires positives sur E. On supposera toujours que E^{*+} sépare E.

DÉFINITION 1.- Soit $C \subset E^+$ un cône convexe. On dira que le couple $(C, \leq)$ définit un cône de potentiels si les conditions suivantes sont satisfaites :

1) Pour tous $u, v \in C$, l'ensemble $M(u - v) = \{w \in C ; w \geq u - v\}$ possède un élément minimum (pour l'ordre $\leq$), noté $R(u - v)$.

2) On a $(u - R(u - v)) \in C$, $\forall u, v \in C$.

Si on introduit la relation d'ordre $\prec$ associée à C : $(w \prec t) \Leftrightarrow (t - w \in C)$ (à lire " w spécifiquement majoré par t "), on peut formuler 1) et 2) de la manière suivante :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Pour tous } u, v \in C, \ R(u-v) = \inf_{\leq}\{w \in C ; w \geq u - v\} \text{ existe,} \\ R(u - v) \in C, \ R(u - v) \prec u \text{ et } (u - v) \leq R(u - v). \end{cases}$$

Propriétés immédiates :

Si $(C, \leq)$ est un cône de potentiels et si $C_1 \subset C$ est une face de C, alors

$(C_1, \leq)$ est un cône de potentiels.

Exemples.- a) Si $u \in C$, $C_1 = \{v \in C ; \exists \lambda > 0 , v \prec \lambda u\}$.

b) Si $u \in C$, $C_1 = C_u = \{v \in C ; \exists \lambda > 0 , v \leq \lambda u\}$.

THÉORÈME 2.- Soit $(C, \leq)$ un cône de potentiels, $C \subset (E, \leq)$. Si $u \in C$ est unité pour l'ordre, et si $\bar{C}$ = adhérence de C pour $\|\cdot\|_u$ est complet, alors $(\bar{C}, \leq)$ est un cône de potentiels.

La démonstration repose sur le

LEMME.- Pour tous $w_1, w_2 \in C - C$, on a $\| Rw_1 - Rw_2 \|_u \leq \|w_1 - w_2\|_u$.

En effet, soit $\lambda > \|w_1 - w_2\|_u$. On doit avoir $-\lambda u \leq w_1 - w_2 \leq \lambda u$, d'où $w_1 \leq Rw_2 + \lambda u$ et $Rw_1 \leq Rw_2 + \lambda u$ et finalement $-\lambda u \leq Rw_1 - Rw_2 \leq \lambda u$.

Démonstration du théorème 2.

Remarquons d'abord que l'on a, pour $u, v \in C$, $R(u-v) = \inf\{w \in \bar{C} ; w \geq u-v\}$. En effet, si $w \in \bar{C}$, $w \geq u - v$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut prouver $w' \in C$, $\|w - w'\|_u < \varepsilon$, d'où $w \leq w' + \varepsilon u$ et par suite

$$R(u - v) \leq w' + \varepsilon u \quad \text{et} \quad R(u - v) \leq w .$$

Le même argument permettrait de montrer que si $u = \lim u_n$, $v = \lim v_n$, $v_n \in C$, $u_n \in C$ et $w \in \bar{C}$, $w \geq u - v$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_o tel que $n \geq n_o \Rightarrow w + \varepsilon u \geq u_n - v_n$. Si l'on définit $T(u - v) = \lim R(u_n - v_n)$, on aura donc $T(u - v) \leq w + \varepsilon u$ et $T(u - v) \leq w$. Par suite $R(u - v)$ est bien défini dans $\bar{C}$. Montrons que $R(u - v) \prec u$. Si $u = \lim u_n$, $v = \lim v_n$,

$$u - R(u - v) = \lim(u_n - R(u_n - v_n)) \in \bar{C} .$$

On démontrerait de la même manière le corollaire suivant :

COROLLAIRE 3.- Pour tout $w \in \overline{C - C}$, $Rw \in \bar{C}$, où $Rw = \inf\{u \in \bar{C} ; u \geq w\}$.

DÉFINITION 4.- On dira que $(C, \leq)$ est quasi-complet si, pour tout $u \in C$, le cône $C_u = \{v \in C \; ; \; v \leq \lambda u \, , \; \lambda > 0\}$ est complet pour la norme $\|.\|_u$.

PROPOSITION 5.- Soit $(C, \leq)$ un cône de potentiels et soit, pour $u \in C$, $A_u = \{v \in C \; ; \; 0 \leq v \leq u\}$. Alors l'application $u \mapsto A_u$ est affine sur C, autrement dit $\lambda A_u = A_{\lambda u} \;\; \forall \lambda > 0$ et $A_{u_1} + A_{u_2} = A_{u_1 + u_2}$.

Démonstration.

Soit $v \in A_{u_1 + u_2}$, autrement dit $v \leq u_1 + u_2$. Posons $v_1 = R(v - u_2)$, alors $v_2 = v - R(v - u_2) \leq u_2$ et $v_2 \in C$.

DÉFINITION 6.- On appellera cône dual de $(C, \leq)$ le couple $(C^*, \prec)$ défini de la manière suivante :

a) C^* est l'ensemble des formes linéaires sur $(C - C)$, croissantes pour l'ordre défini par la relation $\leq$.

b) Si $\mu, \nu \in C^*$, $(\mu \prec \nu) \Leftrightarrow (\langle \mu, v\rangle \leq \langle \nu, v\rangle)$, pour tout $v \in C$. On dira alors que μ est balayée de ν relativement à C.

PROPOSITION 7.- Soit $\sigma \in C^* - C^*$; l'application $u \mapsto \sup\limits_{v \in Au} \langle \sigma, v\rangle$ définit une forme linéaire croissante $R\sigma$ sur C, donc un élément de C^*, tel que

a) $R\sigma \succ \sigma$;

b) $\forall \theta \in C^*$, $(\theta \succ \sigma) \Rightarrow (\theta \succ R\sigma)$.

Démonstration sans difficultés.

LEMME 8.- Pour toute $\mu \in C^*$, on définit une forme sous-linéaire p^μ sur $C - C$ en posant

$$p^\mu(w) = \inf\{\langle \mu, v\rangle \; ; \; v \in C \, , \; v \geq w\} = \langle \mu , Rw\rangle .$$

1) Si ℓ est une forme linéaire sur $C - C$

$$(\ell \leq p^\mu) \Leftrightarrow (\ell \in C^* \text{ et } \ell \prec \mu) .$$

2) On a $p^{\mu} + p^{\nu} = p^{\mu+\nu}$ et $p^{\lambda\nu} = \lambda p^{\nu}$ $\forall\ \lambda > 0$, $\mu , \nu \in C^*$, ou encore en posant $A_{\mu} = \{\nu \in C^* \ ; \ \nu \prec \mu\}$, $\mu \longmapsto A\mu$ est affine sur C^* .

Démonstration immédiate.

PROPOSITION 9.- Le couple $(C^* , \prec)$ est un cône de potentiels.

Démonstration.

Pour $\mu , \nu \in C^*$, on sait que $R(\mu - \nu) \in C^*$. Il reste à prouver que $R(\mu - \nu) \leq \mu$. On a toujours $\mu \prec \nu + R(\mu - \nu)$. D'après le lemme précédent, il existe donc une décomposition de μ en $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\mu_1 , \mu_2 \in C^*$, $\mu_1 \prec \nu$, $\mu_2 \prec R(\mu - \nu)$. On a $(\mu - \nu) \prec (\mu - \mu_1) \prec \mu_2 \prec R(\mu - \nu)$, par suite $\mu_2 \succ R(\mu - \nu)$ donc $\mu_2 = R(\mu - \nu)$.

PROPOSITION 10.- Le cône C^* est réticulé pour son ordre propre.

On s'appuiera sur un lemme valable dans tout cône de potentiels.

LEMME 11.- Soient $\mu , \nu , \sigma \in C^*$, $\mu , \nu \leq \sigma$. Dans ces conditions on a encore :

$$\begin{cases} \mu + R(\nu - \mu) \leq \sigma \\ \nu + R(\mu - \nu) \leq \sigma \ . \end{cases}$$

Démonstration.

Posons $\mu + \mu' = \sigma = \nu + \nu'$ d'où l'on tire $R(\nu - \mu) = R(\mu' - \nu') \leq \mu'$. On peut donc écrire

$$\mu + R(\mu' - \nu') + (\mu' - R(\mu' - \nu')) = \sigma \ .$$

Soit $$\mu + R(\nu - \mu) + (\mu' - R(\mu' - \nu')) = \sigma$$

et finalement $\mu + R(\nu - \mu) \leq \sigma$.

Démonstration de la proposition 10.

Considérons les suites (μ_n) et (ν_n) définies de la manière suivante $\mu_1 = \mu$, $\nu_1 = \nu$ et

$$\begin{cases} \mu_{n+1} = \mu_n + R(\nu_n - \mu_n) \\ \nu_{n+1} = \nu_n + R(\mu_n - \nu_n) \; . \end{cases}$$

D'après le lemme précédent, on a $\mu_n \prec \nu_{n+1}$, $\nu_n \prec \mu_{n+1}$ et pour toute $\sigma \in C^*$, $\sigma \geq \mu$ et ν , on a encore, $\sigma \geq \mu_n$ et ν_n . Posons alors pour tout $v \in C$,

$$\langle \theta, v \rangle = \lim \langle \mu_n , v \rangle = \lim \langle \nu_n , v \rangle ,$$

on a $\theta \in C^*$ et par passage à la limite, on a encore $\theta \geq \mu$, $\theta \geq \nu$ et $\theta \leq \sigma$. Par suite $\theta = \sup(\mu,\nu)$, pour l'ordre $\leq$, ordre spécifique de C^* .

PROPOSITION 12.- Soit $(C ; \leq)$ un cône de potentiels, tel que $u \in C$ soit une unité pour l'ordre $\leq$. Dans ces conditions, pour toute famille finie $(v_i) \in C - C$, l'ensemble $M = \{v + \varepsilon u \; ; \; v \in C \; , \; \varepsilon > 0 \; , \; v \geq v_i$ pour tout $i\}$ est filtrant décroissant. Si de plus C est quasi-complet, alors $(C - C)$ possède la propriété de décomposition de Riesz.

Démonstration.

D'après la représentation du § II, Préliminaires, en posant $K = \{\mu \in C^* \; ; \; \langle \mu,u \rangle = 1\}$, C s'identifie à un sous-espace de $\underline{A}^+(K)$, tel que $(C - C)$ soit dense dans $\underline{A}(K)$, et K étant un simplexe, $\underline{A}(K)$ possède la propriété de décomposition de Riesz, par suite, pour toute famille finie $(v_i) \subset (C - C)$

$$N = \{ v + \varepsilon u \; ; \; \varepsilon > 0 \; , \; v \in (C - C) \; ; \; v \geq v_i \;\; \forall \, i\}$$

est filtrant décroissant. Posons $N' = \{Rw \; ; \; w \in N\}$. L'ensemble N' est filtrant décroissant, $N' + R_*^+ u \subset M$ et pour tout $w \in M$, il existe $v \in (N' + R_*^+ u)$ tel que $v \leq w$. Si C est quasi-complet, soient (v_i) et (u_j) deux familles finies d'éléments de $C - C$, telles que $v_i \leq u_j$ pour tous i , j . Il existe un élément $w \in C$ tel que $w + v_i \in C$; $w + u_j \in C$ pour tous i , j . D'autre part, il existe $t \in \overline{C - C}$ tel que $w + v_i \leq t \leq w + u_j$ pour tous i , j ; et comme C est quasi-complet, $Rt \in C$ et $Rt \leq w + u_j$ pour tout j ; finalement $(Rt - w) \in C - C$ et

$v_i \leq Rt - w \leq u_j$ pour tous i, j .

THÉORÈME 13.- Soit $(C, \leq)$ un cône de potentiels. Le cône dual $(C^*, \prec)$ est inf-stable pour l'ordre $\prec$.

Démonstration.

On vérifie aisément que $(C^*, \prec)$ est quasi-complet et par conséquent, vérifie la propriété de décomposition de Riesz. Soit (ν_i) une famille d'éléments de C^* et posons $M = \{\mu \in C^* - C^* ; \mu \prec \nu_i$ pour tout $i\}$. Pour tout $\sigma \in M$, on a $R\sigma \in M$, il suffit donc de montrer que $M \cap C^*$ est filtrant croissant. Cela résultera du lemme :

LEMME 14.- Soient $\mu, \sigma \in C^*$, il existe $\theta \in C^*$ tel que

a) $\theta \succ \mu$ et $\theta \succ \sigma$;

b) pour tout $\alpha \in C^*$ tel que $\alpha \succ \mu$ et $\alpha \succ \sigma$, on a $\alpha \succ \theta$.

Démonstration.

L'ensemble $N = \{\alpha \in C^* ; \alpha \succ \mu$ et $\alpha \succ \sigma\}$ est filtrant décroissant. En effet, soient $\alpha, \beta \in N$, il existe alors $\nu \in C^* - C^*$ telle que μ et $\sigma \prec \nu \prec \alpha$ et β ; on a alors $R\nu \in C^*$ et $R\nu \in N$. L'élément $\theta = \inf_{\prec}\{\alpha ; \alpha \in N\}$ répond à la question.

Interprétation des résultats précédents sur un exemple.

Soient X un espace compact, $(V_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ une famille résolvante de noyaux ≥ 0 sur $\underline{C}(X)$ telle que

a) $V_o = V$ envoie $\underline{C}(X)$ dans $\underline{C}(X)$;

b) $V(\underline{C}(X))$ est dense dans $\underline{C}(X)$.

On dit qu'une fonction numérique mesurable f est excessive si $\lambda V_\lambda f \leq f$ pour tout λ et $f = \sup_\lambda \lambda V_\lambda f$. On a montré dans [11] que le cône $(C, \leq)$ des fonctions excessives continues est un cône de potentiels, où $\leq$ est la relation d'ordre usuelle.

Dans cette situation, le cône C^* s'identifie à $\underline{M}^+(X)$ et la relation $(\mu \prec \nu)$, pour μ, $\nu \in \underline{M}^+(X)$ équivaut à $(\mu V \leq \nu V)$. Les mesures de la forme μV, où $\mu \in \underline{M}^+(X)$ sont dites purement excessives. Le théorème précédent dit simplement que si σ et θ sont purement excessives, alors $\inf_{\leq}(\sigma,\theta)$ est encore purement excessive, en vertu de l'identité, non immédiate, $\inf_{\leq}(\mu V, \nu V) = (\inf_{\prec}(\mu,\nu))V$ vérifiée pour μ, $\nu \in \underline{M}^+(X)$. D'ailleurs, dans notre exemple, l'application $\nu \longmapsto \nu V$ est une bijection de $\underline{M}^+(X)$ sur l'ensemble des mesures excessives (on dit que $\mu \in \underline{M}^+(X)$ est excessive si $\mu\lambda V_\lambda \leq \mu$, $\forall\ \lambda > 0$ et si $\mu = \sup_\lambda \mu\lambda V_\lambda$).

<u>2ème partie</u>. <u>Cônes de potentiels et familles résolvantes associées</u>.

Dans cette partie, on va donner les étapes de la démonstration du résultat suivant (cf. aussi [11]) :

THÉORÈME 15.- Soient X un espace compact métrisable, $C \subset \underline{C}^+(X)$ un cône convexe <u>fermé</u>, linéairement séparant, $\leq$ la relation d'ordre usuelle. Si $(C, \leq)$ est un cône de potentiels, il existe une famille résolvante $(V_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ de noyaux ≥ 0 de $\underline{C}(X)$ dans $\underline{C}(X)$ telle que

a) $V_o\ (\underline{C}^+(X)) \subset C$;

b) C est identique à l'ensemble des fonctions continues qui sont excessives par rapport à la famille résolvante $(V_\lambda)_{\lambda \geq 0}$.

Dans tout ce qui suit on conserve les hypothèses du théorème 15. La méthode utilisée est inspirée de Madame Hervé [3] et de Meyer [4].

LEMME 16.- Pour toute fonction numérique φ s. c. s. sur X telle que $\varphi^+ \not\equiv 0$, il existe un plus petit fermé non vide F tel que ($v \in C$ et $v \geq \varphi$ sur F) $\Rightarrow$ ($v \geq \varphi$ sur X). On note cet ensemble $\operatorname{Supp} \varphi$.

LEMME 17.- Si pour φ s. c. s., on pose $R\varphi = \inf\{w \in C \; ; \; w \geq \varphi\}$, alors

$$\operatorname{Supp} \varphi \subset \overline{\{\varphi = R\varphi\}} .$$

DÉFINITION 18.- On dit qu'un noyau V de $\underline{C}(X)$ dans $\underline{C}(X)$ <u>est subordonné à</u> C si

a) $V(\underline{C}^+(X)) \subset C$;

b) pour toute $f \in \underline{C}^+(X)$, $\operatorname{Supp} Vf \subset Sf = \overline{\{f > 0\}}$.

Un noyau V subordonné à C vérifie le principe de domination et comme il existe $v_o \in C$, $v_o \geq 1$, car C est linéairement séparant, il existe une famille résolvante unique $(V_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ de noyaux ≥ 0 de $\underline{C}(X)$ dans $\underline{C}(X)$ telle que $V = V_o$ et toutes les fonctions appartenant à C sont surmédianes par rapport à la résolvante (V_λ) , c'est-à-dire que $\lambda V_\lambda f \leq f$ pour tout $f \in C$.

Le théorème 15 sera une conséquence directe du résultat suivant :

THÉORÈME 19.- Pour tout $v \in C$, il existe un noyau V subordonné à C et un seul tel que $V1 = v$.

<u>Indications pour la démonstration du théorème 19</u>.

Supposons qu'il existe un noyau V subordonné à C tel que $V1 = v$ et soit ω un ouvert de X . On aura

$$V1_\omega = \sup\{V\varphi \; ; \; \varphi \in \underline{C}^+(X) \; , \; 0 \leq \varphi \leq 1 \; , \; S\varphi \subset \omega\} .$$

Inversement, si l'on connait les fonctions $V1_\omega$, on aura, pour toute $\varphi \in \underline{C}^+(X)$, $x \in X$,

$$V\varphi(x) = \int_0^{\sup \varphi} V1_{[\varphi > \alpha]}(x) \, d\alpha$$

où $d\alpha$ est la mesure de Lebesgue. On va donc essayer de retrouver la fonction $V1_\omega$.

Posons maintenant $D(v,\omega) = \{(s,t) \in C \times C \; ; \; s + t = v \; , \; \operatorname{Supp} s \subset \omega\}$.

LEMME 20.- Pour tout $v \in C$ et tout ω ouvert, l'ensemble $U(v,\omega) = \{s \in C \; ; \; (s , v - s) \in D(v,\omega)\}$ est filtrant croissant pour l'ordre $\leq$.

DÉFINITION 21.- Pour $v \in C$, on appelle restriction spécifique de v à ω la fonction $v_\omega = \sup\{s \; ; \; s \in U(v,\omega)\}$. Pour tout compact $K \subset X$, on pose $v_K = v - v_{\complement K}$.

On établit successivement les propriétés suivantes :

a) $\operatorname{Supp} v_K \subset K$, (v_K est s. c. s.) ;

b) pour tout ouvert $\omega \subset X$, $v_\omega = \sup\{v_K \; ; \; K \subset \omega\}$;

c) pour tous ouverts ω_1 , ω_2 , on a

$$v_{\omega_1 \cap \omega_2} + v_{\omega_1 \cup \omega_2} = v_{\omega_1} + v_{\omega_2} .$$

Pour toute $\varphi \in \underline{C}^+(X)$, on peut alors poser

$$V\varphi = \int_0^{\sup \varphi} v_{[\varphi > \alpha]} \, d\alpha = \int_0^{\sup \varphi} v_{[\varphi \geq \alpha]} \, d\alpha ,$$

(intégrales au sens de Riemann).

La première intégrale montre que $V\varphi$ est s. c. i., la seconde montre que $V\varphi$ est s. c. s., finalement $V\varphi$ est continue et il est aisé de vérifier que $V\varphi$ appartient à l'adhérence faible de C dans $\underline{C}(X)$, et comme C est fermé, $V\varphi \in C$. D'après les conditions précédentes b) et c), V est un noyau ≥ 0 de $\underline{C}(X)$ dans $\underline{C}(X)$ tel que $V1_\omega = v_\omega$. (Cf. Meyer [4].)

Pour montrer que V est subordonné à C , on utilise le

LEMME 22.- Soient u , $v \in C$; on a $\operatorname{Supp}(u + v) = \operatorname{Supp} u \cup \operatorname{Supp} v$.

L'unicité d'un noyau subordonné à C tel que $V1 = v$ résulte de l'identité $V1_\omega = v_\omega$.

Revenons au théorème 15. L'espace compact X étant métrisable, il existe une suite (v_n) dense dans C ; soit V_n le noyau associé à v_n par le théorème 19 ; pour une suite $(\alpha_n) \subset (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})$, $\Sigma\, \alpha_n\, v_n = v \in C$ et $V = \Sigma\, \alpha_n\, V_n$ est le noyau associé à v .

Le noyau V est l'opérateur terminal d'une famille résolvante de noyaux $(V_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ qui satisfait aux conditions du théorème 15.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. CHOQUET et J. DENY - Modèles finis en théorie du potentiel, Journal d'Analyse Mathématique, (Jerusalem), 1956-57.

[2] W. HANSEN - Konstruktion von Halbgruppen und Markovschen Prozessen, Inventiones Math., 3 (1967).

[3] R.-M. HERVÉ - Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Annales Inst. Fourier, 12 (1962).

[4] P.-A. MEYER - Probabilité et potentiels, Hermann, Paris (1966).

[5] P.-A. MEYER - Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory, Annales Inst. Fourier, 13/2 (1963).

[6] G. MOKOBODZKI et D. SIBONY - Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences Paris, t. 264 : 4 janvier 1967, 30 janvier 1967, 13 mars 1967.
t. 265 : 3 juillet 1967, 17 juillet 1967.
t. 266 : 22 janvier 1968, 1er avril 1968.

[7] G. MOKOBODZKI et D. SIBONY - Cônes adaptés de fonctions continues et théorie du du potentiel, Séminaire Choquet, 1966-67, n° 5, I.H.P., Paris.

[8] G. MOKOBODZKI et D. SIBONY - Cônes de fonctions continues et théorie du potentiel, Séminaire Brelot-Choquet-Deny, 1966-67, n° 8 et n° 9, I.H.P., Paris.

[9] G. MOKOBODZKI et D. SIBONY - Familles additives de cônes convexes et noyaux subordonnés, Annales Inst. Fourier, 18/2 (1969).

[10] G. MOKOBODZKI - Densité relative de deux potentiels comparables, Séminaire de Probabilité, I.R.M.A., Strasbourg, 1968-69.

[11] G. MOKOBODZKI - Cônes de potentiels et noyaux subordonnés, [Centro Internazionale matematico estivo (C.I.M.E.), Stresa 1969].