

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

ADRIEN DOUADY

## Espaces analytiques sous-algébriques

*Séminaire N. Bourbaki*, 1968, exp. n° 344, p. 529-542

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1966-1968\\_\\_10\\_\\_529\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__529_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

ESPACES ANALYTIQUES SOUS-ALGÈBRIQUES  
(d'après B.G. MOÏŠEZON)

par Adrien DOUADY

Tous les espaces analytiques sont sur le corps des complexes. Le mot "variété" n'ayant pas le même sens en géométries analytique et algébrique, nous dirons "espace analytique lisse".

Soient  $X$  un espace analytique et  $Y$  un sous-espace analytique de  $X$ , on dira que  $Y$  est une hypersurface dans  $X$  si, pour tout  $x \in X$ , il existe  $h \in \mathcal{O}_{X,x}$  non diviseur de 0 tel que le germe de  $Y$  en  $x$  soit  $h^{-1}(0)$ .

1. Eclatements.

Soient  $X$  un espace analytique et  $Z$  un sous-espace analytique de  $X$ . On dit qu'un espace analytique  $\tilde{X}$  au-dessus de  $X$  est obtenu en éclatant  $X$  sui-  
vant  $Z$  (ou à partir de  $X$  par éclatement suivant  $Z$ ) s'il satisfait aux condi-  
tions suivantes :

(a) l'image réciproque de  $Z$  dans  $\tilde{X}$  est une hypersurface ;

(b) pour tout espace analytique  $X'$  au-dessus de  $X$  vérifiant (a), il existe un morphisme et un seul de  $X'$  dans  $\tilde{X}$  au-dessus de  $X$ .

PROPOSITION 1.- Etant donné un espace analytique  $X$  et un sous-espace analytique  
 $Z$  de  $X$ , il existe un espace obtenu en éclatant  $X$  suis-  
vant  $Z$  et un seul à  
isomorphisme unique près.

Démonstration. La condition (b) signifie que  $\tilde{X}$  est objet final dans la caté-  
gorie des espaces analytiques au-dessus de  $X$  vérifiant (a), d'où l'unicité. Démon-

Supposons d'abord que  $X = \mathbb{C}^P$  et  $Z = \{0\}$ . Soient  $P$  l'espace projectif déduit de  $X$  et  $L$  le sous-fibré canonique de rang 1 du fibré trivial  $X_P = X \times P$ . Soit  $\tilde{X}$  l'espace  $L$ , muni de la seconde projection  $L \rightarrow X$ . L'image réciproque de  $0$  est la section nulle de  $L$ , donc est une hypersurface dans  $L$  et on a (a). Soient  $X'$  un espace analytique et  $f : X' \rightarrow X$  un morphisme tel que  $Z' = f^{-1}(0)$  soit une hypersurface. Soient  $\mathcal{U} = (U_j)$  un recouvrement de  $X'$  et pour tout  $j$ ,  $h_j \in \mathcal{O}(U_j)$  non diviseur de  $0$  et tel que  $Z' \cap U_j = h_j^{-1}(0)$ . Notons  $\xi_1, \dots, \xi_p$  les fonctions coordonnées dans  $X$ , et définissons  $y_{j1}, \dots, y_{jp}$  dans  $\mathcal{O}(U_j)$  par  $h_j \cdot y_{ji} = \xi_i \circ f$ . Comme les  $\xi_i$  engendrent l'idéal définissant  $Z'$ , les fonctions  $y_{j1}, \dots, y_{jp}$  ne s'annulent pas simultanément sur  $U_j$ , donc définissent un morphisme  $s_j$  de  $X'$  dans  $P$ , et  $f_j = (s_j, f)$  est un morphisme de  $U_j$  dans  $\tilde{X}$  au-dessus de  $X$ . C'est le seul, car  $h_j$  n'est pas diviseur de  $0$ , et par suite les  $f_j$  se recollent en un morphisme  $f$  de  $X'$  dans  $\tilde{X}$ , d'où (b).

Supposons maintenant que  $Z = \varphi^{-1}(0)$ , où  $\varphi$  est un morphisme de  $X$  dans  $\mathbb{C}^P$ , soient  $L$  l'espace obtenu en éclatant  $\mathbb{C}^P$  suivant  $\{0\}$ ,  $X_1$  l'espace au-dessus de  $X$  obtenu à partir de  $L$  par changement de base de  $\mathbb{C}^P$  à  $X$  suivant  $\varphi$  et  $Z_1$  l'image réciproque de  $Z$  dans  $X_1$ . L'espace  $X_1$  vérifie (b), et  $Z_1$  est localement de la forme  $h^{-1}(0)$ . Parmi les sous-espaces de  $X_1$  sur lesquels la trace de  $Z_1$  est une hypersurface, il en est un plus grand  $\tilde{X}$  : si  $U$  est un ouvert de  $X_1$  tel que  $Z_1 \cap U = h^{-1}(0)$  où  $h \in \mathcal{O}(U)$ , l'espace  $\tilde{X} \cap U$  est le sous-espace de  $U$  défini par l'idéal  $\bigcup_k \mathcal{J}_k$ , où  $\mathcal{J}_k$  est le noyau de la multiplication par  $h^k : \mathcal{O}_U \rightarrow \mathcal{O}_U$ . Cet espace vérifie (a) et (b).

Dans le cas général, il existe un recouvrement  $(U_i)$  de  $X$  tel que  $U_i \cap Z$  soit de la forme  $\varphi_i^{-1}(0)$ , où  $\varphi_i$  est un morphisme de  $U_i$  dans  $\mathbb{C}^{P_i}$ , et on obtient  $X$  en recollant les espaces obtenus en éclatant les  $U_i$  suivant  $U_i \cap Z$ , ce qui achève la démonstration.

Si  $\tilde{X}$  est obtenu en éclatant  $X$  suivant  $Z$ , on note  $\pi_Z$  la projection de  $\tilde{X}$  sur  $X$ .

Exemples et sorites. Si  $Z$  est une hypersurface, on a  $\tilde{X} = X$ . Si  $Z = X$ , on a  $\tilde{X} = \emptyset$ . L'application  $\pi_Z$  est propre ; en particulier si  $X$  est compact, il en est de même de  $\tilde{X}$ . Si  $X$  est projectif, il en est de même de  $\tilde{X}$ . Si  $X$  et  $Z$  sont lisses,  $\tilde{X}$  est lisse. Si  $U$  est un ouvert de  $X$ , l'espace  $\pi_Z^{-1}(U)$  est obtenu en éclatant  $U$  suivant  $Z \cap U$ . Si  $Y$  est une hypersurface dans  $X$ , l'espace  $\pi_Z^{-1}(Y)$  est une hypersurface dans  $\tilde{X}$ . Soient  $f : X' \rightarrow X$  un morphisme,  $Z' = f^{-1}(Z)$  et  $\tilde{X}'$  l'espace obtenu en éclatant  $X'$  suivant  $Z'$  ; il existe un morphisme  $\tilde{f} : \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}$  au-dessus de  $f$  et un seul.

Image stricte et image faible. Soient  $X$  un espace analytique,  $Y$  et  $Z$  deux sous-espaces analytiques de  $X$  et  $\tilde{X}$  l'espace obtenu en éclatant  $X$  suivant  $Z$ . L'espace  $\tilde{Y}$  obtenu en éclatant  $Y$  suivant  $Y \cap Z$  s'identifie à un sous-espace de  $\tilde{X}$ , appelé l'image stricte de  $Y$  dans  $\tilde{X}$ .

Si  $A$  est un espace analytique,  $B$  un sous-espace analytique de  $A$  et  $C$  une hypersurface de  $A$  contenue dans  $B$ , on définit l'espace  $B'$  obtenu en ôtant une fois  $C$  à  $B$  de la façon suivante : pour tout ouvert  $U$  de  $A$  tel que  $C = h^{-1}(0)$ ,  $h \in \mathcal{O}(U)$ , l'idéal définissant  $B' \cap U$  est formé des  $h^{-1}f$ , où  $f$  appartient à l'idéal définissant  $B \cap U$ . Si  $B'$  contient  $C$ , on peut recommencer, et l'espace  $B''$  que l'on obtient est dit obtenu en ôtant deux fois  $C$  à  $B$ , et ainsi de suite.

Supposons  $X$  et  $Z$  lisses et  $Z$  connexe. On appelle image faible de  $Y$  dans  $X$  l'espace  $\pi_Z^*(Y)$  obtenu en ôtant autant de fois qu'on le peut l'hypersur-

face  $\pi_Z^{-1}(Z)$  à  $\pi_Z^{-1}(Y)$ . On a  $\tilde{Y} \subset \pi_Z^*(Y) \subset \pi_Z^{-1}(Y)$ . Si  $Y \not\subset Z$ , on a  $\pi_Z^*(Y) = \pi_Z^{-1}(Y)$ .

Soient  $X_1$  l'espace obtenu en éclatant  $X$  suivant  $Y$  et  $\tilde{X}_1$  l'espace obtenu en éclatant  $\tilde{X}$  suivant  $\pi_Z^*(Y)$ . Il existe un morphisme et un seul de  $\tilde{X}_1$  dans  $X_1$  qui rende commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \rightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_1 & \rightarrow & X \end{array} .$$

## 2. Applications méromorphes.

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces analytiques compacts réduits et  $\hat{F}$  un sous-ensemble analytique de  $X \times Y$ . On dit, par abus de langage, que  $F$  est une application méromorphe de  $X$  dans  $Y$  s'il existe des sous-ensembles analytiques d'intérieur vide  $F_1$  de  $F$  et  $X_1$  de  $X$  tels que la première projection induise un isomorphisme de  $F - F_1$  sur  $X - X_1$ . L'ensemble  $S(F)$  des  $x \in X$  tels que  $\text{pr}_1 : F \rightarrow X$  ne soit pas un isomorphisme au voisinage de  $\text{pr}_1^{-1}(x)$  est un sous-ensemble analytique de  $X$ , appelé l'ensemble d'indéfinition de  $F$  (c'est le plus petit  $X_1$  possible).

La première projection :  $F \rightarrow X$  est surjective. L'image de  $F$  par la seconde projection est un sous-ensemble analytique de  $Y$  (d'après un théorème de Remmert) que l'on note  $F(X)$ . Plus généralement, pour tout sous-ensemble analytique  $X'$  de  $X$ , on note  $F(X')$  le sous-ensemble analytique  $\text{pr}_2(F \cap \text{pr}_1^{-1}(X'))$  de  $Y$ .

Soient  $F$  une application méromorphe de  $X$  dans  $Y$  et  $G$  une application méromorphe de  $Y$  dans  $Z$  telles que, pour toute composante irréductible  $X_i$

de  $X$ , l'ensemble  $F(X_1)$  ne soit pas contenu dans l'ensemble d'indéfinition de  $G$ . On définit l'application méromorphe composée  $H = G \circ F$  de la façon suivante : en notant  $H'$  l'image de  $F \times_Y G$  par la projection de  $X \times Y \times Z$  sur  $X \times Z$  (image qui est un ensemble analytique d'après Remmert),  $H$  est la réunion des composantes irréductibles de  $H'$  dont la projection sur  $X$  n'est pas d'intérieur vide.

On appelle équivalence méromorphe entre  $X$  et  $Y$  une application méromorphe  $F$  de  $X$  dans  $Y$  telle que l'image  $F^{-1}$  de  $F$  par la symétrie  $X \times Y \rightarrow Y \times X$  soit une application méromorphe de  $Y$  dans  $X$ .

PROPOSITION 2.- Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces analytiques compacts réduits et  $F$  une application méromorphe de  $X$  dans  $Y$ . Si  $X$  est normal, l'ensemble d'indéfinition de  $F$  est de codimension  $\geq 2$  dans  $X$ .

Démonstration. On peut supposer  $X$  irréductible, soit  $n$  sa dimension.

Soit  $F_1$  l'ensemble des points de  $F$  dont la fibre pour la projection de  $F$  sur  $X$  est de dimension  $\geq 1$ , et posons  $X_1 = \text{pr}_1(F_1)$ . L'ensemble  $F_1$  est un sous-ensemble analytique de  $F$  et on a  $\dim X_1 + 1 \leq \dim F_1 \leq n-1$ , d'où  $\text{codim } X_1 \geq 2$ . La projection  $\text{pr}_1$  induit un morphisme fini  $p$  de  $F - F_1$  sur  $X - X_1$ , et  $p$  est ouvert car ces deux espaces ont même dimension. Le nombre ensembliste de points des fibres de  $p$  est semi-continu inférieurement ; comme il vaut 1 sur un ouvert dense et que  $p$  est surjectif, il vaut constamment 1, autrement dit  $p$  est bijectif. Comme  $X$  est normal et  $F$  réduit,  $p$  est un isomorphisme et  $X_1$  est l'ensemble d'indéfinition de  $F$ , d'où la proposition.

PROPOSITION 3.- Soit  $X$  un espace analytique irréductible. Une application méromorphe de  $X$  dans  $P^1_{\mathbb{C}}$  n'est autre chose qu'une fonction méromorphe sur  $X$  au sens usuel, ou l'application constante  $\infty$ .

Démonstration. On peut supposer  $X$  normal. Soit  $F$  une application méromorphe de  $X$  dans  $P^1\mathbb{C}$ , et notons  $X_1$  l'ensemble des  $x \in X$  tels que  $(x, \infty) \in F$ . L'ensemble  $X_1$  contient l'ensemble d'indétermination de  $F$ . Soient  $x_1 \in X_1$ ,  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^n$  une carte de  $X$  au voisinage de  $x_1$ ,  $U'$  un voisinage de  $x_1$  relativement compact dans  $U$ ,  $d$  la distance sur  $U$  obtenue en transportant par  $\varphi$  la distance euclidienne de  $\mathbb{C}^n$ , et  $g : U \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction analytique nulle sur  $X_1 \cap U$ . D'après un résultat de Lojasiewicz, les sous-ensembles analytiques  $F$  et  $X \times \{\infty\}$  de  $X \times P^1\mathbb{C}$  sont régulièrement situés ; en d'autres termes il existe des constantes  $C$  et  $k$  telles que, pour tout  $(x, t) \in F$  tel que  $x \in U'$ , on ait  $\frac{1}{t} \cong C \cdot d(x, X_1)^k$ . La fonction  $g$ , étant analytique, est lipschitzienne, et il existe une constante  $C'$  telle que, pour tout  $x \in U' - X_1$ , on ait  $\frac{1}{F(x)} \cong C' \cdot g(x)^k$ . Soit  $k'$  un entier  $> k$  et définissons la fonction  $f : U' \rightarrow \mathbb{C}$  par  $f(x) = g(x)^{k'} F(x)$  pour  $x \in U' - X_1$  et  $f(x) = 0$  pour  $x \in X_1$ . La fonction  $f$  est continue sur  $U'$  et analytique sur  $U' - X_1$ , donc analytique sur  $U'$ , et on a  $F = \frac{f}{g^{k'}}$  sur  $U'$ , ce qui démontre la proposition.

PROPOSITION 4 (Hironaka).- Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces analytiques compacts réduits et  $F$  une application méromorphe de  $X$  dans  $Y$ . Si  $X$  est une variété projective (ou seulement un espace sous-algébrique, cf. n°5), il existe un espace  $X'$  au-dessus de  $X$ , obtenu par une suite finie d'éclatements suivant des sous-espaces d'intérieur vide, tel que  $F \circ \pi : X' \rightarrow Y$  soit analytique, où  $\pi : X' \rightarrow X$  est la projection.

Pour la démonstration, voir [1].

3. Énoncé des résultats.

Soit  $X$  un espace analytique compact réduit. Considérons les propriétés suivantes :

(i) il existe un espace  $X'$  obtenu à partir de  $X$  par une suite finie d'éclatements suivant des variétés projectives lisses, d'intérieur vide, tel que  $X'$  soit une variété projective (qu'on peut supposer lisse d'après Hironaka) ;

(ii) il existe une variété projective  $X'$  et une application analytique de  $X'$  sur  $X$  qui soit une équivalence méromorphe ;

(iii) l'espace  $X$  est méromorphiquement équivalent à une variété projective ;

(iv) pour chaque composante irréductible  $X_i$  de  $X$ , le degré de transcendance sur  $\mathbb{C}$  du corps des fonctions méromorphes sur  $X_i$  est égal à la dimension de  $X_i$  .

Il est immédiat que (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (iv).

PROPOSITION 5 (Mořsezon).- On a (iv)  $\Rightarrow$  (iii).

PROPOSITION 6.- On a (iii)  $\Rightarrow$  (ii).

THÉOREME 1 (Mořsezon).- Si  $X$  peut se plonger dans un espace lisse et vérifie (ii), il vérifie (i).

D'autres résultats seront énoncés au n° 8.

4. Démonstration des propositions 5 et 6.

Démonstration de la proposition 5.- On peut supposer  $X$  irréductible. Soient  $f_1, \dots, f_n$  des fonctions méromorphes algébriquement indépendantes sur  $X$ , où  $n$  est la dimension de  $X$ . Ces fonctions définissent une application méromorphe de  $X$  dans  $(\mathbb{P}^1\mathbb{C})^n$  d'où une application méromorphe  $F$  de  $X$  dans  $\mathbb{P}^n\mathbb{C}$  (méromorphiquement équivalent à  $(\mathbb{P}^1\mathbb{C})^n$ ). L'espace  $X$  est méromorphiquement équivalent au



graphe  $F$ . Notons  $f$  la projection de  $F$  sur  $P^n\mathbb{C}$ . D'après un théorème de Cartan, on peut mettre sur l'ensemble  $X'$  quotient de  $F$  par la relation d'équivalence ayant pour classes les composantes connexes des fibres de  $f$  une structure d'espace analytique, quotient de celle de  $F$ . L'application de  $X'$  dans  $P^n\mathbb{C}$  déduite de  $f$  est un morphisme fini ; par suite  $X'$  est une variété projective.

D'autre part  $f$  est surjective : en effet  $f(F) = F(X)$  est un sous-ensemble analytique, donc algébrique d'après le théorème de Chow, de  $P^n\mathbb{C}$  ; si c'était un sous-ensemble strict, on aurait une relation algébrique entre les  $f_1$ . Comme  $\dim F = \dim X = n = \dim P^n\mathbb{C}$ , il existe un sous-ensemble analytique strict  $F_1$  de  $F$  tel que la restriction de  $f$  à  $F - F_1$  soit localement finie. En notant  $X'_1$  l'image de  $F_1$  dans  $X'$ , l'application canonique de  $F$  sur  $X'$  induit un isomorphisme de  $F - F_1$  sur  $X' - X'_1$ , donc est une équivalence méromorphe entre  $F$  et  $X'$ , ce qui démontre (iii).

Démonstration de la proposition 6.— Soient  $X'$  une variété projective et  $F : X' \rightarrow X$  une équivalence méromorphe. D'après la proposition 4, il existe un espace  $X''$  obtenu à partir de  $X'$  par une suite finie d'éclatements, tel que  $F \circ \pi : X'' \rightarrow X$  soit analytique,  $\pi$  désignant la projection de  $X''$  sur  $X'$ . L'espace  $X''$  est une variété projective et l'application  $F \circ \pi$  est une équivalence méromorphe, d'où la proposition.

### 5. Espaces analytiques sous-algébriques.

DÉFINITION.— On dit qu'un espace analytique compact réduit est sous-algébrique s'il vérifie les conditions équivalentes (ii), (iii) et (iv).

PROPOSITION 7.- Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces analytiques compacts réduits et  $F$  une application méromorphe de  $X$  dans  $Y$  telle que  $F(X) = Y$ . Si  $X$  est sous-algébrique, il en est de même de  $Y$ .

Démonstration. On peut supposer  $X$  et  $Y$  irréductibles et quitte à remplacer  $X$  par  $F$ , on peut supposer que  $F$  est une application analytique  $f$ . Soient  $X'$  une variété projective et  $g : X' \rightarrow X$  un morphisme surjectif. Il existe une sous-variété irréductible  $X'_1$  de  $X'$  telle que  $\dim X'_1 = \dim Y$  et que la restriction  $g_1$  de  $f \circ g$  à  $X'_1$  soit un morphisme surjectif de  $X'_1$  sur  $Y$ . Soit  $r$  le degré de  $g_1$ . L'espace  $X'_1$  est une variété projective, son produit symétrique  $\text{Sym}^r X'_1$  est encore une variété projective, et le produit fibré symétrique  $\text{Sym}_Y^r X'_1$ , sous-espace analytique du précédent, est toujours une variété projective. Soit  $Y'$  la composante irréductible de  $\text{Sym}_Y^r X'_1$  qui contient les points de la forme  $\{x_1, \dots, x_r\}$ , où les  $x_i$  sont  $r$  points distincts d'une fibre de  $g_1$ . L'application  $g_1$  induit une application  $h$  de  $Y'$  dans  $Y$ , d'où etc.

COROLLAIRE. Tout sous-espace analytique fermé réduit d'un espace sous-algébrique est sous-algébrique.

Démonstration. Soient  $X$  un espace sous-algébrique et  $Y$  un sous-espace analytique fermé réduit de  $X$ . Soient  $X'$  une variété projective et  $f : X' \rightarrow X$  un morphisme surjectif. Posons  $Y' = f^{-1}(Y)$ . L'espace  $Y'$  est une variété projective, donc est sous-algébrique, et  $f|_{Y'} : Y' \rightarrow Y$  est surjective, d'où le corollaire.

6. Plan de la démonstration du théorème 1.

Considérons les assertions suivantes :

$(A_{N,n})$ ,  $n < N$  : Soit  $X$  un espace analytique lisse de dimension  $N$ . Tout sous-espace sous-algébrique de  $X$  de dimension  $n$  vérifie (i).

$(A'_N)$  : Soient  $X$  un espace analytique lisse de dimension  $N$  et  $Y$  un sous-espace analytique de  $X$  de dimension  $< N$ , dont le réduit associé soit sous-algébrique. Il existe un espace  $X'$ , obtenu à partir de  $X$  par une suite finie d'éclatements suivant des variétés projectives lisses, tel que l'image faible itérée de  $Y$  dans  $X'$  soit vide\*.

$(B_N)$  : Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces analytiques compacts,  $X$  sous-algébrique lisse, et soit  $F$  une application méromorphe de  $X$  dans  $Y$ . Il existe un espace  $X'$ , obtenu à partir de  $X$  par une suite finie d'éclatements suivant des variétés projectives lisses, et tel que  $F \circ \pi$  soit une application analytique de  $X'$  dans  $Y$ , où  $\pi$  désigne la projection de  $X'$  sur  $X$ .

$(C_N)$  : Tout espace sous-algébrique lisse de dimension  $N$  vérifie (i).

Le théorème 1 sera démontré si l'on établit les lemmes suivants :

LEMME 1.-  $(\forall N' < N, (C_{N'}) \text{ et } \forall n' < n, (A_{N,n'}) \Rightarrow (A_{N,n})$  .

LEMME 2.-  $(\forall N' < N, (C_{N'}) \text{ et } \forall n < N, (A_{N,n}) \Rightarrow (A'_N)$  .

LEMME 3.-  $(A'_N) \Rightarrow (B_N)$  .

LEMME 4.-  $(B_N) \Rightarrow (C_N)$  .

---

\* ) Il suffit de trouver un  $X'$  tel que l'image faible itérée  $Y''$  de  $Y'$  dans  $X'$  soit une variété projective lisse. En effet, l'image faible  $Y''$  de  $Y'$  dans l'espace  $X''$  obtenu en éclatant  $X'$  suivant  $Y'$  sera alors vide.

La démonstration des lemmes 1 et 2 est faite simultanément (avec des resps) dans [2]. Elle occupe les pages 119 à 135. Le rapporteur ne parvient pas à en extraire quelque chose qui tienne dans ce cadre. Cette démonstration s'appuie sur la proposition suivante :

PROPOSITION 8.- Soient X un espace analytique lisse et Y un sous-espace lisse de X qui soit une variété projective. Il existe un sous-espace lisse Z de Y, d'intérieur vide dans Y, vérifiant les conditions suivantes :

a) en notant X' l'espace obtenu en éclatant X suivant Z et Y' l'image stricte de Y dans X', il existe un espace analytique  $X_0$ , un point  $x_0$  de  $X_0$  et un morphisme f de X' dans  $X_0$  qui induise un isomorphisme de  $X' - Y'$  sur  $X_0 - \{x_0\}$  et qui applique Y' en  $x_0$  ;

b) l'espace X'' obtenu en éclatant X' suivant Y' peut être également obtenu en éclatant  $X_0$  suivant un sous-espace  $Y_0$  dont l'ensemble sous-jacent est réduit à  $x_0$  .

La démonstration de cette proposition occupe dans [2] le § 2 du Chapitre II, c'est-à-dire les pages 100 à 110.

#### 7. Démonstration des lemmes 3 et 4.

Démonstration du lemme 3. D'après la proposition 4 d'Hironaka, il existe une suite finie  $(X_0, \dots, X_k)$ , où  $X_0 = X$  et où  $X_i$  est obtenu en éclatant  $X_{i-1}$  suivant un sous-espace  $Z_i$  d'intérieur vide, telle que  $F \circ \pi_k$  soit analytique,  $\pi_k$  désignant la projection de  $X_k$  sur X. Construisons par récurrence sur i un espace lisse  $X'_i$  et un morphisme  $g_i : X'_i \rightarrow X_i$  de la façon suivante :  $X'_0 = X$

et  $g_0$  est l'identité ;  $X'_i$  est un espace obtenu à partir de  $X'_{i-1}$  par une suite finie d'éclatements suivant des variétés projectives lisses, tel que l'image faible itérée de  $g_{i-1}^{-1}(Z_i)$  dans  $X'_i$  soit vide, et  $g_i$  est l'unique morphisme de  $X'_i$  dans  $X_i$  au-dessus de  $g_{i-1}$ . L'espace  $X'_k$  est obtenu à partir de  $X$  par une suite finie d'éclatements suivant des variétés projectives lisses et

$$F \circ \pi_k^f = F \circ \pi_k \circ g_k$$

est analytique, d'où  $(B_N)$ .

Démonstration du lemme 4. Soit  $X$  un espace sous-algébrique de dimension  $N$ .

Soient  $X'$  une variété projective et  $f : X' \rightarrow X$  un morphisme qui soit une équivalence méromorphe. D'après  $(B_N)$  appliqué à l'application méromorphe  $f^{-1}$ , il existe une suite finie  $(X_0, \dots, X_k)$ , où  $X_0 = X$  et où  $X_i$  est obtenu en éclatant  $X_{i-1}$  suivant une variété projective lisse  $Z_i$ , telle que la projection  $\pi_k : X_k \rightarrow X$  se factorise en  $X_k \xrightarrow{g} X' \xrightarrow{f} X$ . Définissons l'espace  $X'_i$  et les morphismes  $f_i : X'_i \rightarrow X_i$  et  $g_i : X_k \rightarrow X'_i$  par récurrence de la façon suivante :  $X'_0 = X'$ , l'espace  $X'_i$  est obtenu en éclatant  $X'_{i-1}$  suivant  $f_{i-1}^{-1}(Z_i)$  ; on a  $f_0 = f$  et  $g_0 = g$ , et les morphismes  $f_i$  et  $g_i$  rendent commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & & X_k \\
 & \swarrow g_i & \downarrow \\
 X'_i & \xrightarrow{f_i} & X_i \\
 \downarrow & \swarrow f_i & \downarrow \\
 X'_{i-1} & \xrightarrow{f_{i-1}} & X_{i-1} .
 \end{array}$$

L'espace  $X'_k$  est une variété projective, et  $f_k \circ g_k$  est l'identité de  $X_k$ , donc  $X_k$  est une variété projective, d'où  $(C_N)$ .

8. Autres résultats.

DÉFINITION.- Soient  $X$  une variété analytique complexe et  $Y$  un sous-espace analytique de  $X$ , d'intérieur vide. On dit que  $Y$  est exceptionnel de première espèce (terminologie reçue, mais abominable) s'il existe une variété  $X'$ , une sous-variété  $Y'$  de  $X'$  et une application analytique propre  $f$  de  $X$  dans  $X'$  telles que :

- (a)  $f$  induit un isomorphisme de  $X - Y$  sur  $X' - Y'$  ;
- (b) on a  $Y = f^{-1}(Y')$  ;
- (c) pour  $x \in Y$ , l'application  $T_x f : T_x X \rightarrow T_{f(x)} X'$  n'est pas un isomorphisme.

Moïșezon donne la caractérisation suivante des sous-espaces exceptionnels de première espèce :

THÉORÈME 2.- Soient  $X$  une variété analytique,  $Y$  un sous-espace exceptionnel de première espèce de  $X$ ,  $X'$  et  $Y'$  comme dans la définition 1. Si  $Y$  est irréductible,  $X$  s'identifie à la variété obtenue à partir de  $X'$  par éclatement de centre  $Y'$  (en particulier  $Y$  est une hypersurface lisse).

THÉORÈME 3.- Soient  $X$  une variété analytique complexe,  $Y$  une hypersurface lisse compacte dans  $X$ , et  $f : Y \rightarrow Y'$  une submersion propre dont les fibres sont isomorphes à des espaces projectifs complexes de  $\dim \cong 1$ . Notons  $[Y]$  l'élément de  $H^2(X)$  défini par  $Y$ , et supposons que, pour tout point  $q \in Y'$ , l'élément de  $H^2(f^{-1}(q))$  induit par  $[Y]$  soit la "section hyperplane" de l'espace projectif

$f^{-1}(q)$ . On suppose en outre que le degré de transcendance du corps des fonctions méromorphes sur  $Y'$  est égal à  $\dim Y'$ .

Il existe alors une variété  $X'$  admettant  $Y'$  comme sous-variété, et un prolongement de  $f$  en une application analytique de  $X$  dans  $X'$  vérifiant les conditions (a), (b) et (c) de la définition 1. En particulier  $Y$  est une variété exceptionnelle de première espèce dans  $X$ . Enfin Moïșezon donne un exemple d'un espace lisse de dimension 3, sous-algébrique mais non algébrique.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. HIRONAKA - Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, Ann. of Math. 79 (1964), 109-326.
- [2] B.G. MOÏȘEZON - On n-dimensional compact complex varieties with n algebraically independent meromorphic functions, Izv. Akad. Nauk. SSSR, Ser. Mat. 30 (1966), 133-174 ; 345-386 ; 621-656. English translation : Amer. Math. Soc. Transl. (2) 63 (1967), 51-177.