PAUL-ANDRÉ MEYER

Lemme maximal et martingales

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 334, p. 355-366
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__355_0>

Séminaire BOURBAKI
20e année, 1967/68, n° 334 Novembre 1967

LEMME MAXIMAL ET MARTINGALES
(d'après D. L. BURKHOLDER)

par Paul-André MEYER

Considérons un "jeu de hasard équitable", c'est-à-dire une suite $G_0, G_1, \ldots G_n \ldots$ de variables aléatoires intégrables (G_n est le gain du joueur à la n-ième partie) telles que G_n soit, pour tout n , orthogonale à toute fonction de $G_0, \ldots, G_{n-1}$. Cette condition se traduit en disant que les variables aléatoires $X_0 = G_0$, $X_n = G_0 + \ldots + G_n$ qui représentent les fortunes successives du joueur forment une martingale.

Supposons maintenant que le joueur saute certaines parties. Il prend à l'instant $n-1$ la décision de jouer ou de ne pas jouer la n-ième partie. La règle de décision est exprimée par une suite de variables aléatoires $V_0, V_1 \ldots V_n \ldots$ à valeurs dans $\{0,1\}$ ($V_n = 1$ signifie que la n-ième partie est jouée). Pour exprimer que le joueur n'est pas prophète, on impose à V_n d'être une fonction mesurable de $G_0, \ldots, G_{n-1}$ seulement. La nouvelle fortune à l'instant n est

$$Y_n = V_0G_0 + V_1G_1 + \ldots V_nG_n .$$

Il est facile de voir que les Y_n forment une nouvelle martingale. Et maintenant on a les résultats suivants, dûs tous deux à BURKHOLDER :

THÉORÈME.- 1) On a pour tout $c > 0$

$$cP\{\sup_n |Y_n| \geq c\} \leq K. \sup_n E[|X_n|] .$$

2) On a pour tout p fini > 1

$$E[(\sup_n |Y_n|)^p] \leq K_p. \sup_n E[|X_n|^p]$$

où K , K_p sont des constantes "universelles".

THÉORÈME.- Pour tout p fini > 1, les "normes"

$$N_1(X) = \sup_n \| X_n \|_p \ , \quad N_2(X) = \| \sup_n |X_n| \ \|_p \ , \quad N_3(X) = \| (\sum_n G_n^2)^{\frac{1}{2}} \|_p$$

sont "équivalentes" ($N_i \leq K_{ij} N_j$, où K_{ij} est une constante).

Ces résultats sont en fait des conséquences du premier "lemme maximal" et du théorème d'interpolation de MARCINKIEWICZ. Le lemme maximal lui-même peut se démontrer soit par la méthode générale de BURKHOLDER, soit par une méthode élémentaire, toute récente, due à GUNDY. Je donnerai ici la méthode générale, que je trouve plus intéressante pour des non-probabilistes.

I. Le lemme maximal.

1. Le théorème général.

Un processus est une suite $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé. La loi du processus est la mesure sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, image de la loi de probabilité P par X. Deux processus X et Y sont dits équivalents $(X \sim Y)$ s'ils ont même loi (de même deux variables aléatoires réelles ayant même loi sont dites équivalentes). Si $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus, nous posons $X^* = \sup_n |X_n|$; la relation $X \sim Y$ entraîne évidemment $X^* \sim Y^*$.

THÉORÈME 1.- Soit Φ un ensemble de processus. On suppose que, pour toute suite $(X^k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Φ, il existe des processus Y^k définis sur un même espace probabilisé Ω et satisfaisant aux conditions suivantes :

a) Les processus Y^k sont indépendants.

b) Pour tout k, on a $(X^k)^* \sim (Y^k)^*$.

c) Pour toute suite (u_k) de nombres réels tels que $\Sigma |u_k| = 1$, la série de processus $\Sigma u_k Y^k$ converge p.s. vers un processus Y (cela signifie que pour tout n $\Sigma u_k Y_n^k$ converge p.s. vers Y_n) et on a $P\{Y^* < \infty\} \neq 0$.

Il existe alors une constante K telle que l'on ait, pour tout processus $X \in \Phi$ et tout $c > 0$

(1) $$cP\{X^* \geq c\} \leq K .$$

2. Lemmes pour la démonstration du théorème 1.

Les premiers lemmes concernent les fonctions de Rademacher sur $[0,1]$ (fonctions définies par $r_0(t) = 1$, $r_n(t) = (-1)^k$ sur le k-ième intervalle de la n-ième subdivision dyadique de $[0,1]$). Le dernier est un petit exercice d'analyse.

Les fonctions de Rademacher forment un système orthonormé dans $L^2([0,1])$; si (g_n) est une suite de nombres réels telle que $\Sigma g_n^2 < \infty$, la série $\Sigma g_n r_n(t)$ converge donc dans L^2 (en fait p.p.) vers une fonction $g \in L^2$.

LEMME 1.- On a $g \in L^p$ pour tout p fini, et il existe deux constantes $J(p)$ et $J'(p)$ telles que

$$J(p)(\Sigma g_n^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|g\|_p < J'(p)(\Sigma g_n^2)^{\frac{1}{2}} .$$

Ce lemme est classique, et facile. Voir ZYGMUND, Trigonometric Series, Chap. V, th. (8.4), p. 213. Le lemme suivant est dû à MARCINKIEWICZ.

LEMME 2.- Il existe un nombre $\epsilon > 0$, une constante C , tels que l'on ait pour tout ensemble mesurable $A \subset [0,1]$ de mesure $\geq 1 - \epsilon$

$$\Sigma g_n^2 \leq C\int_A g^2(t)dt .$$

DÉMONSTRATION.- On a

$$\Sigma g_n^2 = \int_A g^2(t)dt + \int_{\complement A} g^2(t)dt \leq \int_A g^2(t)dt + (\int g^4(t)dt.|\complement A|)^{\frac{1}{2}}$$

(en notant $|\ |$ la mesure de Lebesgue d'un ensemble). D'après le lemme 1, le premier membre est donc majoré par $\int_A g^2(t)dt + J'(4)^2|\complement A|^{\frac{1}{2}} \Sigma g_n^2$, et il suffit de choisir ϵ tel que $\epsilon^{\frac{1}{2}}J'(4)^2 = a < 1$, et de prendre $C = 1/1 - a$.

Le lemme suivant est dû à STEIN, qui n'en a jamais publié la démonstration.

LEMME 3.- Soit $A \subset [0,1]$ un ensemble mesurable de mesure non nulle. Il existe une constante $C(A)$ et un entier $N(A)$ tels que l'on ait

$$\sum_{N(A)}^{\infty} g_n^2 \leq C(A) \int_A g^2(t)dt .$$

DÉMONSTRATION.- Soit T_{kn} le k-ième intervalle de la n-ième subdivision dyadique ; désignons par g' , r'_p les fonctions induites par g , r_p sur T_{kn} , par A' l'ensemble $A \cap T_{kn}$. Il est facile de voir que r'_p est constante pour $p \leq n$, tandis que les fonctions $(-1)^k r'_{n+i}$ sont, pour $i \geq 0$, les fonctions de Rademacher de l'intervalle T_{kn} . Choisissons maintenant l'intervalle T_{kn} de telle sorte que

$$\frac{|A \cap T_{kn}|}{|T_{kn}|} \geq 1 - \epsilon$$

où ϵ est le nombre introduit dans le lemme 2 (un tel intervalle existe d'après le théorème de dérivation de Lebesgue : comme $|A| > 0$, A admet un point de densité). Appliquons le lemme 2 sur T_{kn} : comme $g = \Sigma g_m r_m$, on a

$g' = \Sigma g'_m r'_m$, avec $g'_0 = \sum_{m\leq n} g_m r'_m$, $g'_p = (-1)^k g_{n+p}$ pour $p > 0$. Par conséquent :

$$\sum_{n+1}^{\infty} g_m^2 \leq C \int_{A'} g'^2(t').2^n dt' \leq 2^n C \int_A g^2(t)dt$$

d'où le résultat.

LEMME 4.- Soit M une fonction positive sur $\mathbb{R}_+$, telle que $\limsup_{t\to+\infty} M(t) = +\infty$. Il existe alors des nombres $a_k > 0$ tels que $\Sigma a_k = 1$, des nombres $t_k > 0$ tels que $\lim_{k\to\infty} t_k = +\infty$ et que l'on ait

$$\sum_k \frac{a_k}{t_k} M\left(\frac{t_k}{a_k}\right) = +\infty .$$

DÉMONSTRATION.- BURKHOLDER dit seulement "it is easy to see that" ... je recopierais bien ma démonstration, mais ce serait dommage de gâcher un si joli petit problème de MP.

3. Démonstration du théorème 1.

Supposons que l'énoncé soit faux. Alors la fonction

$$M(t) = \sup_{X \in \Phi} t\, P\{X^* > t\}$$

n'est pas bornée. Comme on a $M(t) \leq t$, cela entraîne $\limsup_{t \to +\infty} M(t) = +\infty$, et le lemme 4 entraîne l'existence de nombres $t_k > 0$ tendant vers $+\infty$, de nombres $a_k > 0$ tels que $\Sigma\, a_k = 1$ tels que

$$\sum_k \frac{a_k}{t_k} M\left(\frac{t_k}{a_k}\right) = +\infty .$$

Mais il existe alors des processus $X^k \in \Phi$ tels que $\frac{t_k}{a_k} P\{X^{k*} \geq \frac{t_k}{a_k}\}$ approche $M(\frac{t_k}{a_k})$ d'assez près pour que

$$\sum_k P\{a_k X^{k*} \geq t_k\} = +\infty .$$

Introduisons maintenant les processus Y^k de l'énoncé ; cette condition s'écrit aussi $\sum_k P\{a_k Y^{k*} \geq t_k\} = +\infty$; d'après le lemme de Borel-Cantelli, les processus Y^k étant indépendants, on a p.s.

$$a_k Y^{k*} > t_k \qquad \text{pour une infinité de valeurs de } k$$

et par conséquent, pour presque tout $\omega \in \Omega$

$$(*) \qquad \limsup_{k \to \infty} |a_k Y^{k*}(\omega)| = +\infty .$$

Nous allons voir que ceci est en contradiction avec c). Introduisons en effet les fonctions de Rademacher $r_k(t)$, et appliquons la condition c) en prenant $u_k = r_k(t) a_k$. Cette condition nous donne

$$\begin{matrix}\text{pour tout } t \\ \text{pour tout } n\end{matrix} \quad \Sigma\, a_k r_k(t) Y^k_n(\omega) \quad \text{existe p.s. et}$$

$$P\{\sup_n |\Sigma\, a_k Y^k_n(\omega) r_k(t)| < \infty\} > 0 .$$

Posons

$$V(t,\omega) = \sup_n |\sum_k a_k r_k(t) Y_n^k(\omega)|$$

si toutes ces séries convergent, $+\infty$ sinon. Soit H l'ensemble des ω tels que la mesure de $\{t : V(t,\omega) < +\infty\}$ soit strictement positive. H est mesurable, et on a $P(H) > 0$ (théorème de Fubini). Choisissons $\omega \in H$, et M assez grand pour que la mesure de l'ensemble

$$A = \{t : \sup_n |\sum_k a_k r_k(t) Y_n^k(\omega)| \le M\}$$

soit strictement positive. Alors, d'après le lemme 3, on a

$$\text{pour tout } n \quad \sum_{N(A)}^{\infty} a_k^2 Y_n^k(\omega)^2 \le C(A)|A|M^2$$

et à plus forte raison

$$\sup_n \sup_{k \ge N(A)} a_k |Y_n^k(\omega)| < +\infty .$$

En intervertissant les deux sup, on voit que ω ne satisfait pas à (*). D'où la contradiction puisque $P(H) > 0$.

II. Application aux martingales.

1. Dictionnaire des martingales.

Notations générales : $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ est un espace probabilisé, muni d'une famille croissante $(\mathfrak{F}_n)$ de sous-tribus de $\mathfrak{F}$. Le mot processus désigne toute suite $X = (X_n)$ de variables aléatoires réelles, telle que X_n soit $\mathfrak{F}_n$-mesurable pour tout $n \ge 0$. On pose alors $X^* = \sup_n |X_n|$ comme au paragraphe I.

Une martingale est un processus $X = (X_n)$ tel que :

1) X_n est intégrable pour tout n,

2) pour tout $n \ge 1$, $X_n - X_{n-1}$ est orthogonale à toute variable aléatoire bornée $\mathfrak{F}_{n-1}$-mesurable.

La martingale X est dite bornée dans L^p si $\sup_n \|X_n\|_p < +\infty$, et ce nombre est alors noté $\|X\|_p$. On montre sans peine que X est bornée dans L^1 si et seulement si X est différence de deux martingales positives.

Si X est un processus, on notera Q^X le processus défini par

$$Q_0^X = |X_0| \quad , \quad Q_n^X = [X_0^2 + (X_1 - X_0)^2 + \dots + (X_n - X_{n-1})^2]^{\frac{1}{2}}$$

Q^X est la variation quadratique de X .

Nous dirons (pour fixer le langage dans cet exposé ; la terminologie n'est heureusement pas consacrée) qu'un processus V est un multiplicateur si

1) $V^* \leq 1$ et

2) V_n est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable pour tout $n \geq 1$.

Si X est un processus quelconque, nous noterons $V \circ X$ le processus défini par

$$(V \circ X)_n = V_0 X_0 + V_1(X_1 - X_0) + \dots + V_n(X_{n-1} - X_n) .$$

Il n'est pas question ici de démontrer tous les résultats de théorie des martingales qui serviront : je me bornerai à les énoncer explicitement.

2. Quelques résultats auxiliaires.

LEMME 5.- Soit X une martingale bornée dans L^1 ; X est alors différence de deux martingales positives X^1 et X^2 .

C'est classique.

LEMME 6.- Soit X une martingale bornée dans L^1 .

a) Si V est un multiplicateur, les variables aléatoires $(V \circ X)_n$ convergent p.s. vers une limite finie lorsque $n \to \infty$.

b) La variable aléatoire Q_∞^X est p.s. finie.

DÉMONSTRATION.- Il suffit de traiter le cas où X est positive, d'après le lemme 1. Soit $T(\omega) = \inf \{n : X_n(\omega) \geq m\}$; lorsque m est pris assez grand, la probabilité pour que $T = \infty$ est très voisine de 1 . Posons

$$Y_n(\omega) = 0 \text{ si } n \geq T(\omega) \quad , \quad Y_n(\omega) = X_n(\omega) \text{ si } n < T(\omega) .$$

Le processus $Y = (Y_n)$ est alors une surmartingale positive bornée par la constante m , et un résultat classique permet d'écrire $Y = Z - A$, où

Z est une martingale bornée dans L^2 $(\|Z\|_2 \le 2m)$

A est un processus tel que $A_0 = 0$, $A_n \le A_{n+1}$ pour tout n , et $\sup_n E[A_n] \le m$.

Alors sur l'ensemble où $T = \infty$ nous avons $(V\circ X)_n = (V\circ Y)_n = (V\circ Z)_n - (V\circ A)_n$ pour tout n , et $Q_\infty^X = Q_\infty^Y \le Q_\infty^Z + Q_\infty^A$. Il suffit donc de montrer que les variables aléatoires $(V\circ Z)_n$ et $(V\circ A)_n$ convergent p.s., et que Q_∞^Z et Q_∞^A sont p.s. finies. Il n'y a aucune difficulté à cela, car Z est bornée dans L^2 , et car les différences $A_{n+1} - A_n$ sont positives.

LEMME 7.- Soit X une martingale telle que $Q_\infty^X \in L^1$; alors X_n converge p.s. vers une limite finie lorsque $n \to \infty$.

Nous allons montrer qu'il existe un multiplicateur V et une martingale Y bornée dans L^1 telle que $X = V\circ Y$, et cela suffira d'après le lemme 6. En fait les variables aléatoires V_n seront des constantes (± 1) .

Introduisons les fonctions de Rademacher $r_k(t)$ et soit X^t le processus

$$X_n^t = r_0(t)X_0 + r_1(t)(X_1 - X_0) + \dots + r_n(t)(X_n - X_{n-1}) .$$

Ce processus est bien de la forme $X^t = V^t\circ X$, et comme V^t ne prend que les valeurs ± 1 , on a $X = V^t\circ X^t$. D'autre part, comme X^t est une martingale, $E[|X_n^t|]$ croît avec n et on a d'après Lebesgue

$$\int_0^1 \sup_n E[|X_n^t|]dt = \int_0^1 \lim_n E[|X_n^t|]dt = \lim_n E[\int_0^1 |X_n^t|dt] .$$

Mais d'après le lemme 1 on a $\int_0^1 |X_n^t|dt \le CQ_n^X \le CQ_\infty^X$, et la première intégrale est finie ; donc $\sup_n E[|X_n^t|]$ est finie pour presque tout t - autrement dit, X^t est une martingale bornée dans L^1 pour presque tout t , et le lemme est prouvé.

LEMME 8.- Soient X et Y deux martingales ; supposons que Y soit bornée dans L^1 , et que l'on ait pour tout n $Q_n^X \le Q_n^Y$; alors les variables aléatoires X_n convergent p.s. vers une limite finie, lorsque $n \to \infty$.

DÉMONSTRATION.- Soit $T = \inf\{n : |Y_n| \geq m \text{ ou } Q_n^Y \geq m\}$: comme Y est bornée dans L^1, la variable aléatoire Y^* est p.s. finie (th. classique) et Q_∞^Y est p.s. finie d'après le lemme 6, b). Par conséquent, la probabilité pour que $T = \infty$ peut être rendue arbitrairement voisine de 1 en choisissant m assez grand. Posons

$$X'_n(\omega) = X_{\inf(n,T(\omega))}(\omega) \quad , \quad Y'_n(\omega) = Y_{\inf(n,T(\omega))}(\omega) .$$

Ces processus sont encore des martingales (th. classique), et on a encore $Q_n^{X'} \leq Q_n^{Y'}$ pour tout n. D'autre part, $Q_n^{Y'}$ est $\leq m$ si $n < T$, et n'augmente plus après T, de sorte que $Q_\infty^{Y'}$ est majoré par $m + |Y_T - Y_{T-1}| \leq 2m + |Y_T|$, et on a $Y_T \in L^1$ du fait que Y est bornée dans L^1 (th. classique). Il résulte de tout cela que $Q_\infty^{X'} \in L^1$, et donc que les variables X'_n ont p.s. une limite finie lorsque $n \to \infty$, d'où le même résultat pour les X_n sur $\{T = \infty\}$, et finalement le même résultat pour les X_n p.s.

3. Le lemme maximal.

On ne sait pas démontrer le résultat ci-dessous sans le théorème 1. Mais supposons que Y soit une martingale bornée dans L^1, que V soit un multiplicateur, et que l'on pose $X = V \circ Y$; on a $Q_n^X \leq Q_n^Y$ pour tout n, et par conséquent d'après le th. 2 ci-dessous

$$cP\{X^* > c\} \leq k.\| Y\|_1 \quad .$$

On sait démontrer élémentairement cette inégalité (GUNDY), et évaluer grossièrement la constante k qui y figure (alors qu'on ne sait rien sur la constante K du th. 2).

THÉORÈME 2.- Soit X une martingale possédant la propriété suivante

> il existe une martingale Y telle que $\| Y\|_1 \leq 1$ et que $Q_n^X \leq Q_n^Y$ pour tout n.

On a alors pour tout $c > 0$

$$cP\{X^* \geq c\} \leq K$$

où K est une constante "universelle".

DÉMONSTRATION.- Nous allons appliquer le théorème 1. Considérons des martingales X^k $(k \in \mathbb{N})$ possédant la propriété ci-dessous, et désignons par Y^k, pour chaque k, une martingale de norme ≤ 1 dans L^1 et telle que $Q_n^{X^k} \leq Q_n^{Y^k}$ pour tout n. Nous pouvons maintenant construire sur un espace probabilisé "assez gros" des processus stochastiques U^k, V^k possédant les propriétés suivantes

- pour chaque k, le couple (U^k,V^k) et le couple (X^k,Y^k) ont même loi (en particulier, les processus U^k et V^k sont des martingales par rapport à des familles croissantes de tribus convenables).
- les couples (U^k,V^k) sont indépendants dans leur ensemble.

Posons $A_0^k = U_0^k$, $A_i^k = U_i^k - U_{i-1}^k$, et de même $B_0^k = V_0^k$, $B_i^k = V_i^k - V_{i-1}^k$; A^k et B^k sont les "différences" de U^k et V^k respectivement. Désignons maintenant par S^k les processus dont les différences sont :

pour S^0 : A_0^0, 0, A_1^0, 0, A_2^0, 0, A_3^0, 0, A_4^0, 0, A_6^0, 0, A_7^0, 0 ..

pour S^1 : 0, A_0^1, 0, 0, 0, A_1^1, 0, 0, 0, A_2^1, 0, 0, 0, A_3^1

pour S^2 : 0, 0, 0, A_0^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, A_1^2, 0, 0

etc, et construisons de même T^k à partir de B^k ; les martingales T^k sont bornées dans L^1, et $\|T^k\|_1 \leq 1$ pour tout k ; d'autre part, on a $Q_n^{S^k} \leq Q_n^{T^k}$ pour tout n. Prenons maintenant des nombres réels u_k tels que $\Sigma|u_k| = 1$. Comme il n'y a qu'une différence non nulle dans chaque colonne, nous pouvons former $T = \Sigma\, u_k T^k$; T est une martingale, et on a pour tout n $E[|T_n|] \leq \Sigma\, |u_k| E[|T_n^k|] \leq 1$, donc T est bornée dans L^1. Construisons de même S ; on a $(Q_n^S)^2 = \sum_{i=0}^{n} (\sum_k u_k A_i^k)^2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_k u_k^2 A_i^{k2}$ (tous les "termes rectangles" sont nuls) $= \sum_k u_k^2 (Q_n^{S^k})^2$, et le même calcul vaut pour $(Q_n^T)^2$, de sorte que

$Q_n^S \leq Q_n^T$ pour tout n. Le lemme 8 entraîne alors que S_n converge p.s. vers une limite finie, donc S^* est p.s. finie. Comme les variables aléatoires X^{k*} et S^{k*} ont la même loi (le processus S^k s'obtient en "ralentissant" les processus U^k) le théorème 1 entraîne le th. 2.

4. Démonstration des autres inégalités.

THÉORÈME 3.- Soit X une martingale bornée dans L^p $(+\infty > p > 1)$, soit V un multiplicateur, et soit $Y = V \circ X$; alors

$$\| Y\|_p \leq K_p . \| X\|_p \quad , \qquad \text{où } K_p \text{ est une constante.}$$

DÉMONSTRATION.- A toute variable aléatoire X_∞ bornée, associons la martingale $X = (X_n) = (E[X_\infty | \mathcal{F}_n])$, qui est bornée ; formons $Y = V \circ X$: comme X est bornée dans L^2, Y est bornée dans L^2, donc Y_n converge p.s. vers une variable aléatoire $Y_\infty \in L^2$. On a

$$\| X\|_p \leq \| X_\infty\|_p \quad , \quad \| Y\|_p = \| Y_\infty\|_p$$

(tous ces résultats sont classiques). L'application $T : X_\infty \longmapsto Y_\infty$ est linéaire, de type faible (1,1) d'après le lemme maximal, et de type (2,2) d'après un calcul évident. Le théorème d'interpolation de MARCINKIEWICZ entraîne alors que T est de type (p,p) pour $1 < p \leq 2$. Autrement dit

$$\| Y\|_p \leq K_p . \| X_\infty\|_p \qquad \text{si } 1 < p \leq 2 .$$

On note maintenant que si X est une martingale bornée, et si l'on pose $X_\infty = \lim_n X_n$, on a bien $X_n = E[X_\infty | \mathcal{F}_n]$ pour tout n, et de plus $\| X_\infty\|_p = \| X\|_p$. Par conséquent, on a $\| Y\|_p \leq K_p . \| X\|_p$ si X est bornée, et on étend cela aisément par continuité au cas où X est seulement bornée dans L^p.

Mais cela ne règle que le cas où $p \leq 2$. Supposons que $p > 2$, et désignons par q l'exposant conjugué de p. Il est facile de vérifier que, si Z

est une variable aléatoire quelconque appartenant à L^∞ , on a

$\int TX.Z\, dP = \int X.TZ\, dP$. Or on a

$$\left| \int TX.Z\, dP \right| \leq \| TX\|_q \, \| Z\|_p \leq K_q \| X\|_q \, \| Z_p\|$$

et par conséquent

$$\left| \int X.TZ\, dP \right| \leq K_q \| X\|_q \, \| Z\|_p$$

ou encore, en faisant varier X dans l'intersection de L^∞ et de la boule unité de L^q , $\| TZ\|_p \leq K_q \| Z\|_p$, ce qui est le résultat cherché.

Je n'établirai pas les inégalités du second groupe (second théorème de l'introduction). Elles se déduisent essentiellement de celles qui viennent d'être établies, à l'aide du lemme 1 sur les fonctions de Rademacher. Le lecteur pourra consulter BURKHOLDER [2] .

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. L. BURKHOLDER - Maximal Inequalitites as Necessary conditions for Almost everywhere Convergence. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 3, 1964, p. 75-88.

[2] D. L. BURKHOLDER - Martingale transforms. Annals. M. Stat. 37, 1966, p. 1494-1504.

L'article de R. F. GUNDY "A decomposition for L^1-bounded martingales" qui contient une démonstration directe du lemme maximal, n'est pas encore paru.