Bernard Malgrange

Théorie analytique des équations différentielles

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. n° 329, p. 261-273
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__261_0>

Séminaire BOURBAKI
19e année 1966/67, n°329 Juin 1967

THÉORIE ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

par Bernard MALGRANGE

Introduction

L'origine des questions abordées ici se trouve dans les travaux de E. Cartan sur les systèmes différentiels, et principalement dans le théorème de Cartan-Kähler et la notion de « système involutif ». Ces questions ont été reprises ces dernières années par Kuranishi, Spencer, Sternberg, Bott, et leurs élèves, le progrès le plus important consistant en l'introduction (due à Spencer [8]) de méthodes cohomologiques qui permettent d'élucider la notion de système involutif, et de donner des théorèmes d'existence sous des conditions de régularité raisonnelles (en général implicites dans la littérature classique). Faute de place, je me limiterai aux équations linéaires, quoique beaucoup de résultats s'étendent au cas non-linéaire. A l'heure actuelle, la principale application de cette théorie est l'étude des « algèbres de Lie infinies » considérées, non seulement du point de vue formel (cf. exposé de Demazure), mais, en gros, comme les systèmes différentiels sur les vecteurs d'une variété tels que l'ensemble des solutions soient stables par le crochet ; j'espère que Bourbaki voudra bien consacrer un exposé ultérieur à cette question.

1. Le complexe trivial.

Soit X une variété de classe C^∞ ou analytique, sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un fibré vectoriel sur X, $\underline{E}$ le faisceau des sections de E. Soit $J^k(E)$ le fibré des jets d'ordre k de sections de E ; lorsque E est le fibré trivial $X \times K$, on écrira simplement J^k. On pose encore $\underline{J}^{\circ} = \mathcal{O}_X$, et on l'appelle, comme d'habitude, le faisceau structural de X.

Les éléments de J^k, de source x, s'identifient donc à $\mathcal{O}_{X,x}/m_x^{k+1}$, où m_x désigne l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$. De même, soit $\mathcal{J}$ l'idéal de définition de la diagonale $\Delta \subset X^2$ (i.e. le faisceau des germes de sections de X^2 qui s'annulent sur Δ) ; alors $\underline{J}^k$ s'identifie canoniquement à $\mathcal{O}_{X^2}/\mathcal{J}^{k+1}$, ou plus exactement à l'image directe de ce dernier faisceau par la première projection $\pi_1 : X^2 \longmapsto X$. En coordonnées locales, et avec les notations usuelles, le germe $x \to (f_\alpha(x))$, $|\alpha| \leqq k$ au voisinage de a sera donc identifié au germe

$$(x,y) \longmapsto \sum_{|\alpha| \leqq k} f_\alpha(x) \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}$$

de fonction sur X^2 au voisinage de (a,a), modulo les monômes $(y-x)^\beta$, $|\beta| = k+1$ (nous écrirons simplement dans la suite : mod $(y-x)^{k+1}$). Les deux projections $X^2 \to X$ définissent alors deux injections de $\mathcal{O}_X$ dans $\underline{J}^k$, que nous noterons respectivement i^k et j^k ; avec les notations précédentes, $i^k f$ est donc égal à

$$(x,y) \longmapsto f(x) \quad \text{mod } (y-x)^{k+1}$$

et j^k est égal à

$$(x,y) \longmapsto f(y) = \sum_{|\alpha| \leqq k} D^\alpha f(x) \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} \quad \text{mod } (y-x)^{k+1}$$

par conséquent, i^k et j^k définissent deux structures de $\mathcal{O}_X$-module sur $\underline{J}^k$, que nous écrirons respectivement à gauche et à droite ; et, bien entendu, quand nous écrirons des produits tensoriels sur $\mathcal{O}_X$, la place du symbole $\otimes$ indiquera de laquelle de ces deux structures il s'agit.

Lorsque E est un fibré quelconque, seule l'application $j^k : \underline{E} \to \underline{J^k(E)}$ est encore définie, comme étant l'application qui, à une section σ de E fait correspondre $x \longmapsto j^k_x\sigma$, $j^k_x\sigma$ = jet d'ordre k de σ en x. On vérifie aussitôt que l'application $(f,\sigma) \longmapsto f j^k\sigma$ détermine un isomorphisme canonique $\underline{J}^k \otimes \underline{E} \to \underline{J^k(E)}$ (on omet les $\mathcal{O}_X$ sous le symbole $\otimes$ à partir de maintenant) ; dans cette identification la structure de $\mathcal{O}_X$-module de $\underline{J}^k \otimes \underline{E}$ héritée de la structure gauche de $\underline{J}^k$ s'identifie à la structure naturelle de $\mathcal{O}_X$-module de $\underline{J^k(E)}$.

Cherchons à prolonger l'opérateur différentiel $j^k : \underline{E} \to \underline{J^k(E)}$ par un complexe acyclique : les sections de $\underline{J^k(E)}$ qui appartiennent à $\operatorname{im}(j^k)$ peuvent être considérées, modulo $(y-x)^{k+1}$, comme les sections de π_2^*E sur X^2 qui « ne dépendent pas » de la première coordonnée x ; il est donc naturel de traduire ce fait en disant que leur « différentielle extérieure par rapport à x » est nulle. De fait, désignons par T^* le fibré cotangent de X ; la différentielle extérieure par rapport à la première coordonnée sur X^2 définit, de manière évidente, par passage au quotient, une application $D : \underline{\Lambda^p T^*} \otimes \underline{J}^k \to \underline{\Lambda^{p+1} T^*} \otimes \underline{J}^{k-1}$, d'où, en tensorisant à droite par $\underline{E}$, un complexe

$$(*) \quad 0 \to \underline{E} \xrightarrow{j^k} \underline{J^k(E)} \xrightarrow{D} \underline{T}^* \otimes \underline{J^{k-1}(E)} \xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} \underline{\Lambda^n T^*} \otimes \underline{J^{k-n}(E)} \to 0$$

(on convient que $\underline{J^k(E)} = 0$ si $k < 0$). Nous vérifierons un peu plus loin (§ 3) que, pour tout $k \geqq 0$, ce complexe est cyclique : vérifions-le seulement au premier cran : en coordonnées locales, et en supposant E trivial, l'opérateur D, appliqué à $\underline{J^k(E)}$ s'écrit simplement

$$D(f_\alpha) = \{\sum_i (\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} - f_{\alpha+\varepsilon_i}) dx_i\}_{|\alpha| \leqq k-1} .$$

Donc $D(f_\alpha) = 0 \Leftrightarrow$ Pour $|\alpha| \leq k$, $f_\alpha = D^\alpha f_o$.

Remarque inutile.

La construction précédente s'appliquerait aussi bien si $\underline{E}$ était un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules quelconque ; l'hypothèse qu'il est localement libre, i.e. provient d'un fibré, n'a pas été utilisée jusqu'ici.

2. Le complexe de Spencer d'une équation différentielle.

Soient E et F deux fibrés vectoriels sur X (les fibrés-types seront toujours supposés de dimension finie). Par définition, une équation différentielle linéaire d'ordre k de E dans F est un morphisme de fibrés $p_k : J^k(E) \to F$; soit $\underline{p}_k$ le morphisme de faisceaux correspondant ; on posera $\underline{R}^k = \ker(\underline{p}_k)$. L'opérateur différentiel associé est $a = \underline{p}_k \circ j^k : \underline{E} \to \underline{F}$.

On va définir les prolongements $p_{k+\ell}$ et $\underline{R}^{k+\ell}$. Tout d'abord, on a une injection canonique $\lambda_\ell : J^{k+\ell} \to J^\ell(J^k)$, définie ainsi : soit a un point de X, et σ une section de $\mathcal{O}$ au voisinage de a ; alors $j^k\sigma$ est une section de J^k au voisinage de a, et l'on vérifie immédiatement que $j_a^\ell(j^k\sigma)$ ne dépend que de $j_a^{k+\ell}\sigma$; on peut aussi définir le morphisme de faisceaux associé $\underline{\lambda}_\ell$ comme étant obtenu, par passage au quotient à partir du morphisme $(\pi_1,\pi_3)^*: \mathcal{O}_{X^2} \to \mathcal{O}_{X^3}$, π_i désignant la i-ème projection $X^3 \to X$. On définit de même

$$\lambda_\ell : J^{k+\ell}(E) \quad \to \quad J^\ell(J^k(E)) .$$

Ceci étant, soit $j^\ell(p_k)$ le morphisme $J^\ell(J^k(E)) \to J^\ell(F)$ défini à partir de p_k de la manière évidente ; on pose $p_{k+\ell} = j^\ell(p_k) \circ \lambda_\ell$. Notons que

$$\underline{R}^{k+\ell} = \ker(\underline{p}_{k+\ell})$$

peut être aussi défini directement à partir de $\underline{R}^k$ (et donc « ne dépend pas de p_k », mais seulement de $\underline{R}^k$), de la manière suivante: on considère $\underline{J}^\ell \otimes \underline{R}^k$ comme plongé dans $\underline{J^\ell(J^k(E))} = \underline{J}^\ell \otimes \underline{J^k(E)}$ et l'on a alors

$$\underline{R}^{k+\ell} = \underline{\lambda}_\ell^{-1}(\underline{J}^\ell \otimes \underline{R}^k).$$

On vérifie aussi immédiatement que, si l'on part de $\underline{R}^{k+1}$ au lieu de $\underline{R}^k$, son prolongement d'ordre $\ell-1$, défini par ce dernier procédé, coïncide avec $\underline{R}^{k+\ell}$.

PROPOSITION 1. <u>Désignons par</u> π <u>la projection canonique</u> $\underline{J^{k+1}(E)} \to \underline{J^k(E)}$; <u>pour qu'un germe</u> σ <u>de section de</u> $J^{k+1}(E)$ <u>appartienne à</u> $\underline{R}^{k+1}$, <u>il faut et il suffit qu'on ait</u>

$$\pi\sigma \in \underline{R}^k \qquad \text{et} \qquad D\sigma \in \underline{T}^* \otimes \underline{R}^k .$$

Cela résulte du fait que le diagramme suivant est commutatif comme on le voit facilement à partir des définitions :

$$\begin{tikzcd} \underline{J^{k+1}} \arrow[rr, "\underline{\lambda}"] \arrow[d, "D"'] & & \underline{J}^1 \otimes \underline{J}^k \arrow[dll, "D \otimes \mathrm{id}"] \\ \underline{T}^* \otimes \underline{J}^k & & \end{tikzcd}$$

Par définition, le faisceau (sol) des solutions de l'équation différentielle (homogène) est le noyau de $a = \underline{p}_k \circ j^k$; montrons qu'on a, $\forall\ \ell \geqq k$

$$(\mathrm{sol}) = (j^\ell)^{-1}\underline{R}^\ell .$$

Pour $\ell = k$, c'est vrai par définition ; en raisonnant ensuire par récurrence, il suffit de le prouver pour $\ell = k+1$; or soit $\tau \in (\mathrm{sol})$ et $\sigma = j^{k+1}\tau$; on a $\pi\sigma = j^k\tau \in \underline{R}^k$ et $D\sigma = 0$; donc (prop. 1) $\sigma \in \underline{R}^{k+1}$; la réciproque est immédiate.

De ce qui précède, résulte qu'on a, pour $\ell \geqq k$, une suite exacte

$$0 \to (\mathrm{sol}) \xrightarrow{j^\ell} \underline{R}^\ell \xrightarrow{D} \underline{T}^* \otimes \underline{J^{\ell-1}(E)}$$

et que, pour $\ell \geqq k+1$, la dernière application a son image dans $\underline{T}^* \otimes \underline{R}^{\ell-1}$. Pour la commodité, posons, pour tout $\ell \in Z$, $\ell < k$: $\underline{R}^\ell = \underline{J^\ell(E)}$; on vérifie alors facilement, à partir de la proposition 1, que, pour tout ℓ, le complexe trivial donne par restriction un complexe

$$(K_\ell^\bullet) \quad 0 \to (\mathrm{sol}) \xrightarrow{j^\ell} \underline{R}^\ell \xrightarrow{D} \underline{T}^* \otimes \underline{R}^{\ell-1} \xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} \underline{\Lambda^n T^*} \otimes \underline{R^{\ell-n}} \to 0$$

Pour $\ell \geqq k$, ce complexe est acyclique en degré -1 et 0 ; notre but est de donner, dans le cas analytique, des conditions sous lesquelles il est acyclique en degré 1 (et éventuellement en degré > 1).

Ecrivons les expressions des $\underline{R}^\ell$ en coordonnées locales ; supposons E et F triviaux ; le morphisme p_k s'écrit alors

$$(e_\alpha)_{|\alpha|\leqq k} \longmapsto \sum_{|\alpha|\leqq k} a_\alpha e_\alpha \ ; \quad e_\alpha \in \underline{E}, \quad a_\alpha \in \mathrm{Hom}\,(E,F)$$

$\underline{R}^k$, qu'on appelle aussi « espace des solutions formelles d'ordre k », est défini par $\sum_{|\alpha|\leqq k} a_\alpha e_\alpha = 0$ et $\underline{R}^{k+1}$ par le système

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{|\alpha|\leqq k} a_\alpha e_\alpha = 0 \\ \displaystyle\sum_{|\alpha|\leqq k} \frac{\partial a_\alpha}{\partial x_i} e_\alpha + \sum a_\alpha e_{\alpha+\varepsilon_i} = 0 \qquad i = 1,\dots,n \end{cases}$$

i.e. par le système obtenu en dérivant les équations initiales.

Quant à (sol), il est défini par $\sum_{|\alpha|\leqq k} a_\alpha D^\alpha e = 0$, $e \in \underline{E}$; on voit que l'expression de (sol) comme noyau de

$$D : \underline{R}^k \to \underline{T}^* \otimes \underline{J^{k-1}(E)}$$

n'est finalement rien d'autre que le procédé, vieux comme le monde, qui consiste à ramener une équation différentielle à l'ordre un !

3. La δ-cohomologie.

A partir de maintenant, nous allons faire l'hypothèse suivante :

(A) « Intégrabilité ». Pour $\ell \geqq \ell_0$ la projection $\underline{R}^{\ell+1} \to \underline{R}^{\ell}$ est surjective. ($\ell_0 \geqq k$).

Cette hypothèse exprime, en gros, que, en dérivant les équations d'ordre ℓ du système, (i.e. les équations définissant $\underline{R}^{\ell}$), on ne trouvera pas de « nouvelles » équations d'ordre ℓ, qui soient linéairement indépendantes des précédentes sur $\mathcal{O}_X$ (cette assertion, vague ici, devient correcte lorsqu'on se place au point de vue « dual » des modules sur le faisceau des opérateurs différentiels, voir [5]).

Comparons la cohomologie de $K^{\bullet}_{\ell}$ et celle de $K^{\bullet}_{\ell+1}$; pour cela, introduisons le noyau $\underline{N}^{\ell+1}$ de la projection $\underline{R}^{\ell+1} \to \underline{R}^{\ell}$; le complexe $K^{\bullet}_{\ell+1}$ donne alors, par restriction, un complexe, dont on désignera le cobord par δ :

$$(\bar{K}^{\bullet}_{\ell+1}) \qquad 0 \to \underline{N}^{\ell+1} \xrightarrow{\delta} \underline{T}^* \otimes \underline{N}^{\ell} \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \underline{\Lambda^n T^*} \otimes \underline{N}^{\ell-n+1} \to 0 \ .$$

Notons maintenant ceci : contrairement à D, l'opérateur δ est $\mathcal{O}_X$-linéaire : en effet, pour $a \in X$, $f \in \mathcal{O}_{X,a}$ et $\sigma \in (\underline{\Lambda^p T^*} \otimes \underline{J^k(E)})_a$, on a immédiatement à partir des définitions

$$D(f\sigma) = df \wedge \pi\sigma + fD\sigma \ ;$$

donc si $\pi\sigma = 0$, on aura

$$D(f\sigma) = fD\sigma \ .$$

<u>Dans le cas trivial</u>, avec $E = K$ (i.e. $\underline{R}^{\ell} = \underline{J}^{\ell}$ pour tout ℓ), l'opérateur δ peut être décrit ainsi, comme on le voit sur son expression en coordonnées locales : $\underline{N}^{\ell}$ s'identifie alors à $\underline{S^{\ell}(T^*)}$, ($S^{\ell}$, puissance symétrique d'ordre ℓ) ; les éléments de $\underline{\Lambda^p T^*} \otimes \underline{S^{\ell}(T^*)}$ s'identifient alors aux germes de sections du fibré $\Lambda^p T^* \otimes_X S^{\ell}(T^*)$, dont la fibre en a s'identifie aux formes différentielles de degré p à coefficients polynomes homogènes de degré ℓ sur T_a. La différentielle δ provient alors de l'homomorphisme de fibrés défini, dans chaque fibre, par la différentielle extérieure sur lesdites formes-polynomes. Cela montre, dans ce cas, l'acyclicité de $\bar{K}^{\bullet}_{\ell}$ pour tout ℓ, donc le fait que la cohomologie du complexe trivial $K^{\bullet}_{\ell}$ est indépendante de ℓ ; en examinant le cas $\ell = 0$, on voit qu'il est acyclique quel que soit ℓ. En tensorisant à droite par $\underline{E}$, on voit que le complexe (*) considéré au § 1 est acyclique en tous degrés.

Revenons maintenant au cas général, et posons $H^{p,\ell} = H^p(\bar{K}^{\bullet}_{\ell+p})$. On vérifie facilement que, pour $\ell \geqq k+1$, on a en fait $H^{o,\ell} = H^{1,\ell} = 0$ (et ceci, indépendamment de (A)).

PROPOSITION 2. <u>Supposons que</u> (A) <u>soit vérifié, et qu'en outre on ait</u>

(B) <u>Pour</u> $\ell \geqq \ell_o$, $H^{2,\ell} = 0$

<u>Alors, pour</u> $\ell \geqq \ell_o+1$, <u>l'homomorphisme</u> $H^1(K^{\bullet}_{\ell+1}) \to H^1(K^{\bullet}_{\ell})$ <u>déduit de la projection</u> $\underline{R}^{\ell} \to \underline{R}^{\ell-1}$ <u>est un isomorphisme</u>.

Ceci résulte aussitôt de la suite exacte de cohomologie. On a évidemment aussi des énoncés analogues pour les H^p, $p > 1$, qu'on laisse le lecteur énoncer.

L'intérêt de l'hypothèse (B) ne se limite pas là ! En fait l'étude des complexes $(\bar{K}^{\bullet}_{\ell})$ donne de nombreuses informations sur l'équation différentielle, et ce sera même le seul outil que nous utiliserons ici. En voici un exemple, important dans les applications :

PROPOSITION 3, [3], [6], [7]. Supposons pour un $\ell \geqq k$, que l'application $\underline{R}^{\ell+1} \to \underline{R}^{\ell}$ soit surjective. Alors, il existe une suite exacte

$$\underline{R}^{\ell+2} \xrightarrow{\pi} \underline{R}^{\ell+1} \to H^{2,\ell} .$$

Définissons d'abord la seconde flèche, que nous noterons ρ : prenons $e \in \underline{R}^{\ell+1}$, et soit f un relèvement à $\underline{T}^* \otimes \underline{R}^{\ell+1}$ de De ; posons $h = Df$; on a

$$\pi h = \pi Df = D\pi f = DDe = 0,$$

donc $h \in \underline{\Lambda^2 T^*} \otimes \underline{N}^{\ell}$, et $\delta h = DDf = 0$; donc h est un cycle de $\underline{\Lambda^2 T^*} \otimes \underline{N}^{\ell}$, et sa classe de cohomologie $\rho(e)$ ne dépend visiblement pas du choix particulier de f.

Montrons l'exactitude de la suite ; tout d'abord il est presque évident que $\rho \circ \pi = 0$; soit alors $e \in \underline{R}^{\ell+1}$, avec $\rho(e) = 0$; montrons que e se relève à $\underline{R}^{\ell+2}$; l'hypothèse entraîne qu'il existe $\bar{f} \in T^* \otimes \underline{R}^{\ell+1}$ tel qu'on ait $\pi\bar{f} = De$, et $D\bar{f} = 0$; on trouve alors facilement un $\bar{e} \in \underline{J^{\ell+2}(E)}$ tel qu'on ait $\pi\bar{e} = e$ et $D\bar{e} = \bar{f}$, donc (prop. 1) $\bar{e} \in \underline{R}^{\ell+2}$.

COROLLAIRE. Si (B) est vérifié, et si $\underline{R}^{\ell_0+1} \to \underline{R}^{\ell_0}$ est surjectif, alors (A) est vérifié.

4. Analyse de l'hypothèse (B).

Nous nous limiterons à quelques indications très brèves. Comme nous l'avons déjà dit, le sous-ensemble des $\sigma \in \underline{J^*(E)}$ vérifiant $\pi\sigma = 0$ s'identifie à $\underline{S^k(T^*)} \otimes \underline{E}$; l'application p_k donne donc par restriction une application dite « symbole de a »

$$\sigma(p_k) : \underline{S^k(T^*)} \otimes \underline{E} \to \underline{F}$$

Pour $\ell \geqq k$, on définit de même les prolongements du symbole

$$\sigma(p_{k+\ell}) : \underline{S^{k+\ell}(T^*)} \otimes \underline{E} \to \underline{S^{\ell}(T^*)} \otimes \underline{F}$$

et l'on a encore

$$\underline{N}^{k+\ell} = \ker \sigma (p_{k+\ell})$$

Les morphismes de faisceaux présents proviennent de morphismes de fibrés, dont nous désignerons le fibré en a par $\sigma(p_{k+\ell})(a)$; et nous poserons

$$N^{k+\ell}(a) = \ker \sigma(p_{k+\ell})(a)$$

L'opérateur δ est encore défini dans l'ensemble des $N^{k+\ell}(a)$ et l'on obtient ainsi un complexe $\bar{K}^{\bullet}_{\ell}(a)$ (défini comme $\bar{K}^{\bullet}_{\ell}$, mais à partir des $N^{\ell}(a)$), et qui est un sous-complexe du complexe de la différentielle extérieure sur les polynomes homogènes sur $T^*(a)$ à valeurs dans $E(a)$. En dualisant, on trouve un sous-complexe du complexe de Koszul standard sur $T(a)$ (tensorisé par $E^*(a)$). On déduit facilement de là que, avec des notations évidentes, on a $H^{p,\ell}(a) = 0$ pour tout p dès que $\ell \geq \ell_o(a)$. D'après Quillen [7], on peut même choisir ℓ_o, indépendant de a, tel qu'on ait $H^{p,\ell}(a) = 0$ pour tout p, si $\ell \geq \ell_o$. Bien entendu, ceci ne permet pas de démontrer (B) sans autre hypothèse ; mais si l'on suppose, par exemple que $\underline{N}^{\ell}$ soit localement secteur direct (i.e. provienne d'un sous fibré) dans $\underline{S^{\ell}(T^*)\otimes \underline{E}}$, pour $\ell = \ell_o$ et $\ell = \ell_{o+1}$, on en déduira facilement que la même propriété est vraie pour tout $\ell \geq \ell_o$, et que (B) est vérifié (en fait, on démontrera même que $H^{p,\ell} = 0$ pour $\ell \geq \ell_o$; pour établir seulement (B), on n'a besoin que des $H^{2,\ell}(a)$).

5. Théorèmes d'existence.

Dorévavant, nous choisirons un point $a \in X$, et nous restreindrons toutes les constructions et les hypothèses aux germes en a. Nous allons commencer par traiter le cas d'un "germe formel" i.e. le cas où l'on remplace $\mathcal{O}_{X,a}$ par l'anneau des séries formelles par rapport à un système de coordonnées nulles en a (auquel cas tout ce qui précède garde visiblement un sens).

a) Le cas formel.

THEOREME 1. Supposons que les hypothèses (A) et (B) soient satisfaites. Alors, pour $\ell \geq \ell_0+1$, on a $H^1(K_\ell^\bullet) = 0$.

(Ce théorème est démontré dans [7] avec des hypothèses un peu plus fortes).

Démonstration. Soit $f_\ell \in I^* \otimes \underline{R}^\ell$, vérifiant $Df = 0$, pour tout $\ell' \geq \ell$, on construit par récurrence en utilisant les propositions 2 et 3 un $f_{\ell'}$ vérifiant $\pi f_{\ell'} = f_{\ell'-1}$ et $Df_{\ell'} = 0$. La limite projective f des f_ℓ est une forme différentielle qui s'écrit en coordonnées

$$\sum f^i \, dx_i \, , \; f^i \in \varprojlim \underline{R}^\ell \, .$$

Ecrivons les choses en coordonnées, avec les mêmes notations qu'au paragraphe 1 ; E est ici trivial ; $\varprojlim J^\ell(E)$ s'identifie alors aux séries formelles $f(x,y)$ sur X^2 à valeurs dans E(a). Et l'on vérifie immédiatement, à partir de la définition des $\underline{R}$ que $\varprojlim \underline{R}^\ell$ s'identifie à celles de ces séries qui vérifient l'équation différentielle proposée par rapport à y ; i.e. vérifient avec les notations du § 2 :

$$\sum a_\alpha(y) \, D_y^\alpha f(x,y) = 0.$$

Le théorème en résulte immédiatement (puisque D, dans la limite projective, est simplement la différentielle extérieure en x seul).

b) Cas analytique.

J'ignore si le théorème 1 est exact dans le cas analytique. Cependant, THÉORÈME 2. Supposons (A) et (B) vérifiées, et supposons en outre que, pour ℓ assez grand les $\underline{R}^{\ell}$ soient facteurs directs dans $J^{\ell}(E)$. Alors, pour $\ell \geq \ell_0 + 1$, on a $H^1(K^{\bullet}_{\ell}) = 0$.

Remarquons que la dernière hypothèse peut encore être analysée par les considérations de la fin du § 5 (si l'on sait que $\underline{R}^{\ell_1}$ est facteur direct, que les $\underline{N}^{\ell}$ sont facteurs directs pour $\ell > \ell_1$ et qu'on a (A) avec $\ell_0 \leq \ell_1$, alors on en déduit par récurrence que tous les $\underline{R}^{\ell}$ sont facteurs directs pour $\ell \geq \ell_1$).

La démonstration consiste à reprendre la précédente, en montrant qu'on peut s'arranger pour que, à la limite, les f^i soient analytiques par rapport aux deux variables (x,y). Ceci se fait en montrant que la cohomologie de $\overline{K}^{\bullet}_{\ell}$ (a) est tuée pour ℓ assez grand avec des majorations convenables. (Voir, pour les majorations [2] et [9] ; puis leur application au théorème 2, [1] et [3]).

Une démonstration antérieure de Quillen [7], avec des hypothèses un peu plus fortes consiste à ramener, par une variante de Cartan-Kähler, à des applications successives de Cauchy-Kovalevskaia. On a besoin pour cela de l'équivalence de la nullité des $H^{p,\ell}(a)$ (pour tout p) avec la notion d'involutivité de Cartan [4].

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. BUTTIN - Existence of local solution for analytic systems of equations, (à paraître au Pacific J. Math.).

[2] L. EHRENPREIS - V. GUILLEMIN - S. STERNBERG - On Spencer's estimates for δ-Poincaré, Ann. of Maths. 82 (1965) p. 128-138.

[3] H. GOLDSCHMIDT - Existence theorems for analytic partial differential equations (à paraître aux Ann. of Maths.).

[4] V. GUILLEMIN - S. STERNBERG - An algebraic model for transitive differential geometry, Bull. Ann. Math. Soc. 70 (1964) p. 16-47.

[5] B. MALGRANGE - Cohomologie de Spencer (d'après Quillen), Sém. Math. Orsay 1966 (multigraphie).

[6] Ngô van QUÊ - Du prolongement des espaces fibrés et des structures infinitésimales (à paraître aux Ann. Inst. Fourier).

[7] D. QUILLEN - Formal properties of overdetermined systems of partial differential equations, Thèse, Harvard, 1964 (à ne pas paraître, semble-t-il).

[8] D. SPENCER - Deformation of structures of manifolds defined by transitive continuous pseudogroups, Ann. of Maths. 76 (1962) p. 306-445.

[9] W. SWEENEY - The δ-Poincaré estimate (à paraître au Pacific J. of Math.).