JEAN GIRAUD

Résolution des singularités

Séminaire N. Bourbaki, 1968, exp. nº 320, p. 101-113
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1966-1968__10__101_0>

Séminaire BOURBAKI
19e année, 1966/67, n° 320 Février 1967

RÉSOLUTION DES SINGULARITÉS
(d'après Heisuke HIRONAKA)

par Jean GIRAUD

1. Introduction.

Notre but est moins d'exposer le contenu de [4] que de faire voir que, contrairement à une croyance assez répandue, ce mémoire est accessible à un large public. Pour le lire il suffit de savoir ce qu'est un schéma et de connaître quelques résultats d'algèbre commutative d'énoncé fort simple.

Donnons d'abord l'énoncé le plus naïf.

THÉORÈME 1.- Soit X une variété algébrique irréductible et réduite sur un corps de caractéristique 0. Il existe une variété algébrique non singulière $\tilde{X}$ et un morphisme $p : \tilde{X} \dashrightarrow X$ tels que :

(i) p est surjectif et projectif ;

(ii) soit $U = \{x \in X \mid \underline{O}_{X,x}$ est régulier$\}$, alors p induit un isomorphisme $p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$.

Rappelons que U est ouvert et que, par suite, p est birationnel. Si X est une courbe, il suffit de prendre pour $\tilde{X}$ la normalisée de X. Si X est une surface, la première démonstration satisfaisante remonte à J. WALKER [6] lorsque $k = \mathbb{C}$, puis vint ZARISKI qui donna plusieurs démonstrations et ABHYANKAR qui étendit le théorème à la caractéristique p (corps de base parfait). Si $\dim(X) = 3$, le théorème est démontré par ZARISKI [7] et ABHYANKAR [2] vient de l'étendre au cas d'un corps de base parfait de caractéristique $\neq 2, 3, 5$. Nous renvoyons pour plus de détails au chapitre 0 de [4] et aux introductions de [1] et [2], ces trois références fournissent également une abondante bibliographie.

On déduit immédiatement du théorème 1 le corollaire que voici.

COROLLAIRE 2.- Soit K une extension de type fini d'un corps k de caractéristique 0. Il existe un sous-préschéma fermé X d'un espace projectif sur k, qui est régulier, et un k-isomorphisme $i : k(X) \xrightarrow{\sim} K$, où $k(X)$ est le corps des fonctions de X.

On dit que (X,i) est un modèle non singulier de K. La question naturelle qui se pose alors est de comparer les différents modèles de K et, en particulier, certains de leurs invariants cohomologiques (cohomologie à valeurs dans le faisceau structural, groupe de BRAUER etc...) ; on espère que ces derniers ne dépendent que de K. Dans cette direction, on a le résultat suivant de ZARISKI :

THÉORÈME 3.- Soit X une surface projective non singulière sur un corps k (de caractéristique quelconque). La catégorie des modèles non singuliers du corps des fonctions de X admet un objet final (appelé modèle minimal), sauf si X est une surface réglée.

Que les surfaces réglées fassent exception est un fait élémentaire ; qu'elles soient les seules ne l'est pas du tout [8]. En dimension supérieure, HIRONAKA sait démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME 4.- (Car. 0) Soient X_1 et X_2 deux variétés projectives non singulières et soit $X_1 \xleftarrow{p_1} X \xrightarrow{p_2} X_2$ une correspondance, p_1 et p_2 étant propres et birationnels. Il existe des morphismes $X_1 \xleftarrow{q_1} X' \xrightarrow{q_2} X_2$, obtenus en composant des éclatements de centre non singulier. (N. B. X est donc non singulier).

On en déduit des isomorphismes $H^i(X_1,\underline{O}_{X_1}) \simeq H^i(X_2,\underline{O}_{X_2}), i \geqslant 0$. ABHYANKAR [2] obtient un résultat analogue en dimension 3 , le corps de base étant algébriquement clos et de caractéristique $\neq 2, 3, 5$.

2. Schémas excellents.

Le principe de la démonstration de HIRONAKA exige que l'on ne se limite pas aux variétés algébriques sur un corps. En effet, la plus grande partie du travail se fait après avoir remplacé X par le complété de l'anneau local de l'un de ses points. Les objets à considérer sont les schémas [1] excellents, les spécialistes consulteront (EGA IV 7) à ce sujet. Signalons que le spectre d'un anneau local complet (exemple : un corps) est excellent et que si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de type fini, X est excellent dès que Y l'est, ce qui prouve qu'il y a beaucoup de schémas excellents. Nous retiendrons que si X est un schéma excellent on a :

(E) le lieu singulier de X est fermé,

(E') pour tout $x \in X$, si A est l'anneau local de x et $\hat{A}$ son complété, pour tout A-schéma de type fini Y , le lieu singulier de $\hat{Y} = Y \times_A \hat{A}$ est l'image inverse de celui de Y par la première projection $\hat{Y} \longrightarrow Y$.

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat de HIRONAKA sous sa forme la plus utile.

GRAND THÉORÈME.- Soient X un schéma noethérien excellent de caractéristique 0 [2] et soit U un ouvert de X contenu dans l'ensemble des points réguliers de X .

---

(1) Conformément au nouvel usage, on dit désormais schéma pour préschéma et schéma séparé pour schéma.

(2) Un schéma est de caractéristique 0 si les corps résiduels de tous ses points sont de caractéristique 0 .

Il existe un morphisme projectif et surjectif $p : \tilde{X} \longrightarrow X$ tel que :

(i) $\tilde{X}$ est régulier ;

(ii) p induit un isomorphisme $p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$;

(iii) le schéma D obtenu en munissant $p^{-1}(X - U)$ de la structure induite réduite est un diviseur à croisements normaux.

La dernière assertion signifie que, pour tout $x \in D$, il existe un système régulier de paramètres (z_i) de $\underline{O}_{X,x}$ tel que toute composante irréductible de D soit définie, au voisinage de x, par l'annulation de l'un des z_i.

3. Platitude normale.

Cette notion introduite par HIRONAKA joue un rôle fondamental.

DÉFINITION 5.- Soient X un schéma et Y un sous-schéma fermé défini par un Idéal quasi-cohérent I. Soit $x \in X$. On dit que X est normalement plat le long de Y en x si le faisceau d'algèbres graduées (sur Y)

$$gr_I(\underline{O}_X) = gr_Y(X) = \bigoplus_{n \geqslant 0} I^n/I^{n+1}$$

est plat sur Y en x.

Si X est localement noethérien (comme tous les schémas que nous envisagerons) la condition signifie que chacune des composantes I^n/I^{n+1} est un $\underline{O}_Y$-Module localement libre (de type fini). Pour obtenir une interprétation géométrique de cette notion, rappelons que l'on appelle

- espace tangent (de ZARISKI) à X en $x \in X$ le spectre $T_x(X)$ de $Sym_k(m/m^2)$, où m est l'idéal maximal de l'anneau local A de X en x et k son corps résiduel.

- cône tangent à X en x le spectre $C_x(X)$ du gradué associé $gr_m(A)$.

- cône normal à X le long de Y le spectre $C_Y(X)$ de $gr_Y(X)$.

Les deux premiers sont des schémas sur le corps résiduel k et le dernier est un Y-schéma. De plus, on a un diagramme commutatif de k-schémas :

$$\begin{tikzcd} C_x(Y) \arrow[r] \arrow[d] & C_x(X) \arrow[r, "p"] \arrow[d] & C_Y(X)_x \\ T_x(Y) \arrow[r] & T_x(X) & \end{tikzcd}$$

où les morphismes du carré sont des immersions fermées et où $C_Y(X)_x = C_Y(X) \times_Y \mathrm{Spec}(k)$.

THÉORÈME 6 (HIRONAKA).- Soient X un schéma localement noethérien et Y un sous-schéma fermé régulier. Pour que X soit normalement plat le long de Y en $x \in Y$ il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :

(i) $T_x(Y) + C_x(X) = C_x(X)$ au sens de la loi de schéma en groupes de $T_x(X)$.

(ii) Le morphisme naturel déduit de p grâce à (i)

$$C_x(X)/T_x(X) \xrightarrow{\sim} C_Y(X)_x$$

est un isomorphisme.

On trouvera un énoncé plus complet dans [EGA IV 19.7.1] ; ce théorème n'est pas trivial ; bien entendu, il suffit de le démontrer lorsque X est le spectre d'un anneau local complet. Remarquons que, puisque Y est régulier, on a $C_x(Y) = T_x(Y)$. Les conditions (i) et (ii) signifient que le cône $C_x(X)$ est un cylindre de directrice le vectoriel $T_x(Y)$ et de base $C_Y(X)_x$. Précisons notre remarque par un lemme qui sera utile plus loin.

LEMME 7.- Soient T^* un espace vectoriel de dimension finie sur un corps k, I un idéal gradué de $S = \mathrm{Sym}_k(T^*)$. Posons $T = \mathrm{Spec}(S)$, $C = \mathrm{Spec}(S/I)$. On note W^* le plus petit sous-espace vectoriel de T^* tel que, si on pose $W = \mathrm{Spec}(S/W^*S)$, on ait $W + C = C$ au sens de la loi de groupe du schéma T. Alors W^* est le plus petit sous-espace vectoriel de T^* tel que l'idéal I soit engendré par des polynômes par rapport aux $t \in W^*$, c'est-à-dire tel que

$$(I \cap \mathrm{Sym}_k(W^*))S = I .$$

<u>On dira que</u> W <u>est la directrice du cône</u> C .

Grâce au théorème 6, prouvons que <u>la singularité de</u> X <u>est la même en tous les points de</u> Y . Bien entendu, on mesure cette singularité grâce aux fonctions de HILBERT-SAMUEL

$$X(x,n) = \sum_{0 \leq i \leq n} \mathrm{rang}_k(m^n/m^{n+1})$$

$$Y(x,n) = \sum_{0 \leq i \leq n} \mathrm{rang}_k(m'^n/m'^{n+1})$$

$$(X,Y)(x,n) = \sum_{0 \leq i \leq n} \mathrm{rang}_k((I^n/I^{n+1}) \otimes_{\underline{O}_Y} k)$$

où $x \in Y \subset X$, $n \in \underline{\underline{N}}$, où m (resp. m') est l'idéal maximal de l'anneau local de X (resp. Y) en x , où I est l'Idéal de Y dans X et où k est le corps résiduel de X et Y en x .

COROLLAIRE 8.- <u>Si</u> Y <u>est régulier, fermé dans</u> X , <u>et connexe et si</u> X <u>est normalement plat le long de</u> Y , <u>alors</u> $(X,Y)(x,n)$ <u>ne dépend pas de</u> x <u>et l'on a</u>

$$X(x,n) = \sum_{p+q=n} Y(x,p).(X,Y)(q) \quad , \qquad x \in Y .$$

En effet I^n/I^{n+1} est localement libre, et d'après le théorème 6, tout projecteur $q : T_x(X) \longrightarrow T_x(Y)$ induit un isomorphisme de k-algèbres graduées

$$gr_{m'}(\underline{O}_{Y,x}) \otimes_k (gr_Y(X) \otimes_{\underline{O}_Y} k) \xrightarrow{\sim} gr_m(\underline{O}_{X,x}) .$$

COROLLAIRE 9.- <u>Si, de plus,</u> X <u>est régulier en un point de</u> Y , <u>il l'est en tout point de</u> Y .

En effet, pour qu'un anneau local de dimension r soit régulier il faut et il suffit que sa fonction de HILBERT-SAMUEL soit égale à $n \longmapsto \binom{n+r}{r}$.

4. Eclatements permis.

Ce sont les opérations qui permettent de construire le morphisme résolvant $\tilde{X} \longrightarrow X$ du théorème 4.

DÉFINITION 10.- Soient X un schéma, Y un sous-schéma fermé défini par un Idéal quasi-cohérent I. On dit que le X-schéma $X' = \mathrm{Proj}(\bigoplus_{n \geqslant 0} I^n)$ est obtenu en faisant éclater Y dans X. On dit que Y est le centre de l'éclatement.

Si Y est régulier et si X est normalement plat le long de Y, on dit que l'éclatement est permis.

PROPOSITION 11 (triviale).- Si $U = X - Y$, la projection naturelle $p : X' \longrightarrow X$ induit un isomorphisme $p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$. Si on pose $Y' = X' \times_X Y$, on a $Y' = \mathrm{Proj}(\mathrm{gr}_Y(X))$ et Y' est un diviseur de Cartier de X'. Si l'éclatement est permis, alors Y' est plat sur Y et pour tout point $x \in Y$, si X'_x est la fibre de X' en X, l'immersion $X'_x \longrightarrow X'$ est régulière. Si X et Y sont réguliers, il en est de même de X' et Y'.

L'avant dernière assertion signifie ici que $\mathrm{gr}_{X'_x}(X')$ est localement isomorphe à une Algèbre de polynômes sur $\underline{O}_{X'_x}$. Les éclatements permis ont une vertu cardinale : ils permettent de résoudre les singularités. Précisons.

DÉFINITION 12.- Soient V un schéma et X un sous-schéma fermé. On dit que le couple (V,X) est résolu si X est régulier et si V est normalement plat le long de X. On dit que V est résolu si le couple $(V,V_{\text{réd}})$ l'est.

Notons que (V,X) est résolu signifie que X est un éclatement permis pour V. Pour un schéma réduit, résolu équivaut à régulier. Etant donné un couple (V_o,X_o), où X_o est fermé dans V_o. Soit B_o un sous-schéma fermé de X_o tel que :

(i) (V_o, B_o) et (X_o, B_o) sont résolus ;

(ii) pour tout $x \in B_o$, le couple (V_o, X_o) <u>n'est pas résolu en</u> x.

On considère alors les schémas V_1 et X_1 obtenus en faisant éclater B_o dans V_o et X_o. Il est immédiat que X_1 est un sous-schéma fermé de V_1 et que le morphisme $V_1 \longrightarrow V_o$ est surjectif et projectif et induit <u>un isomorphisme</u> $p^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U$, <u>où</u> U <u>est l'ouvert des points de</u> V_o <u>où</u> (V_o, X_o) <u>est résolu</u> (condition (ii)). Soit alors B_1 un sous-schéma fermé de X_1 tel que les conditions (i) et (ii) soient vérifiées quand on y remplace 0 par 1. On construit $X_2 \subset V_2$. D'où, par récurrence, la notion de <u>suite d'éclatements permis.</u>

GRAND THÉORÈME (bis).- <u>Soient</u> V_o <u>un schéma excellent noethérien de caractéristique</u> 0 <u>et</u> X_o <u>un sous-schéma fermé de</u> V_o. <u>Il existe une suite d'éclatements permis</u> (V_i, X_i), $0 \leq i < n$, <u>telle que</u> (V_n, X_n) <u>soit résolu. De plus si</u> $p_i : X_n \longrightarrow X_i$, $0 \leq i < n$, <u>est le morphisme naturel, le schéma</u> $D = \coprod_{0 \leq i < n} p_i^{-1}(B_i)$, <u>où</u> B_i <u>est le centre du i-ème éclatement, est un diviseur à croisements normaux.</u>

En supposant que $V_o = X_o$ est réduit, on trouve la première forme du grand théorème.

5. <u>Un éclatement permis ne peut que diminuer la singularité.</u>

Il faut d'abord donner une mesure de celle-ci. Soient A un anneau local noethérien, m son idéal maximal et I l'idéal de $C_x(X)$ dans $T_x(X)$ ($X = \mathrm{Spec}(A)$, x est son point fermé). On a une suite exacte :

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathrm{Sym}_k(m/m^2) \longrightarrow gr_m(A) \longrightarrow 0 .$$

On note I_n l'idéal engendré par les éléments de degré $\leq n$ de I et $C_x(X)(n)$ le cône correspondant. On note $W_x(X)(n)$ la génératrice de $C_x(X)(n)$, (lemme 7). On a des immersions fermées

$$\begin{array}{ccccccccc}
C_x(X) \subset \dots \subset & C_x(X)(n) & \subset & C_x(X)(n-1) & \subset \dots \subset & C_x(X)(1) & = & T_x(X) \\
\cup & \cup & & \cup & & \| & & \\
W_x(X) \subset \dots \subset & W_x(X)(n) & \subset & W_x(X)(n-1) & \subset \dots \subset & W_x(X)(1) & &
\end{array}$$

DÉFINITION 13.- On pose

$$a(x,X)(1) = -b(x,X)(1) = -\dim(T_x(X)(1))$$

et, pour $n \in \underline{\underline{N}}$, $n \geq 2$,

$$a(x,X)(n) = \mathrm{rang}_k(I_n^n/I_n^{n-1}) \quad , \quad b(x,X)(n) = \dim_k(W_x(X)(n)) .$$

La définition reste valable pour un point x d'un schéma X : on remplace ce dernier par l'anneau local de x. HIRONAKA travaille avec un schéma régulier $\underline{R}$ dans lequel est plongé X comme sous-schéma fermé. Il définit deux suites $\mathcal{D}$ et τ dont la connaissance équivaut à celle de $a(x,X)$, $b(x,X)$ et de la dimension de l'anneau local de $\underline{R}$ en x.

Justifions le sous-titre.

THÉORÈME 14.- Soient X un schéma excellent noethérien, Y un éclatement permis et x' un point du schéma éclaté X' fermé dans sa fibre et de projection $x \in X$, tel que l'extension résiduelle soit séparable. Alors on a

$$a(x',X') \geq a(x,X) \qquad \text{(ordre lexicographique)}.$$

Si ces deux suites sont égales, on a

$$b(x',X') \leq b(x,X) \qquad \text{(ordre lexicographique)}.$$

COROLLAIRE 15.- Soit $p_i : X_{i+1} \longrightarrow X_i$, $i \in \underline{\underline{N}}$, une suite d'éclatements permis telle que X_o soit excellent. Soit $x_i \in X_i$ une suite de points telle que $p_i(x_{i+1}) = x_i$, l'extension $k(x_{i+1})/k(x_i)$ étant séparable et x_{i+1} fermé dans $p_i^{-1}(x_i)$. La fonction

$$i \longmapsto (a(x_i,X_i), b(x_i,X_i))$$

(à valeurs dans les couples de suites) ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

On déduit le corollaire du théorème en prouvant que la longueur des suites a et b est bornée indépendamment de i . N. B. Les suites a et b sont évidemment stationnaires. Quant au théorème, voici, en gros, l'idée de la démonstration : en vertu de $C_x(X)/T_x(Y) = C_Y(X)_x$ (platitude normale), la singularité de X en x est la même que celle du cône normal $C_Y(X)_x$, celle-ci est plus mauvaise que celle de $\mathrm{Proj}(C_Y(X)_x)$ or cet espace projectif est la fibre en x de l'éclatement $X' \longrightarrow X$ et l'on compare cette fibre à X' en notant que l'immersion $X'_x \longrightarrow X'$ est régulière.

On aperçoit maintenant le principe de démonstration du grand théorème : montrer que l'on peut trouver un éclatement tel que les inégalités du th. 14 soient strictes et recommencer assez longtemps. Essayons de donner plus de détails.

6. La récurrence.

On formule le problème grâce à quatre énoncés fort précis que l'on démontre simultanément par une récurrence savante. Les énoncés et définitions nécessaires, trop longs et trop subtils, n'ont pas leur place ici, voir [4] et [5] . Nous nous contentons de suggérer une des idées. On travaille par récurrence sur la dimension n du schéma à résoudre X_o et sur celle N d'un schéma ambiant régulier $\underline{R}$.

Par un argument à la Mittag-Leffler, il résulte aisément du corollaire 15 qu'il suffit essentiellement de démontrer le

THÉORÈME 16.- Sous les hypothèses du grand théorème, si $V_o = X_o$, il existe une suite $f_i : X_{i+1} \longrightarrow X_i$, $1 \leq i < r$, d'éclatements permis telle que

(i) l'image par $X_n \longrightarrow X_o$ du lieu singulier de X_n se compose d'un nombre fini de points fermés,

(ii) pour tout $x' \in X_n$, fermé dans sa fibre, on a $a(x',X_n) > a(x,X_o)$, ou bien $a(x',X_n) = a(x,X_o)$ et $b(x',X_n) < b(x,X_o)$.

Il n'est pas trop difficile de trouver une suite d'éclatements permis telle que l'on ait (i). Quant à (ii), c'est moins simple. Ayant fait une suite d'éclatements permis pour obtenir (i), on considère $x' \in X_n$ tel que les suites a et b n'aient pas changé. Il faut trouver un éclatement permis dans X_n pour remédier à cela. Pour utiliser l'hypothèse, traduisons-la en termes de la fibre en x de $X_n \longrightarrow X$, où x est la projection de x'. Pour simplifier, supposons que $n = 1$. L'hypothèse signifie alors que x' est un point de $\mathrm{Proj}(C_Y(X)_x)$ dont la singularité est aussi mauvaise que celle du sommet de $C_Y(X)_x$. On voit bien que cela signifie que le cône $C_Y(X)_x$ est un cylindre de directrice non nulle W et que $x' \in \mathrm{Proj}(W)$. Plus précisément :

THÉORÈME 17.- Soient k un corps, T^* un espace vectoriel de dimension finie sur k, $S = \mathrm{Sym}_k(T^*)$, I un idéal gradué de S et x' un point fermé de $X' = \mathrm{Proj}(S/I)$ tel que $a(x',X') \leq a(x,C)$ pour l'ordre lexicographique, où $C = \mathrm{Spec}(S/I)$ et où x est le sommet de C. Alors x' appartient à la variété linéaire $\mathrm{Proj}(S/W^*S)$, où W^* est le sous-espace vectoriel de T^* qui définit la directrice de C (lemme 7).

Lorsque k est parfait, ce résultat se trouve essentiellement dans [4]. J'apprends que HIRONAKA vient de le démontrer sous la forme indiquée. Il semble qu'il sache établir sans hypothèse sur les caractéristiques résiduelles tous les résultats intermédiaires énoncés jusqu'ici. Il suffirait alors de généraliser l'énoncé du numéro suivant pour prouver le grand théorème sans hypothèse sur les caractéristiques résiduelles. On notera que ce résultat conjectural contient la résolution des "variétés arithmétiques". Dans cette direction, on doit à ABHYANKAR [1] le cas d'un schéma X fibré en courbes sur un anneau de DEDEKIND excellent à corps résiduels parfait (donc $\dim(X) = 2$).

7. Paramètres et équations stables.

Pour prouver l'assertion (ii) du th. 16, le th. 17 donne en gros l'espace tangent de l'éclatement permis cherché. Pour obtenir celui-ci il faut une meilleure prise sur l'anneau local de x'. On construit pour cela, au voisinage de x, des paramètres de l'espace ambiant régulier et des équations du schéma à résoudre qui possèdent de belles propriétés et qui en donnent d'autres, au voisinage de x', possédant les mêmes propriétés.

Soient R un anneau local régulier complet, de caractéristique résiduelle nulle, J un idéal de R, $A = R/J$, $X = \mathrm{Spec}(A)$, $\underline{R} = \mathrm{Spec}(R)$, x le point fermé de $\underline{R}$, M l'idéal maximal de R.

THÉORÈME 18.– Il existe $z_i \in M$, $1 \leq i \leq r$, faisant partie d'un système régulier de paramètres et un système f_j, $1 \leq j \leq m$, de générateurs de J tels que :

(i) pour tout $n \in \underline{\underline{N}}$, $n \geq 1$, si $t(n) = \dim R - b(x,X)(n)$, $z_1, \ldots, z_{t(n)}$ forment une base du vectoriel $W_x(X)(n)^*$ qui définit la directrice de $C_x(X)(n)$;

(ii) soit P un idéal de R tel que $Y = \mathrm{Spec}(R/P)$ soit régulier. Pour que l'éclatement Y soit permis pour X, il faut et il suffit que, pour tout $n \in \underline{\underline{N}}$ et tout a, $1 \leq a \leq m$, on ait $f_a \in M^n \Longrightarrow f_a \in P^n$;

(iii) (Stabilité) Pour toute suite $h_i : X_{i+1} \longrightarrow X_i$, $0 \leq i < n$, $X_o = X$, d'éclatements permis et tout $x' \in X_n$ fermé dans sa fibre et de projection x, tel que $a(x', X_n) = b(x,X)$, les transformés (z'_i) et (f'_j) de (z_i) et (f_j) possèdent les propriétés (i) et (ii) relativement aux anneaux locaux en x' des schémas éclatés $\underline{R}_n$ et X_n.

Remarque.– Le transformé de $g \in R$ par un éclatement est défini comme suit : g définit une hypersurface H de $\underline{R}$, on fait éclater $Y \cap H$ dans H, d'où une hypersurface H' de $\underline{R}'$ qui est définie localement par une équation g', connue à une unité près.

C'est sans doute le point le plus délicat du mémoire ; il semble que ce soit maintenant le seul résultat pour lequel on ait besoin que la caractéristique résiduelle soit nulle.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. ABHYANKAR - Resolution of singularities of arithmetical surfaces. Arithmetical algebraic geometry. Harper and Row, New York, 1965.

[2] S. ABHYANKAR - Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces. Academic Press, New York and London, 1966.

[3] J. DIEUDONNE et A. GROTHENDIECK - Eléments de Géométrie algébrique. Publications mathématiques de l'I.H.E.S., cité |EGA| .

[4] H. HIRONAKA - Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. Annals of Mathematics, vol. 79 (1964), p. 109-326.

[5] H. HIRONAKA - On resolution of singularities (characteristic zero). Proceedings of the international congress of mathematicians, 1962.

[6] J. WALKER - Reduction of singularities of an algebraic surface. Ann. of Math., 40(1939), p. 369-689.

[7] O. ZARISKI - Reduction of singularities of algebraic three dimensional varieties. Ann. of Math., 45 (1944), p. 472-542.

[8] O. ZARISKI - The problem of minimal models in the theory of algebraic surfaces. Amer. J. Math. 80, 1958, p. 146-184.