JEAN-PIERRE KAHANE

Sommes partielles des séries de Fourier

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. nº 310, p. 491-507
<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__491_0>

Séminaire BOURBAKI
18e année, 1965/66, n° 310

Juin 1966

SOMMES PARTIELLES DES SERIES DE FOURIER

d'après L. CARLESON

par Jean-Pierre KAHANE

Histoire du problème

A toute fonction $f \in L^1(-\pi,\pi)$ on associe sa série de Fourier

$$(1) \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{inx} \quad .$$

Les "sommes partielles" de (1) sont les

$$(2) \qquad S_n(x,f) = \sum_{-n}^{n} \hat{f}_m \, e^{imx} \quad .$$

f étant donnée, est-il vrai que $S_n(x,f)$ tende vers $f(x)$ en tout point x, resp. en presque tout point x, resp. en un point x au moins ?

Ce problème avait déjà été posé par Fourier. Pour en mesurer la difficulté, voici d'abord quelques résultats négatifs.

1. Il existe une f continue dont la série de Fourier diverge en un point (du Bois Reymond 1876 ; exemple classique, Fejer 1911)

2. Il existe une f sommable dont la série de Fourier diverge presque partout (Kolmogoroff 1923).

3. Il existe une f sommable dont la série de Fourier diverge partout (Kolmogoroff 1926).

4. Etant donné un ensemble E de mesure nulle, il existe une f continue dont la série de Fourier diverge sur E (Kahane-Katznelson 1965).

Aucun de ces exemples n'exclut l'hypothèse que, pour $p > 1$, toute $f \in L^p$ ait sa série de Fourier convergente presque partout. Pour $p = 2$, c'était là l'hypothèse de Lusin.

En fait, le comportement presque partout des sommes partielles (2) lorsque $f \in L^p$ a été l'objet d'études sérieuses. En 1965, les meilleurs résultats connus étaient les suivants :

1. Si $f \in L^1$, $S_n(x,f) = o(\log n)$ p.p. (Hardy)

2. Si $f \in L^2$, $S_n(x,f) = o(\sqrt{\log n})$ p.p. (Kolmogoroff-Seliverstoff 1925, Plessner 1926).

3. Si $f \in L^p$, $S_n(x,f) = o((\log n)^{1/p})$ p.p. (Littlewood-Paley 1931).

La cohérence de ces résultats et la grande difficulté du dernier avaient fait penser aux spécialistes qu'ils étaient vraisemblablement les meilleurs possibles. D'où un scepticisme, justifié jusqu'il y a quelques mois, à l'égard des démonstrations proposées de l'hypothèse de Lusin.

Là s'inscrivent les résultats de Carleson :

1. Si $f(\log^+|f|)^{1+\delta} \in L^1$ $(\delta > 0)$, $S_n(x,f) = o(\log \log n)$ p.p.

2. Si $f \in L^p$ $(p > 1)$, $S_n(x,f) = o(\log \log \log n)$ p.p.

3. Si $f \in L^2$, $S_n(x,f)$ est convergente p.p.

Quoique le manuscrit de Carleson soit assez court (37 pages), les démonstrations sont ardues ; on se bornera ici à donner une idée assez complète de celle du premier résultat, et très partielle de celle du dernier. Les estimations en o résultent très facilement d'estimations en O, et la convergence d'une estimation en $O(1)$; il s'agira donc d'obtenir pour $S_n(x,f)$ des estimations en O hors d'un ensemble de mesure petite.

Le dernier résultat de Carleson est définitif : pour chaque $p \geq 2$, les ensembles de divergence des $f \in L^p$ sont exactement les ensembles de mesure nulle ; il en est de même pour les fonctions continues. Les principaux problèmes qui restent sont les suivants :

1. Est-il vrai que pour toute $f \in L^1$ on ait $S_n(x,f) = o(\log \log n)$ p.p. ?

2. Est-il vrai que pour toute $f \in L^p$ $(p > 1)$ la série de Fourier converge p.p. ?

La méthode de Carleson

Au lieu d'étudier les sommes partielles (2), on peut étudier

$$\sum_{n}^{\infty} \hat{f}_m e^{imx}$$

ou aussi bien la transformée de Hilbert de $f(x)e^{-inx}$. Pour simplifier, on suppose f réelle, ce qui permet de prendre $n > 0$. On prolonge f par périodicité et on pose

$$(3) \qquad s(x,n) = \int_{-2n}^{2n} \frac{f(t)\, e^{-int}}{x - t}\, dt \qquad (x \in [-\pi,\pi]).$$

Si $s(x,n) = O(w_n)$, on a aussi $S_n(x,f) = O(w_n)$.

Plus généralement, pour un sous-intervalle ω^* de $[-2\pi,2\pi]$, on pose

$$(4) \qquad s(x,n,\omega^*) = \int_{\omega^*} \frac{f(t)e^{-int}}{x - t}\, dt\ .$$

Dans la suite, la longueur de ω^* sera de la forme

$$|\omega^*| = 4\pi . 2^{-j}$$

Si $n|\omega^*|$ est multiple de 2π, c'est-à-dire n multiple de 2^{j-1}, on dit que n est <u>adapté</u> à ω^*.

Lorsque x est plus près du milieu de ω^* que des extrémités on dit que x est <u>strictement intérieur</u> à ω^*, ou que ω^* <u>entoure</u> x. Dans ce cas, (4) est majoré par la transformée de Hilbert maximale de $f(t)e^{-int}$, convenablement définie. Cette dernière remarque ne sera utilisée que pour $n = 0$, et tous nos efforts vont tendre à nous ramener, par étapes, à ce cas.

On commence par se donner un entier N, et on se restreint aux $n \in [2^{N-1}, 2^N]$. On définit (et c'est très laborieux) un ensemble exceptionnel $X \subset [-\pi,\pi]$. Pour $x \notin X$, on définit une suite finie de couples (n_j, ω_j^*) de sorte que

1°) $n_o = n$, $\omega_o^{**} = -2\pi, 2\pi$

2°) $\omega_j^{**} \subset \omega_{j-1}^{**}$, et ω_j^{**} entoure x $(j = 1,2,\ldots)$

3°) n_j soit adapté à ω_j^{**} $(j = 1,2,\ldots)$

4°) le dernier des n_j soit nul, soit $n_\nu = 0$.

Pour majorer $s(x,n)$, on écrit

$$(5) \quad \begin{cases} s(x,n_j,\omega_j^{**}) = s(x,n_j,\omega_{j+1}^{**}) + R_j(x) \\ e^{in_jx} s(x,n_j,\omega_{j+1}^{**}) = e^{in_{j+1}x} s(x,n_{j+1},\omega_{j+1}^{**}) + S_j(x) \end{cases}$$

et par conséquent

$$(6) \quad |s(x,n)| \leqq \sum_{j=0}^{\nu-1} (|R_j(x)|+|S_j(x)|) + |s\ (x,0,\omega_\nu^{**})|$$

On s'efforce simultanément de rendre la mesure de X petite et le second membre de (6) pas trop grand.

Ce schéma vaut pour les trois théorèmes de Carleson. C'est la définition de X qui change d'un cas à l'autre. On va donner la construction de X dans le premier cas (en se restreignant, pour simplifier, à $f \in L^p$, $p > 1$) et obtenir l'estimation en $O(\log \log n)$. Puis on indiquera les idées nouvelles qui permettent de conclure dans le cas $f \in L^2$.

Les principaux lemmes.

Lemme 1. Soit $f \in L^1(\omega^{**})$, x un point strictement intérieur à ω^{**}. En désignant génériquement par σ un sous-intervalle de ω^{**} qui entoure x, la mesure de l'ensemble des $x \in \omega^{**}$ tels que

$$(7) \quad \sup_\sigma \left| \int_\sigma \frac{f(t)}{x-t}\, dt \right| > \lambda_1$$

tend vers zéro quand $\lambda_1 \to \infty$.

Classique (Zygmund I, p. 279).

Lemme 2. Soit $E \in L^\infty(\omega^{**})$, et σ comme ci-dessus. La mesure de l'ensemble T des $x \in \omega^{**}$ tels que

$$(8) \qquad \sup_\sigma \left| \int_{\omega^{**}\setminus\sigma} \frac{E(t)}{x-t}\, dt \right| > \lambda \|E\|_\infty$$

satisfait à

$$(9) \qquad \text{mes } T \leqq C\, e^{-c\lambda}\, |\omega^{**}|$$

(C désigne une constante absolue grande, et c une constante absolue petite ; on pourra éventuellement les modifier, d'une formule à l'autre, pour que toutes les inégalités déjà écrites soient valables).

C'est un théorème du type maximal de Hardy-Littlewood (Zygmund I, p. 155).

Lemme 3. Soit Ω un partage de ω^{**} en sous-intervalles ω_κ. Soit t_κ le milieu de ω_κ, et

$$(10) \qquad \Delta(x) = \sum \frac{|\omega_\kappa|^2}{(x-t_\kappa)^2 + |\omega_\kappa|^2} \qquad x \in \omega^{**}.$$

Le mesure de l'ensemble V des $x \in \omega^{**}$ tels que

$$(11) \qquad \Delta(x) > \lambda$$

satisfait à

$$(12) \qquad \text{mes } V \leqq C\, e^{-c\lambda}\, |\omega^{**}| .$$

Carleson donne une preuve assez simple, utilisant le fait que, pour toute fonction sommable g on a :

$$\int \Delta(x) g(x)\, dx = \pi \sum |\omega_\kappa|\, g(t_\kappa, |\omega_\kappa|) \quad ,$$

$g(x,y)$ désignant le prolongement harmonique de g dans le demi-plan $y > 0$.

Lemme 4. Soit $\bar\omega$ un intervalle, et $\phi \in L^1(\bar\omega)$. On pose

$$(13) \qquad \gamma(\bar\omega,\phi) = \gamma(\bar\omega) = \frac{1}{|\bar\omega|} \sup_{\alpha,\beta \in \bar\omega} \left| \int_\alpha^\beta \phi(t)\, dt \right| .$$

a) pour toute fonction g à variation bornée sur $\bar\omega$, on a

$$(14) \qquad \frac{1}{|\bar\omega|} \left| \int_{\bar\omega} \phi g \right| \leqq \phi(\bar\omega)\, \left(V(g) + \min_{t\in\bar\omega} |g(t)|\right)$$

c) si $\bar{\omega}'$ est un sous-intervalle de $\bar{\omega}$,

$$(15)\qquad \gamma(\bar{\omega}) \geqq \frac{|\bar{\omega}'|}{|\bar{\omega}|}\,\gamma(\bar{\omega}')$$

d) si les $\bar{\omega}_k$ forment un partage de $\bar{\omega}$,

$$(16)\qquad \gamma(\bar{\omega}) \leqq \sup_k \gamma(\bar{\omega}_k).$$

Calculs élémentaires.

Lemme 5. On pose ici

$$(17)\qquad \gamma(n,\bar{\omega}) = \gamma(\bar{\omega}, f(t)e^{-int}).$$

Si $f \in L^p(\bar{\omega})$, $1 < p < 2$, le nombre des n adaptés à $\bar{\omega}$ tels que

$$(18)\qquad |\gamma(n,\bar{\omega})| > b$$

ne dépasse pas $K\, b^{-q'}$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} < 1,\ K = K(f,q')\right)$.

En effet, prenons pour simplifier $\bar{\omega} = [-\pi,\pi]$; alors les n sont des entiers ordinaires, et, d'après les définitions (13) et (17), on a :

$$(19)\qquad \gamma(n,\bar{\omega}) \leqq |\hat{f}_n| + 2 \sum_{m\neq 0} \frac{|\hat{f}_{m+n}|}{|m|}.$$

Dans le second membre on a la convolution de $\hat{f}$ et d'une suite qui appartient à $\ell^{1+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$. Comme, pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$(20)\qquad \left(\sum |\hat{f}_n|^q\right)^{1/q} \leqq ||f||_p \qquad \text{(Young)},$$

on a

$$(21)\qquad \left(\sum |\gamma(n,\bar{\omega})|^{q'}\right)^{1/q'} \leqq K||f||_p \qquad (q' > q)$$

d'où le résultat.

Les ensembles exceptionnels

1. L'ensemble S ; les intervalles ω et ω^*.

On considère tour à tour les intervalles $[-\pi,0]$, $[0,\pi]$, $[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$, $[-\frac{\pi}{2},0]$, $[0,\frac{\pi}{2}]$, $[\frac{\pi}{2},\pi]$, $[-\pi,-\frac{3\pi}{4}]$, ..., de longueur $\frac{\pi}{2^\nu}$ $(\nu = 0,1,\ldots)$, qu'on désigne génériquement par ω. On désigne génériquement par ω^* la réunion de deux ω égaux et adjacents ; en particulier :

(22) $\quad \omega_0^{**} = [-2\pi, 2\pi]$.

On donne $\lambda_0 > 1$. On définit S_0 comme la réunion des ω tels que

(23) $$\frac{1}{|\omega|}\int_\omega |f|^p > \lambda_0 \int_{-\pi}^{\pi} |f|^p$$

et S comme la réunion des ω^{**} correspondants. On peut construire S_0 comme une réunion de ω disjoints satisfaisant (23), donc

(24) $$\text{mes } S_0 < \frac{1}{\lambda_0} \quad , \quad \text{mes } S < \frac{3}{\lambda_0} .$$

De plus, pour tout ω^{**} non contenu dans S, on a

(25) $$\frac{1}{|\omega^{**}|}\int_{\omega^{**}} |f|^p \leqq \lambda_0 \int_{-\pi}^{\pi} |f|^p$$

2. L'ensemble V.

C'est l'ensemble des $x \in [-\pi, \pi]$ défini au lemme 1, formule (7) $(\omega^{**} = \omega_0^{**})$. Sa mesure est petite si λ_1 est grand.

3. Les partages $\Omega = \Omega_N(n, \omega^{**})$.

Avant de définir les autres ensembles exceptionnels, quelques constructions sont nécessaires. N désigne un entier fixé, grand, n un entier adapté à ω^{**}, et on suppose ω^{**} non contenu dans S.

On définit une suite b_k très rapidement décroissante

(26) $$b_k = 2(2\pi\lambda_0)^{1/p} ||f||_p \, 2^{-9^k} \qquad (k = 0, 1, \ldots).$$

Comme, d'après (25), on a

(27) $$\gamma(n, \omega^{**}) \leqq (2\pi\lambda_0)^{1/p} ||f||_p \quad ,$$

il existe un $k = k(n, \omega^{**})$ tel que

(28) $$b_{k+1} < \gamma(n, \omega^{**}) \leqq b_k .$$

Si $k(n, \omega^{**}) = 0$, on définit Ω comme l'ensemble des ω de longueur $\frac{\Pi}{2^N}$ contenus dans ω^{**}.

Si $k(n, \omega^{**}) \geqq 1$, on considère tout à tour, par ordre de longueurs décroissantes et de gauche à droite, tous les ω de longueurs $\geqq \frac{\Pi}{2^N}$ contenus dans ω^{**}. Lorsque ω est une moitié de ω^{**}, le lemme 4 (formule (15)) donne

(29) $$\gamma(n, \omega) \leqq 2\gamma(n, \omega^{**}) \leqq 2b_k \leqq 2^{-7} b_{k-1}$$

Cavenons de dire que ω est bon si

(30) $\quad \gamma(n,\omega) \leqq 2^{-3} b_{k-1}$

et mauvais sinon ; (29) entraîne que les premiers ω sont bons. Au premier ω mauvais, on hachure l'intervalle ω double qui le contient (et qui, lui, est bon). Au premier mauvais ω non contenu dans l'ensemble hachuré, on hachure l'intervalle ω double qui le contient, et ainsi de suite. On définit Ω comme l'ensemble des intervalles hachurés, et éventuellement des intervalles de longueur $\cdot \frac{\Pi}{2^N}$ non hachurés. Observons que tous les intervalles ω hachurés sont bons, mais que l'une au moins de leurs moitiés est mauvaise. Donc, d'après le lemme 4 encore,

(31) $\quad \gamma(n,\omega) > 2^{-4} b_{k-1}$.

4. <u>Les fonctions</u> $E(t) = E_N(t,n,\omega^{*})$ et $\Delta(t) = \Delta_N(t,n,\omega^{*})$.

N, n, ω^{*} ont le même sens que ci-dessus. Si $\omega \in \Omega$, on définit

(32) $\quad E(t) = \frac{1}{|\omega|} \int_\omega f(t) e^{-int} dt \quad$ pour $\quad t \in \omega$.

D'après la définition de $\gamma(n,\omega)$ ((13) et (17)), on a

(33) $\quad |E(t)| \leqq \gamma(n,\omega) \quad$ pour $\quad t \in \omega$.

Donc, d'après (30) et la définition de Ω,

(34) $\quad E \in L^\infty(\omega^{*})$ et $||E||_\infty < 2^{-3} b_{k-1}$.

$\Delta(t)$ est défini au lemme 3 (formule (10)).

5. <u>Les ensembles</u> $\quad W = W_{N,\lambda}(n,\omega^{*})$.

N, n, ω^{*} ont toujours le même sens, λ est un réel positif. A partir de ω^{*}, $E(t)$, $\Delta(t)$, λ, on a défini aux lemmes 2 et 3 des ensembles T et V, contenus dans ω^{*}. On définit W comme leur réunion. On a donc

(35) $\quad \text{mes } W \leqq C\, e^{-c\lambda} |\omega^{*}|$.

6. <u>L'ensemble</u> $Y = Y_N$.

N est fixe. On considère tous les couples (n,ω^{*}) possibles, où ω^{*} est la réunion de deux intervalles ω adjacents de longueurs $\geqq \frac{\Pi}{2^N}$, et

n est un entier adapté à ω^{*}. Pour chaque couple, on a défini $k = k(n,\omega^{*})$ par (28). On pose maintenant :

$$(36) \quad \lambda = \lambda(n,\omega^{*},N) = \frac{2}{c} \log N \quad b_{k-1}^{-1/2}\, b_{o}^{1/2}$$

et on définit Y comme la réunion des $W_{N,\lambda}(n,\omega^{*})$ correspondant à tous les couples (n,ω^{*}).

Le choix de λ par (36) est destiné à obtenir une bonne majoration de mes Y. D'après (35), cette mesure est majorée par

$$(37) \qquad C \sum e^{-c\lambda}\, |\omega^{*}|\ ,$$

la somme étant étendue à tous les couples (n,ω^{*}). Sommons d'abord lorsque ω^{*} et k, donc λ, sont fixés. D'après le lemme 5 et la définition de $k(n,\omega^{*})$ (28), le nombre de valeurs de n à considérer ne dépasse pas $K\, b_{k+1}^{-q'}$ $\quad (K = K(f,q'))$.

Donc (37) est majorée par

$$(38) \qquad C\, K \sum b_{k+1}^{-q'}\; e^{-2 \log N\, b_{k+1}^{-1/2}\, b_{o}^{1/2}}\; |\omega^{*}|$$

la somme étant prise pour tous les k et ω^{*}. Sommant par rapport à k, on obtient

$$(39) \qquad K'\, N^{-2} \sum |\omega^{*}| \qquad\qquad (K' = K'(f,q',\lambda_{o}))$$

la somme étant prise pour tous les ω^{*}. Or, si l'on fixe la longueur de ω^{*}, $\sum |\omega^{*}| \leq 4\pi$. Comme il y a $N+2$ longueurs possibles, (39) est majoré par $K''N^{-1}$, soit

$$(40) \qquad \text{mes } Y \leq K''N^{-1} \qquad\qquad (K'' = K''(f,q',\lambda_{o})).$$

En comparant (26) et (38), on voit que K' et K'' sont proportionnels à $\lambda_{o}^{-q'/p}$. En conséquence, la mesure de Y est petite devant $\frac{1}{N}$ quand λ_{o} est grand.

7. <u>L'ensemble</u> X.

C'est la réunion de S, V, et des Y_{N} lorsque N parcourt toutes les puissances de 2. Sa mesure est petite lorsque λ_{o} et λ_{1} sont grands.

Les majorations

Reprenons les formules (3) et (4). Prenons pour N une puissance de 2, et supposons

(41) $|\omega^*| > \frac{2\Pi}{2^N}$ (les ω^* sont définis p. 8).

(42) $2^{N-1} \leqq n \leqq 2^N$, n entier

(43) x strictement intérieur à ω^* (voir p. 4)

et $x \notin X$

On va montrer que $|s(x,n,\omega^*)|$ ne varie pas trop lorsque 1°) on change n en un entier pas trop éloigné 2°) n étant adapté à ω^*, on change ω^* en un certain intervalle plus petit, entourant toujours x, qu'on notera $\omega^*(x)$ (il dépend en vérité de x, n et ω^*). On montrera aussi que $\gamma(m,\omega^*(x))$ est compris entre b_k et b_{k-1} lorsqu'on a (28) et que m n'est pas trop éloigné de n.

Première majoration

On a

(44) $$e^{inx}s(x,n,\omega^*) = \int_{\omega^*} f(t) \frac{e^{in(x-t)}}{x-t} dt$$

donc

(45) $$\begin{cases} e^{inx}s(x,n,\omega^*) - e^{imx}s(x,m,\omega^*) = \int_{\omega^*} f(t)k(x-t)dt \\ k(t) = \frac{e^{int}-e^{imt}}{t} = e^{int}\frac{1-e^{i(m-n)t}}{t} \end{cases}$$

On peut appliquer le lemme 4 (formule (14)) avec

$$\phi(t) = f(t)\, e^{-int}$$

$$g(t) = \frac{1-e^{i(m-n)(x-t)}}{x-t}$$

On obtient

(46) $$|e^{inx}s(x,n,\omega^*) - e^{imx}s(x,m,\omega^*)| \leqq$$

$$\leqq \gamma(n,\omega^*)\ |m-n|\,|\omega^*|\ \log(C+|m-n|\,|\omega^*|\ )$$

En particulier, si $|n-m||\omega^{**}| \leq 2\pi$, on a

$$(47) \qquad |e^{inx}s(x,n,\omega^{**}) - e^{imx}s(x,m,\omega^{**})| \leq C\,\gamma(n,\omega^{**})$$

Définition de $\omega^{*}(x)$

On suppose maintenant, outre (41), (42), (43), que n est adapté à ω^{**}. On considère les $\omega \in \Omega_N(n,\omega^{**})$ tels que x soit à une distance de ω inférieure à $\frac{|\omega|}{2}$; en d'autres termes, tels que l'un au moins des intervalles $\tilde{\omega}$, réunion de ω et d'un intervalle adjacent égal, entoure x. On choisit un tel ω le plus grand possible, soit $\omega(x)$, et on appelle $\omega^{*}(x)$ l'intervalle $\tilde{\omega}$ correspondant qui entoure x (ou, arbitrairement, l'un des deux $\tilde{\omega}$ si les deux entourent, c'est-à-dire si x est milieu de ω).

Propriété de $\omega^{*}(x)$.

1. $\omega^{*}(x)$ entoure x

2. $\omega(x)$ et $\omega^{*}(x)$ ont en commun une extrémité. L'autre extrémité de $\omega^{*}(x)$ ne peut pas être intérieure à un $\omega \in \Omega$, car alors on aurait $|\omega| > |\omega(x)|$ et dist.$(x,\omega) < \frac{|\omega|}{2}$, contrairement à la définition de $\omega(x)$. Donc $\omega^{*}(x)$ est une réunion d'intervalles du partage Ω ; de même pour $\omega^{**} - \omega^{*}(x)$.

3. Soit $\omega_\kappa \in \Omega$, $\omega_\kappa \not\subset \omega^{*}(x)$, et t_κ le milieu de ω_κ ; on a dist.$(x,\omega_\kappa) \geq \frac{|\omega_\kappa|}{2}$. Donc, si $t \in \omega_\kappa$, on a

$$(48) \qquad (x-t)^2 \geq \frac{1}{4}(x-t_\kappa)^2 \geq \frac{1}{8}\left((x-t_\kappa)^2 + |\omega_\kappa|^2\right)$$

Seconde majoration

On suppose de nouveau n adapté à ω^{**}. Ecrivons :

$$(49) \qquad s(x,n,\omega^{**}) = s(x,n,\omega^{*}(x)) + R(x).$$

Pour majorer $R(x)$, on l'écrit comme somme de deux termes

$$(50) \qquad R_1(x) = \int_{\omega^{**}\setminus\omega^{*}(x)} \frac{E(t)}{x-t}\,dt$$

$$(51) \qquad R_2(x) = \int_{\omega^{**}\setminus\omega^{*}(x)} \frac{f(t)e^{-int} - E(t)}{x-t}\,dt ,$$

où $E(t) = E_N(t,n,\omega^{**})$ est la fonction définie p. 8 (32).

Comme par hypothèse $x \notin W_{N,\lambda}(n,\omega^{**})$ (λ étant définie par (36)), (8) n'a pas lieu, c'est-à-dire que

$$(52) \qquad |R_1(x)| \leqq \lambda ||E||_\infty$$

D'après (34) et (36),

$$(53) \qquad |R_1(x)| \leqq \frac{2^{-2}}{c} (b_{k-1}b_o)^{1/2} \log N$$

Pour évaluer (51), on intègre par parties sur chaque ω contenu dans $\omega^{**}\setminus\omega^{**}(x)$. Comme, par définition de $\gamma(n,\omega)$ et de $E(t)$ (voir (17) et (32)), on a

$$(54) \qquad \int_\alpha^\beta (f(t)e^{-int} - E(t))dt \leqq 2|\omega|\gamma(n,\omega)$$

quand α, $\beta \in \omega$, et que, par définition de Ω , on a $\gamma(n,\omega) \leqq 2^{-3}b_{k-1}$

on a

$$(55) \qquad |R_2(x)| \leqq 2^{-2}b_{k-1} \sum_{\substack{\omega\,\varepsilon\,\Omega \\ \omega\subset\omega^{**}\setminus\omega^{*}(x)}} \int \frac{|\omega|\,dt}{(x-t)^2}$$

donc, d'après (48) et la définition de $\Delta(x)$ p. 5 (10),

$$(56) \qquad |R_2(x)| \leqq 2b_{k-1}\ \Delta(x).$$

Comme par hypothèse $x \in W_{N,\lambda}(n,\omega^{**})$, on n'a pas (11), c'est-à-dire que

$$(57) \qquad \Delta(x) \leqq \lambda$$

Donc

$$(58) \qquad |R_2(x)| \leqq \frac{4}{c} (b_{k-1}\ b_o)^{1/2} \log N$$

En rassemblant (53) et (58), on a finalement

$$(59) \qquad |R(x)| \leqq C\ (b_{k-1}\ b_o)^{1/2} \log N$$

Troisième majoration

Mêmes hypothèses que ci-dessus. D'après le lemme 4 (formule (16)) et la propriété 2 de $\omega^{**}(x)$, on a

$$(60) \qquad \gamma(n,\omega^{**}(x)) \leqq \sup_{\omega\varepsilon\Omega} \gamma(n,\omega)$$

donc (30)

(61) $\quad \gamma(n,\omega^{**}(x)) \leqq 2^{-3}b_{k-1}$

D'après le lemme 4 encore (formule (14)), on a, pour tout entier m,

$$(62)\quad \begin{cases} \gamma(m,\omega^{**}(x)) \leqq (1+|\omega^{**}(x)|\,|m-n|)\gamma(n,\omega^{**}(x)) \\ \gamma(n,\omega^{**}(x)) \leqq (1+|\omega^{**}(x)|\,|m-n|)\gamma(m,\omega^{**}(x)) \end{cases}$$

donc si, $|\omega^{**}(x)|\,|m-n| \leqq 2\pi$,

(63) $\quad \gamma(m,\omega^{**}(x)) \leqq b_{k-1}$

Si $|\omega^{**}(x)| > \frac{2\pi}{2^N}$, l'une des moitiés de $\omega^{**}(x)$ est un intervalle hachuré, pour lequel nous avons établi (31). D'après le lemme 4 toujours (formule (15)), on a

(64) $\quad \gamma(m,\omega^{**}(x)) > 2^{-5}b_{k-1}$

Si de plus $|\omega^{**}(x)|\,|m-n| \leqq 2\pi$, (62), (63) et (64) donnent

(65) $\quad b_k < \gamma(m,\omega^{**}(x)) \leqq b_{k-1}$

formule qu'on pourra comparer à (28).

<u>L'estimation en</u> $O(\log\log n)$

On exécute maintenant le programme tracé p. 3

Soit $x \notin X$, N une puissance de 2, $2^{N-1} \leqq n \leqq 2^N$. La somme $s(x,n)$ (formule (3)) s'écrit $s(x,n_o,\omega_o^*)$ (formule (4)) avec $n_o = n$, $\omega_o^{**} = [-2\pi,2\pi]$. On définit

$$k_o = k(n_o,\omega_o^{**})$$

par (28), puis on définit, pour $j = 0,1,2,\ldots$

$$(66)\quad \begin{cases} \omega^{**}_{j+1} = \omega^{**}(x) \quad \text{lorsque } n = n_j \text{ et } \omega^{**} = \omega_j^{**} \\ n_{j+1} = \text{le plus grand entier} \leqq n_j, \text{ adapté à } \omega^{**}_{j+1} \\ k_{j+1} = k(n_{j+1},\omega^{**}_{j+1}). \end{cases}$$

On s'arrête à la première valeur de j pour laquelle $n_j = 0$, soit $j = \nu$. Si $|\omega_j^{**}| = \frac{2\pi}{2^N}$ on a $j = \nu$, et, comme $|\omega_j^{**}|$ diminue au moins de moitié à chaque étape, on a $\nu \leqq N+2$. D'après (65), on a $k_{j+1} = k_j - 1$ $(j < \nu)$.

Si l'on écrit (5), on a, d'après les majorations (59) et (47)

$$\sum_{j=0}^{\nu-1} |R_j(x)| \leqq C \log N \sum_{\ell=0}^{\infty} (b_\ell b_o)^{1/2}$$

$$\sum_{j=0}^{\nu-1} |S_j(x)| \leqq C \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell$$

et enfin, comme $x \notin V$, on a

$$(68) \qquad |s(x,0,\omega_\nu^*)| \leqq \lambda_1$$

En écrivant (6), on obtient

$$(69) \qquad |s(x,n)| \leqq \lambda_1 + C \sum_0^\infty b_\ell + C \log N \sum_0^\infty (b_{\ell-1} b_o)^{1/2}$$
$$= \lambda_1 + C \lambda_0^{1/p} ||f||_p \log \log n$$

et comme cette majoration vaut sur un ensemble X de mesure aussi petite qu'on veut, on a bien, sous l'hypothèse $f \in L^p$,

$$(70) \qquad S_n(x,f) = O(\log \log n) \quad \text{p.p.}$$

Une simple amélioration de l'inégalité de Young (20) permet de remplacer l'hypothèse $f \in L^p$ par l'hypothèse $f(\log^+ f)^{1+\delta} \in L^1$. L'étude du cas $f \in L^1$ se heurte au fait qu'on n'a pas d'analogue de Young.

<u>Cas</u> $f \in L^2$. <u>Les idées naturelles</u>

Pour améliorer l'estimation en $O(\log \log n)$, la première idée est de choisir au lieu de (36) un $\lambda = \lambda(n,\omega^*)$ indépendant de N. Alors (52), (56), (57) permettent au lieu de (59) une majoration indépendante de N, d'où finalement $O(1)$ au lieu de $O(\log N)$.

Malheureusement, l'évaluation (37) de la somme des mesures des ensembles $W_{N,\lambda}(n,\omega^*)$ constituant l'ensemble exceptionnel Y (p. 8 et 9) augmente alors indéfiniment quand N tend vers l'infini.

La seconde idée est de changer la définition de Y, en ne considérant que les $W_{N,\lambda}(n,\omega^*)$ correspondant à certains couples (n,ω^*), de façon que (37) soit bornée quand $N \to \infty$.

Malheureusement, comme on s'en assure sur le simple exemple $f = 1$, la définition des couples (n_j, ω_j^*) p. 16 (66) fait intervenir tous les intervalles ω^*, de sorte que, même en restreignant le nombre des couples (n, ω^*), (37) sera toujours supérieur à N.

La troisième idée est de changer la définition des couples (n_j, ω^*) de façon qu'ils appartiennent à un ensemble de (n, ω^*) pour lequel la somme (37) est bornée indépendamment de N.

Malheureusement, si l'on n'a que peu de couples (n, ω^*) à sa disposition, les majorations (46) et (47) seront inutilisables.

La quatrième idée consiste à améliorer l'estimation de $|s(x,n,\omega^*)|-|s(x,m,\omega^*)|$ en s'inspirant du fait, bien évident sur l'exemple $f = 1$, que la restriction de f à ω^* est somme d'un polynôme trigonométrique significatif (ici 1) et d'un reste petit (ici 0).

En gros, ce sont bien là les idées naturelles que Carleson exploite (dans l'ordre opposé, naturellement), mais il y faut encore beaucoup de travail. On se bornera dans ce qui suit à expliciter les polynômes significatifs.

Les polynômes de Carleson

On donne $f \in L^2(-\pi,\pi)$, et $b > 0$. Pour chaque suite de segments ω_j emboîtés décroissants ($\omega_o = [-\pi,\pi]$, chaque ω_j a pour longueur $\frac{2\pi}{2^j}$, et ω_{j+1} a une extrémité commune avec ω_j) on définit une suite de polynômes trigonométriques

$$(71) \qquad p_j = p(.,\omega_j,b)$$

de la manière suivante : p_o est la somme des termes de la série de Fourier de f dont les modules dépassent b, et p_{j+1} est la somme des termes de la série de Fourier de la restriction de $f-(p_o+\ldots+p_j)$ à ω_j (elle ne contient que des fréquences adaptées à ω_j) dont les modules dépassent b. Les polynômes de Carleson sont définis par

$$(72) \qquad P_j(x) = P(x,\omega_j,b) = p_o(x)\dot{+}\ldots\dot{+}p_j(x) \qquad (x \in \omega_j) \quad ,$$

le signe $\dot{+}$ signifiant que les monômes dans P_j sont par définition ceux qui figurent dans le second membre de (72) (par exemple, $2 \neq 1 \dot{+} 1$).

A chaque $x \in [-\pi,\pi]$ sauf un dénombrable correspond une suite de ω_j emboîtés contenant x, donc une suite de polynômes P_j. Soit $A(\omega_j)$ la somme des carrés des modules des coefficients de P_j, et $A(x) = \lim\limits_{j\to\infty} A(\omega_j)$. On a

$$(73) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} A(x)dx = \int_{\omega_0} |p_0^2| + \dots + \sum_{\omega_j} \int_{\omega_j} |p_j^2| + \dots$$

$\sum\limits_{\omega_j}$ signifiant une somme prise pour les 2^j intervalles ω_j de longueur $\frac{2\Pi}{2^j}$. Donc (Parseval)

$$(74) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} A(x)dx \leqq \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \quad .$$

Hors d'un ensemble exceptionnel $Z = Z(b)$

$$(75) \qquad Z = \{x \mid A(x) > b^{-1}\}$$

le nombre de termes de $P_j(x)$ ne dépasse pas b^{-3}, et la somme des modules de ces termes ne dépasse pas b^{-2} (Schwarz) . D'après (74), la mesure de Z ne dépasse pas $b\ (\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2)^{1/2}$.

Les polynômes de Carleson servent à évaluer

$$(76) \qquad e^{inx}\, s(x,n,\omega^*) - e^{imx}\, s(x,m,\omega^*)$$

plus précisément qu'en (46). En effet, pour évaluer (76), on y remplace tour à tour f par P et par $f - P$, et on ajoute. On s'arrange pour que 1°) $\gamma(n, \omega^*; f - P)$ soit petit 2°) on ait un bon contrôle sur les termes de P qui se trouvent entre n et m.

L'ensemble exceptionnel qui remplace Y nécessite une définition soigneuse, qu'il serait trop long de donner ici. Essentiellement, on définit des couples (n,ω^*) "permis" et on prend le réunion des $W_{N,\lambda}$ (n,ω^*) correspondants. La partie réellement délicate consiste à définir ensuite les couples (n_j,ω_j^*) de façon qu'ils soient des couples permis.

L'étude du cas $f \in L^p$ $(1 < p < 2)$ se heurte au fait que, faute de Parseval, on n'a pas d'analogue de (74) et (75).

REFERENCES

L. CARLESON — On convergence and growth of partial sums of Fourier series, à paraître à Acta Mathematica

A. ZYGMUND — Trigonometric Series, Cambridge 1959