

SÉMINAIRE N. BOURBAKI

PAUL KRÉE

Intégrales singulières

Séminaire N. Bourbaki, 1966, exp. n° 298, p. 309-321

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1964-1966__9__309_0>

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INTÉGRALES SINGULIÈRES

par

Paul KRÉE

Considérons les groupes additifs $X = \mathbb{R}_x^n$ et $\Xi = \mathbb{R}_\xi^n$ mis en dualité par les caractères

$$e^{2\pi i x \xi} \quad \text{avec} \quad x \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n .$$

Soit $|x| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, Σ la sphère unité de X et \dot{X} le complémentaire de l'origine dans X . Calderon et Zygmund ([2]) ont étudié les distributions v.p.k. définies de la façon suivante à partir d'une fonction $k : \dot{X} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

A') k est homogène de degré $-n$: $k(\lambda x) = \lambda^{-n} k(x)$

B') k a une intégrale nulle sur Σ : $\int_{|\mathbf{x}|=1} k = 0$

C') k vérifie certaines conditions de régularité (ex. : $k \in L^\infty(\Sigma)$) .

Notant pour tout $\varepsilon > 0$, k_ε la restriction de k au complémentaire de la boule où $|x| \leq \varepsilon$, on a :

D') v.p.k. = \lim dans $\mathcal{D}'(X)$ des distributions k_ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. On a pris l'habitude d'appeler intégrales singulières de Calderon-Zygmund les opérateurs de convolution par de telles distributions. De telles distributions sont très utiles en analyse. F. Jones ([11]) et Arnèse ([1]) ont introduit des distributions v.p.k. définies de la façon suivante à partir d'un noyau k tel que

(on pose $x = (x', x_n)$; a_n est une constante positive donnée)

A'') k vérifie certaines conditions d'homogénéité :

$$k(\lambda x', \lambda^{a_n} x_n) = \lambda^{-a_n - n + 1} k(x)$$

B'') k est nulle si $x_n < 0$ et $\int k(x', 1) dx' = 0$.

C'') La restriction de k à l'hyperplan $x_n = 1$ vérifie certaines inégalités.

Si k_ε désigne la restriction de k au demi-espace où $x_n \geq \varepsilon$, on a :

D'') v.p.k. = lim dans $\mathcal{D}'(X)$ des distributions k_ε .

F. Jones a montré que ces distributions envoient par convolution $L^p(X)$ dans $L^p(X)$ si $1 < p < \infty$; et ce résultat a des applications aux équations paraboliques (voir ([7])). Nous nous sommes posé la question (voir [13])

- de voir le rapport qui existe entre ces deux types de distributions (par exemple en cherchant une classe qui les "contienne" ; voir § 2)

- d'étendre à cette classe les propriétés des distributions D') (voir §§ 3 et 4)

- de commencer l'étude des applications de ces distributions (voir § 5).

Il est facile d'écrire la condition A) généralisant A') et A''); pour trouver la condition B) contenant B') et B'') nous avons été amenés à étudier les distributions sur \mathbb{R}_x^n vérifiant des conditions d'homogénéité dissymétriques par rapport aux différentes variables :

§ 1. Distributions quasihomogènes.

On se donne une famille $a = (a_1, \dots, a_n)$ de n nombres $a_i > 0$. (Toutes les distributions ou fonctions sont supposées à valeurs complexes.)

Définition 1.

Pour toute distribution $T \in \mathcal{D}'(X)$ (resp. $\mathcal{D}'(\dot{X})$) et tout $\lambda > 0$, notons λ^T la distribution sur X (resp. \dot{X}) transportée par le difféomorphisme

$$(1) \quad x \rightarrow (\lambda^{-a_1} x_1, \dots, \lambda^{-a_n} x_n).$$

1. Pour tout α complexe, $\Phi_\alpha(X)$ (resp. $\Phi_\alpha(\dot{X})$) désigne l'ensemble des distributions $T \in \mathcal{D}'(X)$ (resp. $\mathcal{D}'(\dot{X})$) qui sont quasihomogènes de degré α , c'est-à-dire telle que

$$(2) \quad \forall \lambda > 0, \quad \lambda^T = \lambda^{\alpha T}$$

2. $F_\alpha(\dot{X})$ désigne l'ensemble des fonctions C^∞ sur \dot{X} qui sont quasihomogènes de degré α .

3. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, α' désignera toujours le nombre tel que

$$(3) \quad \alpha + \alpha' + |\mathbf{a}| = 0 \quad ; \quad \text{avec} \quad |\mathbf{a}| = \sum_{i=1}^n a_i .$$

L'étude de $\hat{\Phi}_\alpha(X)$ s'effectue en s'inspirant de l'étude des distributions homogènes faite dans ([6]) par Gårding et en utilisant de "bonnes coordonnées polaires dans X": soit γ une fonction de $F_1(\dot{X})$ à valeurs > 0 ; soit Σ la variété $\gamma^{-1}(1)$. Pour tout $x \in \dot{X}$, l'orbite de x (= l'ensemble des points $(\lambda^1 x_1, \dots, \lambda^n x_n)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$) coupe Σ en un point y . Si $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$ est un système de coordonnées locales sur Σ au voisinage du point y , on repère le point x par les n nombres $(\gamma(x), \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$.

On utilise une variante de la forme de J. Leray :

$$(4) \quad \sigma(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i d_i x \quad \text{avec} \quad d_i x = (-1)^{i-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

et les identités suivantes ($f \in F_\alpha(\dot{X})$ et $g \in F_\beta(\dot{X})$)

$$(5) \quad d(fg\sigma) = (\alpha + \beta + |\mathbf{a}|)fgdx.$$

$$(6) \quad df \wedge \sigma = \alpha f dx$$

$$(7) \quad dx = \gamma(x)^{|\mathbf{a}|-1} d\gamma(x) \wedge \sigma(y)$$

(cette dernière formule donnerait en remplaçant les y_i par leurs expressions en fonction des θ_i , l'expression de l'élément de volume en coordonnées polaires).

§ 2.1. Distributions quasihomogènes dans le complémentaire de l'origine.

L'étude de $\hat{\Phi}_\alpha(\dot{X})$ aboutit à la

Proposition 1.

1. Pour toute $f \in \hat{\Phi}_\alpha(\dot{X})$, on peut définir sa restriction f à Σ . On peut alors mettre des topologies sur $\hat{\Phi}_\alpha(\dot{X})$ et $F_\alpha(\dot{X})$ puisque ces espaces sont naturellement isomorphes à $\mathcal{D}'(\Sigma)$ et $\mathcal{D}(\Sigma)$.

2. La forme bilinéaire $\langle f, g \rangle_{\sigma} : \mathfrak{F}_{\alpha}(\dot{X}) \times \mathfrak{F}_{\alpha}(\dot{X}) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$(8) \quad \langle f, g \rangle_{\sigma} = \int_{\gamma=1} f(y)g(y)\sigma(y)$$

met en dualité $\mathfrak{F}_{\alpha}(\dot{X})$ et $\mathfrak{F}_{\alpha}(\dot{X})$.

3. Considérant l'application $H_{\alpha} : \mathfrak{D}(\dot{X}) \rightarrow \mathfrak{F}_{\alpha}(\dot{X})$ définie par

$$(9) \quad (H_{\alpha}\varphi)(x) = \int_0^{\infty} r^{-\alpha-1} \varphi(r^{a_1}x_1, \dots, r^{a_n}x_n) dr$$

alors

$$(10) \quad \langle f, \varphi \rangle_{\mathfrak{D}(\dot{X}) \times \mathfrak{D}(\dot{X})} = \langle f, H_{\alpha}\varphi \rangle_{\sigma} .$$

Preuve : Prenant $\varphi \in \mathfrak{D}(\dot{X})$, je cherche $\langle f, \varphi \rangle$. Notons qu'à toute **partition** de l'unité (ψ_i) sur Σ est naturellement associée une partition de l'unité $(\dot{\psi}_i)$ sur \dot{X} .

Supposant la partition (ψ_i) subordonnée à un recouvrement de Σ par des ouverts à cartes, je suis ramené à étudier $\langle \dot{\psi}_i f, \varphi \rangle$. Au lieu de lire $\dot{\psi}_i f$ à l'aide de la carte de \dot{X} associée aux coordonnées $(r = \gamma(x), \theta)$, je lis $\gamma(x)^{-\alpha} f \dot{\psi}_i$ et la formule (2) prouve que c'est une distribution indépendante de r . Donc elle s'écrit $l(r) \otimes \tilde{\Theta}_i(\theta)$. La carte considérée permet de relever $\tilde{\Theta}_i$ en une distribution Θ_i sur Σ et il suffit de définir la "restriction" $f(y)$ de f à Σ comme étant la somme de ces distributions Θ_i .

D'ailleurs si f est C^{∞} , $f(y)$ est la restriction de f à Σ , au sens ordinaire. Le 2e et le 3e se prouvent en utilisant la densité de $\mathfrak{F}_{\alpha}(\dot{X})$ dans $\mathfrak{F}_{\alpha}(\dot{X})$.

§ 1.2. Problème du prolongement.

On cherche à étudier l'opérateur $R : \mathfrak{F}_{\alpha}(X) \rightarrow \mathfrak{F}_{\alpha}(\dot{X})$ qui à toute distribution quasihomogène sur X fait correspondre sa restriction à \dot{X} (image ? noyau ?).

La proposition suivante affirme que, si $\operatorname{Re} \alpha' < \inf. \text{ des } a_i$ non entiers, cet opérateur R est d'indice nul (c'est même un isomorphisme si $\alpha' \in \mathbb{N}$).

Le 2° de la proposition donne un sous-espace de l'image de R si $\alpha' \geq 0$.

Proposition 2.

1. Si $\operatorname{Re} \alpha' < \inf. \text{ des } a_i$ non entiers, de deux choses l'une :
 - ou α' n'est pas un entier ≥ 0 , et alors R est un isomorphisme
 (11) - ou α' est un entier $p \geq 0$, et alors l'image de R est formée des
distributions T telles que

$$(12) \quad \langle T, x^\nu \rangle = 0 \quad \text{pour tout } \nu \text{ tel que } a_\nu = p$$

tandis que $\operatorname{Ker} R$ est engendré par les

$$(13) \quad D^\nu \delta_0 = \left(\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\nu_1} \dots \delta_0 \quad \text{pour tous les } \nu \text{ tels que } a_\nu = p.$$

2. Si $\alpha' \geq 0$, l'image de R contient toute T de $\mathcal{D}'(X)$ telle que

$$(14) \quad \langle T, x^\nu \rangle = 0 \quad \text{pour tout } \nu \text{ tel que } a_\nu = \alpha'.$$

Le 1° se démontre en considérant (10) et en cherchant à définir $(H_{\alpha'} \varphi)(x)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ et tout $x \in \dot{X}$.

Si α' n'est pas un entier positif, il suffit de faire suffisamment d'intégrations par parties à partir de (9) et de poser

$$(H_{\alpha'} \varphi)(x) = \int_0^\infty (\alpha'(\alpha'-1)\dots(\alpha'-p))^{-1} r^{-\alpha'+p} \varphi^{(p+1)}(r^{a_1} x_1 \dots) dr$$

avec p entier $> \operatorname{Re} \alpha'$ et $\varphi^{(p+1)}(r^{a_1} x_1 \dots) = \left(\frac{d}{dr} \right)^{p+1} (\varphi(r^{a_1} x_1 \dots))$

(l'intégrale n'a un sens que si l'on a (11)).

On obtient ainsi une fonction méromorphe $\alpha' \rightarrow (H_{\alpha'} \varphi)(x)$ ce qui permet de poser si $\alpha' = q \in \mathbb{N}$:

$$(H_q \varphi)(x) = \text{le terme constant du développement de Laurent de la fonction } (H_{\alpha'} \varphi)(x) \text{ au voisinage du point } q.$$

Pour montrer le 2°, il faut utiliser un autre relèvement $T \rightarrow T'$ de R .

On peut, par exemple, poser pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(X)$ et tout $\varepsilon > 0$

$$(15) (H_{\alpha', \varepsilon} \varphi)(y) = \int_{\varepsilon}^{\infty} r^{-1-\alpha'} (\varphi(r^1 y_1 \dots)) - \sum_{ak < \alpha'} \frac{\partial^k \varphi(0)}{k!} r^{ak} y^k dr$$

avec $ak = \sum_{i=1}^n a_i k_i$

ce qui définit une fonction C^{∞} sur Σ . On considère les distributions T_{ε} sur X définies par

$$(16) \quad \langle T_{\varepsilon}, \varphi \rangle = \langle \Theta, H_{\alpha', \varepsilon} \varphi \rangle_{\Sigma}$$

et l'on montre que ces distributions tendent dans $\mathcal{D}'(X)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ vers une distribution $T' \in \mathcal{E}'_{\alpha'}(X)$ qui prolonge T .

Ceci résulte d'

une formule de Taylor :

Etant donnés n nombres $a_i > 0$ et un nombre $\alpha' \geq 0$ toute φ de $\mathcal{D}(X)$ peut s'écrire

$$(17) \quad \varphi = \sum_{a^v \leq \alpha'} \frac{x^v}{v!} \partial^v \varphi(0) + \sum x^k \varphi_k$$

où la deuxième somme est étendue à un ensemble fini de multi-indices k tels que $ak > \alpha'$ et où les fonctions φ_k décrivent un borné de $\mathcal{E}(\dot{X})$ lorsque φ décrit un borné de $\mathcal{D}(X)$.

§ 1.3. Transformation de Fourier.

On voit d'abord que la transformation $H_{\alpha'}$ se prolonge de $\mathcal{D}(X)$ à $\mathcal{S}(X)$ ce qui permet de montrer que toute distribution quasihomogène est tempérée.

On voit ensuite (en utilisant la définition de Schwartz de la transformation de Fourier) que \mathcal{F} et $\overline{\mathcal{F}}$ sont deux isomorphismes réciproques de $\mathcal{E}'_{\alpha'}(X)$ et $\mathcal{E}'_{\alpha'}(\Xi)$.

On cherche alors une expression de la transformée de Fourier $\mathfrak{F}T$ d'une $T \in \Phi_\alpha(X)$.

Les techniques de [6] se transposent :

- en introduisant la distribution $T^\vepsilon \in \Phi_\alpha(X)$ qui a l'origine pour support, qui est nulle si $\alpha \in \mathbb{N}$ et qui est définie par

$$(18) \quad \forall \varphi \in \mathcal{Y}(X) \quad \langle T, \varphi \rangle = \langle T, H_{\alpha, \sigma} \varphi \rangle + \langle T^\vee, \varphi \rangle$$

- en utilisant les distributions $\chi_\alpha \in \mathcal{Y}'(X)$ qui sont définies (si $\text{Re } \alpha < 0$) comme limite dans $\mathcal{Y}'(X)$ des distributions $\chi_{\alpha, \varepsilon}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, avec :

$$(19) \quad \chi_{\alpha, \varepsilon}(u) = \int_0^\infty e^{-2\pi i(r^{a_1} u_1 + \dots) - \varepsilon r} r^{-\alpha-1} dr$$

si $\text{Re } \alpha \geq 0$, il faut encore faire des intégrations par parties.

Et l'on a la

Proposition 3.

Pour toute $T \in \Phi_\alpha(X)$ et toute $U \in \Phi_\alpha(\Xi)$ les transformées de Fourier $\mathfrak{F}T$ et $\mathfrak{F}U$ sont données par :

$$(20) \quad (\mathfrak{F}T)(\xi) = \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha, (x_1 \xi_1 \dots)} T(x) \sigma(x) + \mathfrak{F}T^\vee(\xi)$$

$$(21) \quad (\mathfrak{F}U)(x) = \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha, (-x_1 \xi_1 \dots)} U(\xi) \sigma(\xi) + \mathfrak{F}U^\vee(x)$$

(où les dérivations sous le signe d'intégration sont possibles).

D'où en particulier, en prenant $U = 1$, l'extension suivante de la formule de John (voir [11])

$$(22) \quad \delta(x) = \int_{\gamma=1} \chi_{\alpha, |a|}(-x_1 \xi_1 \dots) \sigma(\xi)$$

Soit alors $P(D) = \sum_{a \in \mathbb{P}} b_\alpha D^\alpha$ une opération différentielle quasihomogène à coefficients constants b_α . Considérons la distribution

$$(23) \quad E(x) = \int_{\gamma=1} \chi_m(-x_1 \xi_1 \dots) P(\xi)^{-1} \sigma(\xi) \quad \text{avec } p = m + (a).$$

Si on lui applique $P(D)$, on voit en utilisant les propriétés des distributions χ_α que c'est une solution élémentaire de l'opérateur $P(D)$.

§ 2. Une classe de distributions "valeur principale".

Définition 2.

Soit k une fonction $\dot{X} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que :

A) k est quasihomogène de degré $-|a|$

B) γ étant une fonction de $F_1(\dot{X})$ à valeurs > 0 , l'intégrale de la
 $n-1$.-forme $k\sigma$ sur la variété $\gamma^{-1}(1)$ est nulle

$$\int_{\gamma(y)=1} k(y)\sigma(y) = 0 .$$

C) k est de classe C^1 .

$$\text{Soit } k_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma_0(x) = [x] = \sup |x_i|^{1/a_i} \leq \varepsilon \\ k(x) & \text{si } [x] > \varepsilon \end{cases}$$

D) Alors lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, les distributions k_ε tendent vers une distribu-
tion notée v.p.k., quasihomogène de degré n .

Ceci se prouve en utilisant les "coordonnées polaires" associées à la fonction γ_0 et une fonction ζ de $\mathfrak{D}(X)$ valant 1 dans un voisinage de l'origine. Pour toute $\varphi \in \mathfrak{D}(X)$, on a :

$$\langle k_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{[x] > \varepsilon} k(x)(\varphi(x) - \varphi(0)\zeta(x))dx + \varphi(0) \int_{[x] > \varepsilon} k(x)\zeta(x)dx$$

(le 2e membre ne dépend pas de ζ puisqu'il en est ainsi du 1er)

Vu B) la 2e intégrale ne dépend pas de ε . Quant à la première, elle tend vers une limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ en vertu de la formule de Taylor.

Notons que comme la forme $k\sigma$ est fermée, la condition B signifie que

l'intégrale de k_ε est nulle sur toute variété "entourant l'origine". On peut vérifier que l'on obtient la même distribution v.p.k. si l'on remplace dans la définition de cette distribution, γ_0 par une fonction γ de $F_1(\dot{X})$ à valeurs > 0 . Nous utiliserons la

Proposition 4.

Pour toute k telle que A), B) et C), $\widehat{v.p.k}$ est représentée par une fonction ℓ quasihomogène de degré 0, qui est continue dans le complémentaire de l'origine.

Les distributions k_ε ont des transformées de Fourier continues et uniformément bornées lorsque ε varie.

Cela se prouve en utilisant (voir [15]) une fonction $\zeta \in \mathcal{D}(\Xi)$ valant 1 là où $\gamma(\xi) \leq 2$ et 0 là où $\gamma(\xi) \geq 3$.

On prouve que $\widehat{v.p.k}$ est bornée et continue dans Ξ en prouvant qu'il en est ainsi là où $1 \leq \gamma \leq 2$, ce qui se voit en écrivant

$$\widehat{v.p.k} = \zeta \widehat{(v.p.k)} + (1 - \zeta)k.$$

La 2e partie de la proposition se prouve en remarquant que

$$k_\varepsilon = \varepsilon^{-|a|} \varepsilon(k_1).$$

D'où

$$\widehat{k}_\varepsilon = \varepsilon^{-|a|} \widehat{\varepsilon(k_1)} = \widehat{\varepsilon(k_1)}.$$

Il suffit de prouver que \widehat{k}_1 est borné ce qui se voit encore en écrivant

$$\widehat{k}_1 = \zeta \widehat{k}_1 + (1 - \zeta)k_1 = \zeta \widehat{k}_1 + (1 - \zeta)k_1.$$

§ 3. Distributions v.p.k et espaces de Lebesgue $L^p(X)$

Proposition 5.

Pour tout k tel que A), B) et C) et tout $p \in]1, +\infty[$, la distribution v.p.k de la définition 2 envoie $L^p(X)$ dans $L^p(X)$. (C'est le théorème de M. Riesz pour $n = 1$ et un théorème de Calderon-Zygmund pour $a_1 = a_2 \dots = a_n$; il affirme que v.p.k est un "convoluteur" dans $L^p(X)$.)

1°. Preuve en raisonnant sur le groupe X.

Comme la boule unité des "convoluteurs" est fermée dans $\mathcal{D}'(X)$, et vu D), il suffit de montrer que l'ensemble $(k_\varepsilon *)_\varepsilon$ d'opérateurs dans $L^p(X)$ est borné.

Ceci résultera de la :

Proposition 6.

Si k est une fonction localement sommable sur X telle que

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists C_1 > 0 \text{ et } p_0 > 1 \text{ tel que } k_* \text{ est un opérateur de } L^{p_0}(X) \\ \text{de norme } \leq C_1 \end{array} \right.$$

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \exists C_2 > 0 \text{ et } A \in \mathbb{N} \text{ tel que} \\ \forall k \in \mathbb{Z}, \forall y \text{ avec } [y] \leq 2^k, \int_{[x] \geq 2^{k+A}} |k(x-y) - k(x)| dx \leq C_2 \end{array} \right.$$

Alors k_* est pour tout $p \in]1, +\infty[$ un opérateur de convolution dans $L^p(X)$ et il existe une majoration de la norme de cet opérateur en fonction de C_1, C_2, p_0 et p .

C'est la version donnée dans [12] des inégalités de Calderon-Zygmund. Le théorème de Plancherel et la proposition 5 montrent que les fonctions $(k_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifient (24) avec une même constante C_1 . Faisons le calcul prouvant que ces mêmes fonctions $(k_\varepsilon)_\varepsilon$ vérifient (25) avec la même constante C_2 . Si l'on fait les changements

$$x_i = 2^{\frac{a_i \ell}{i}} x'_i ; y_i = 2^{\frac{a_i \ell}{i}} y'_i$$

on voit qu'il suffit de montrer (25) avec $l = 0$. On peut supposer $\varepsilon = 0$. Or,

$$|k(x-y) - k(x)| \leq \sum_{i=1}^n |y_i| \sup_{t \in [0,1]} \left| \frac{\partial k}{\partial x_i}(x-ty) \right|$$

$$\leq \frac{C}{\inf_{t \in [0,1]} [x-ty]^{|a|+a_i}} \leq \frac{C}{([x]-2^{-A})^{|a|+a_i}} .$$

D'où la majoration voulue en utilisant les "coordonnées polaires".

2°. Preuve en raisonnant sur le groupe Ξ

Si $\widehat{v.p.k}$ est telle que $D^{\widehat{l}} \widehat{v.p.k}$ est une fonction continue pour tout $l = (l_1, \dots, l_n)$ tel que $l_i \in \{0,1\}$, la proposition 5 résulte de la

proposition 7 (résulte de [12])

Si une fonction $\varphi : \dot{X} \rightarrow \mathbb{C}$ est telle que pour tout multi-indice de dérivation $l = (l_1, \dots, l_n)$ avec $l_i \in \{0,1\}$, $D^l \varphi(\xi)$ est une fonction continue telle que

$$\exists C, \forall \xi, [\xi]^{al} |D^l \varphi(\xi)| \leq C .$$

Alors, pour tout $p \in]1, +\infty[$, φ est un multiplicateur dans $\mathcal{F}L^p(\Xi)$.

Cette proposition donne le théorème de Mihlin si $a_1 = \dots = a_n$. Notons qu'il existe une version voisine (voir [12]) de cette proposition (où l'on suppose que φ vérifie des hypothèses de différentiabilité un peu différentes), et qui généralise la version du théorème de Mihlin donnée par Hörmander ([8]).

Autres résultats. Cora Sadosky ([14]) a montré que :

- si l'on pose pour toute $f \in \mathcal{D}(X)$, $\tilde{f}_*(x) = \sup_{\varepsilon > 0} |(k_\varepsilon * f)(x)|$ l'application $f \rightarrow \tilde{f}_*$ est de type fort (p,p) si $p \in]1, +\infty[$ et de type faible $(1,1)$.

- il y a convergence ponctuelle : si $f \in L^p(X)$ ($1 \leq p < \infty$) pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la limite si $\varepsilon \rightarrow 0$ de $(k_\varepsilon * f)(x)$ existe

- on peut introduire des poids.

§ 4. Autres propriétés des distributions v.p.k telles que A), B), C), D).

Le théorème de Korn-Lichenstein-Giraud relatif aux intégrales singulières de Calderon-Zygmund se transpose en introduisant pour tout $\alpha > 0$ l'espace Λ_α des fonctions continues φ sur X telles que

$$\sup_{x,h} \frac{|\varphi(x) - \varphi(x+h)|}{|h|^\alpha} < \infty .$$

On obtient que la convolution par v.p.k envoie continuellement le sous-espace de Λ_α formé par des fonctions à support compact, dans Λ_α . Cora Sadosky a montré que v.p.k* définit un opérateur continu dans certains espaces du type T_u^p (voir [4]).

§ 5. Calcul symbolique.

Comme application, on peut chercher à construire un calcul symbolique à l'aide de ces intégrales singulières, analogue au calcul symbolique de Calderon-Zygmund (voir [3]). Disons que tout "marche" tant que l'on ne recherche pas à transposer la propriété (voir [16]) d'invariance du symbole par difféomorphisme (une telle transformation ne respecte pas en général les rôles dissymétriques des axes de coordonnées). La transposition des exposés 8 et 9 de [5] prouve par exemple l'hypoellipticité des systèmes différentiels formellement semi-elliptiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Arnèse. Ric. di Math., vol. XIII, 1964, pp.1-45.
- [2] A. Calderon et A. Zygmund. Act. Math., t.88, 1952, pp. 85-139.
- [3] - - Amer. Journ. of Math., t.79, 1957, pp.901-921.
- [4] - - Studia Math., vol. 20, 1961, pp. 171-225.
- [5] H. Cartan et L. Schwartz. Sém. ENS, Paris, 1963-1964.
- [6] L. Garding. Bull. Soc. Math. France, 89, 1961, pp. 381-428.
- [7] P. Grisvard. Sém. Bourbaki, mai 1965.
- [8] L. Hörmander, Act. Math., t. 104, 1960, pp. 93-140.
- [9] - Comm. Pure Appl. Math., vol. XVIII, n°3, Août 1965, pp. 501-517.
- [10] F. John. Plane waves and ... Interscience. New-York 1965.
- [11] F. Jones. Amer. Journ. of Math., vol. 86, n°2, avril 1964.
- [12] P. Krée. Sur les multiplicateurs dans $\mathcal{F}L^p$ (à paraître dans \mathcal{F})
- [13] - Note C.R.A.S. t.261, n° 14, 4 oct. 1965, pp.2560-2563.
- [14] C. Sadosky (à paraître dans Studia Mathematica)
- [15] L. Schwartz. Sém. Fac. Sciences Paris, 1959-1960.
- [16] R.T. Seeley. Amer. Journ. Math., t.81, 1959, pp. 658-690.