

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

CLAUDE MORLET

## **Microfibrés et structures différentiables**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1964, exp. n° 263, p. 285-295

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1962-1964\\_\\_8\\_\\_285\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__285_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

MICROFIBRÉS ET STRUCTURES DIFFÉRENTIABLES

par Claude MORLET

Pour simplifier l'exposition je ne considérerai que des variétés sans bord. Les variétés différentiables seront  $C^r$ , avec  $1 \leq r \leq \infty$ , au choix du lecteur.

Définition. - Nous dirons qu'un espace topologique est muni d'une structure de variété linéaire par morceaux, si l'on s'est donné un recouvrement ouvert de cet espace, et un homéomorphisme de chacun de ces ouverts sur un ouvert de  $R^n$  ( $n \in N$ ) de telle façon que les changements de cartes soient linéaires par morceaux.

Remarque. - E. C. ZEEMAN et P. DEDECKER ont montré que les variétés linéaires par morceaux sont munies canoniquement d'une structure polyédrale (cf. [2]).

Pour faire une étude topologique de ces variétés linéaires par morceaux nous allons introduire la notion de microfibré ; chaque variété linéaire par morceaux aura un microfibré tangent de même que chaque variété différentiable a un fibré vectoriel tangent. Ainsi on pourra essayer d'étendre aux variétés linéaires par morceaux les résultats et les méthodes classiques en topologie différentielle.

Ici j'étudierai les structures différentiables (compatibles) <sup>(1)</sup> que l'on peut mettre sur une variété linéaire par morceaux donnée. Je donnerai une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en existe, et dans le cas où il en existe j'en donnerai une classification. (Ces résultats sont à peu près entièrement contenus dans [3] et [4].)

1. Microfibrés.

Dans tout ce paragraphe je me placerai dans la catégorie des polyèdres localement finis de dimension finie et paracompacts. (Je signale que l'on peut donner les définitions dans une catégorie plus générale, et que la plupart des résultats annoncés restent vrais.) Les morphismes seront linéaires par morceaux.

Nous appellerons donnée fibrée un quadruple  $(E, X, i, p)$ , où  $i$  est un morphisme de l'objet  $X$  dans l'objet  $E$ , et  $p$  un morphisme de  $E$  dans  $X$  tels que  $p \circ i = id_X$ . Nous

---

<sup>(1)</sup> La notion de compatibilité sera précisée au § 3.

appellerons application fibrée de la donnée fibrée  $(E, X, i, p)$  dans la donnée fibrée  $(E', X', i', p')$  la donnée d'un morphisme de  $X$  dans  $X'$  et d'un germe (suivant le filtre des voisinages de  $i(X)$  dans  $E$ ) de morphisme de  $E$  dans  $E'$ , soit  $F$ , tels que  $f \circ p = p' \circ F$  et  $i \circ f = F \circ i'$ . C'est-à-dire que si  $U$  est un voisinage de  $i(X)$  sur lequel  $F$  est représenté par une application  $U \rightarrow E'$ , que nous noterons encore  $F$ , on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{i} & U(\subset E) & \xrightarrow{p} & X \\
 \downarrow f & & \downarrow F & & \downarrow f \\
 X' & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{p'} & X'
 \end{array}
 .$$

On a ainsi une catégorie des données fibrées et applications fibrées.

Dans cette catégorie, on a une notion d'image réciproque : Si on a la donnée fibrée  $(E, X, i, p)$  et un morphisme  $f : Y \rightarrow X$ , on en déduit une donnée fibrée  $(E \times_X Y, Y, j, p_2)$ , où  $j$  est défini par  $j(y) = (i \circ f(y), y)$ . Cet objet résoud le problème universel classique des images réciproques. On le notera  $f^*(E, X, i, p)$ .

On appelle microfibré trivial, de base  $X$  et de dimension  $n$ , la donnée fibrée  $(X \times \mathbb{R}^n, X, s_0, p_1)$  (où  $s_0$  est défini par  $s_0(x) = (x, 0)$ ).

**DÉFINITION 1.** - On dira que la donnée fibrée  $(E, X, i, p)$  est un microfibré (localement trivial) si elle est localement isomorphe à un microfibré trivial. (C'est-à-dire si chaque point possède un voisinage  $U$ , tel que si  $j$  est l'injection canonique de  $U$  dans  $X$  :  $j^*(E, X, i, p)$  est isomorphe à un microfibré trivial de base  $U$ .)

**DÉFINITION 2** <sup>(2)</sup>. - On dira qu'une application fibrée  $(f, F)$  d'un microfibré  $(E, X, i, p)$  dans un microfibré  $(E', X', i', p')$  est un morphisme de microfibrés si pour toute application  $\varphi$  de l'espace  $\alpha$  réduit à un seul point dans  $X$ ,  $F$  induit un isomorphisme de  $\varphi^*(E, X, i, p)$  sur  $(f \circ \varphi)^*(E', X', i', p')$ , c'est-à-dire, si, pour tout point  $x$  de  $X$ ,  $F$  induit un isomorphisme de la "fibre" au-dessus de  $x$  sur la "fibre" au-dessus de  $f(x)$ . (Un tel isomorphisme n'étant d'ailleurs autre chose qu'un germe d'automorphisme

<sup>(2)</sup> En particulier : si  $(E, X, i, p)$  est un microfibré, et  $U$  un voisinage de  $i(X)$  dans  $E$ ,  $(U, X, i, p|_U)$  est un microfibré isomorphe à  $(E, X, i, p)$ .

linéaire par morceaux de  $R^n$  dans lui-même conservant l'origine.) Il en résulte immédiatement que  $(E, X, i, p)$  est isomorphe à  $f^*(E', X', i', p')$ .

On peut montrer (cf. STEENROD) que si l'on a un microfibré de base  $X \times I$ , il est isomorphe au produit par  $I$  d'un microfibré de base  $X$ , d'où l'on déduit que, si l'on a deux applications  $f$  et  $g$  de  $Y$  dans la base  $X$  d'un microfibré  $\eta$ ,  $f^*(\eta)$  et  $g^*(\eta)$  sont isomorphes.

On définit alors, comme dans le cas des fibrés vectoriels, une opération de somme de Whitney (notée  $\oplus$ ) sur le microfibré de base  $X$  donnée. Cette somme fait de l'ensemble des classes d'isomorphismes de microfibrés de base  $X$ , un monoïde abélien qui admet, pour élément neutre, le microfibré  $(X, X, id_X, id_X)$ . En passant au quotient par le sous-monoïde engendré par les microfibrés triviaux, on obtient un groupe  $k_{PL}(X)$  : groupe de Grothendieck des microfibrés stables de base  $X$ . Remarquons que ceci implique que toute classe de  $k_{PL}(X)$  est représentée par un microfibré ou encore que, étant donné un microfibré  $\eta$ , il existe un microfibré  $\xi$  tel que  $\eta \oplus \xi$  soit trivial. (Remarque : ici le fait que  $X$  est de dimension finie est essentiel.)

Définissons un groupe simplicial  $PL(n)$  pour tout  $n$  : un  $p$ -simplexe de  $PL(n)$  sera un automorphisme du microfibré trivial de base le simplexe-type de dimension  $p$ . Il est facile de voir que  $PL(n)$  peut jouer le rôle de groupe structural pour les microfibrés de dimension  $n$ . On notera  $PL$  la limite inductive des  $PL(n)$  suivant les applications naturelles  $PL(n) \rightarrow PL(n+1)$ .

En utilisant les théories classiques (KAN, MOORE, ...) on peut en déduire qu'il existe un complexe simplicial  $BPL(n)$  pour tout  $n$ , tel que l'on ait une bijection fonctorielle entre les classes d'isomorphismes de microfibrés de dimension  $n$  de base  $X$ , et les classes d'homotopie d'applications de  $X$  dans  $BPL(n)$ .

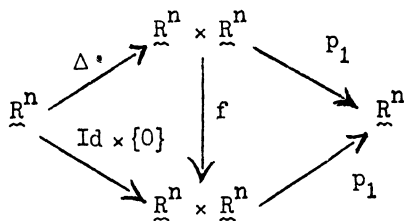
Si  $p \geq n$ , on a une application naturelle  $BPL(n) \rightarrow BPL(p)$ , et on définit  $BPL$  comme étant la limite inductive des  $BPL(n)$ .

## 2. Variétés linéaires par morceaux.

Soit  $V$  une variété linéaire par morceaux, considérons la donnée fibrée

$$V \xrightarrow{\Delta} V \times V \xrightarrow{P_1} V \quad .$$

C'est un microfibré, il suffit de le voir quand  $V$  est  $R^n$ , et pour cela on remarque que le diagramme suivant est commutatif :



où  $f(x, y) = (x, y - x)$ .

Ce microfibré sera noté  $\tau(V)$ , c'est le microfibré tangent à  $V$ .

Soit maintenant  $V$  une sous-variété linéaire par morceaux d'une variété linéaire par morceaux  $M$  (c'est-à-dire deux variétés linéaires par morceaux  $V$  et  $M$  et une application linéaire par morceaux injective  $i$  de  $V$  dans  $M$ ). On cherche s'il existe un voisinage  $U$  de  $V$  dans  $M$  et une projection  $p$  de  $U$  sur  $V$  telle que  $(U, V, i, p)$  soit un microfibré. Il n'en est pas toujours ainsi mais on peut montrer qu'il existe un  $n$  tel que l'on puisse trouver un voisinage  $U$  de  $s_0 \circ i(V)$  dans  $M \times \mathbb{R}^n$ , et une projection  $p$  de  $U$  sur  $V$  telle que  $(U, V, s_0 \circ i, p)$  soit un microfibré. De plus si  $\nu(V)$  est ce microfibré, on a :  $\nu(V) \oplus \tau(V) = (s_0 \circ i)^* (\tau(M \times \mathbb{R}^n))$ . Donc la classe stable de  $\nu(V)$  est bien déterminée.  $\nu(V)$  est appelé le microfibré normal de  $V$  dans  $M$ .

### 3. Microfibrés et fibrés vectoriels.

Soient  $\tilde{V}$  une variété différentiable et  $V$  une variété linéaire par morceaux. Supposons que l'on se soit donné un homéomorphisme de  $V$  sur  $\tilde{V}$ , soit  $f$ , tel que, si on le restreint à chacun des simplexes d'une subdivision simpliciale de  $V$  correctement choisie, on obtienne un plongement différentiable de ces simplexes. On dira alors que l'on s'est donné une triangulation différentiable de  $\tilde{V}$ . On dira aussi que l'on s'est donné sur  $V$  une structure différentiable compatible avec la structure linéaire par morceaux.

Si l'on a un couple de variétés différentiables  $(\tilde{M}, \tilde{V})$ ,  $\tilde{V}$  étant plongée différentiablement dans  $\tilde{M}$ , on dit que l'on s'est donné une triangulation différentiable  $(M, V, f)$  de ce couple (ou encore une triangulation différentiable de  $M$  respectant  $V$ ), si l'on s'est donné une triangulation différentiable de  $\tilde{M}$  :  $(M, f)$ , et une sous-variété  $V$  de  $M$ , telle que  $(V; f|_V)$  soit une triangulation différentiable de  $\tilde{V}$ .

Le papier de WHITEHEAD [5] permet de démontrer le lemme suivant :

LEMME.

a. Toute variété différentiable admet une triangulation différentiable.

b. Si  $(\tilde{M}, \tilde{V})$  est un couple de variétés différentiables,  $\tilde{V}$  plongée dans  $\tilde{M}$ , et si l'on s'est donné une triangulation différentiable de  $\tilde{V}$ , on peut trouver une triangulation différentiable du couple  $(\tilde{M}, \tilde{V})$ , qui induise sur  $\tilde{V}$  une triangulation équivalente à la triangulation donnée (i. e. donnant à  $\tilde{V}$  la même structure de polyèdre que la triangulation donnée). En particulier :

c. Si on a, sur  $\tilde{V}$ , deux triangulations différentiables, il existe, sur  $\tilde{V} \times I$ , une triangulation différentiable qui induise, sur  $\tilde{V} \times \{0\}$  et  $\tilde{V} \times \{1\}$  respectivement, les deux triangulations données.

Soit  $\eta$  un fibré vectoriel différentiable de base une variété différentiable  $\tilde{V}$ , donnons-nous une triangulation différentiable de l'espace sous-jacent à  $\eta$ , respectant la section zéro, on a donc un couple de variétés linéaires par morceaux  $(K, V)$ ; considérons le microfibré normal de  $V$  dans  $K$ . Ceci définit une application de  $k_0(\tilde{V}) = k_0(V)$  dans  $k_{PL}(V)$ . On notera  $\rho$  cette application.

Nous pouvons faire cette construction pour les variétés  $BO(n, p)$  et leur fibré universel  $\chi_p^n$ . Nous obtenons, pour tout couple  $(n, p)$ , un microfibré  $\rho(\chi_p^n)$ , et on peut prendre l'application classifiante, ceci nous donne une classe d'homotopie d'applications de  $BO(n, p)$  dans  $BPL$ , et si  $n$  et  $p$  augmentent on a des relations de compatibilité qui nous permettent de définir une classe d'homotopie d'applications de la limite inductive  $BO$  dans  $BPL$  ( $BO$  doit être considéré ici comme muni d'une structure simpliciale donnée par des triangulations "compatibles" sur les  $BO(n, p)$ ). On notera  $\mathcal{R}$  cette application. On a alors, pour tout complexe  $K$ , un homomorphisme fonctoriel

$$\pi_0(K, BO) \xrightarrow{\pi_0(K, \mathcal{R})} \pi_0(K; BPL),$$

ce qui nous donne un homomorphisme :  $k_0(K) \xrightarrow{\rho} k_{PL}(K)$ . Il est facile de voir que  $\rho'$  et  $\rho$  coïncident chaque fois que ce dernier est défini.

On en déduit, par les constructions classiques, un groupe simplicial  $O'$  et une application de  $O'$  dans  $PL$ , ainsi qu'une application de  $O'$  dans  $O$  dont on peut montrer qu'elle est une équivalence d'homotopie (en particulier, pour tout espace  $X$ , elle induira un isomorphisme de  $\pi_0(X, O')$  sur  $\pi_0(X, O)$ ), mais on ne connaît pas d'application inverse  $O \rightarrow O'$  canonique, et de même on ne sait pas construire une classe d'homotopie canonique d'applications de  $O$  dans  $PL$ .

4. Le théorème de Milnor.

On pose maintenant la question : Etant donnée une variété linéaire par morceaux  $V$ , existe-t-il sur  $V$  une structure différentiable compatible avec la structure linéaire par morceaux ?

THÉOREME 1. - Il existe sur  $V$  une structure différentiable compatible, si et seulement si  $\tau(V)$  est de la forme  $\rho(\eta)$  pour un certain fibré vectoriel  $\eta$  sur  $V$ . De plus pour tout  $\eta$ , tel que  $\rho(\eta) = \tau(V)$ , il existe une structure différentiable (au moins) qui admette  $\eta$  comme fibré tangent stable.

Pour démontrer ce résultat on utilise un lemme classique :

LEMME de lissage. - Soient  $V$  une variété linéaire par morceaux de dimension  $p$ , et  $\tilde{M}$  une variété différentiable de dimension  $p + q$ , soit  $F$  un plongement différentiable par morceaux de  $V \times \mathbb{R}^q$  dans  $\tilde{M}$  (c'est-à-dire un plongement topologique qui induise une triangulation différentiable de son image).

On dira que l'on a un lissage de  $V$  (relatif à cette situation) si l'on a une structure différentiable  $(\tilde{V}, f)$  compatible avec la structure linéaire par morceaux de  $V$ , et un plongement de  $\tilde{V} \times \mathbb{R}^q \times I \xrightarrow{\psi} \tilde{M}$  vérifiant la condition : pour tout  $t \in I$  ( $t \neq 0$ ),  $\psi_t$  est un plongement différentiable, et pour  $t = 0$  :  $\psi_0 = F \circ (g^{-1} \times \text{id}_{\mathbb{R}^q})$ .

On dira que l'on a une isotopie de lissage si l'on a une structure différentiable compatible, soit  $(\tilde{W}, f)$  sur  $V \times I$ , et une application différentiable par morceaux :

$$\tilde{W} \times \mathbb{R}^q \times I \xrightarrow{\psi} M$$

différentiable sur  $W \times \mathbb{R}^q \times (I - \{0\})$ , et telle que, si l'on note  $f_\theta$  l'application composée,

$$V \xrightarrow{x[\theta]} V \times I \xrightarrow{f} \tilde{W}$$

et si l'on note  $\psi_\theta$  l'application composée,

$$\text{Im } f_\theta \times \mathbb{R}^q \times I \xrightarrow{\text{inj} \times \text{id} \times \text{id}} W \times \mathbb{R}^q \times I \xrightarrow{\psi} M, \quad ,$$

le triple  $(\text{Im } f_\theta, f_\theta, \psi_\theta)$  soit pour tout  $\theta$  ( $\theta \in I$ ) un lissage.

Le lemme peut alors s'énoncer :

a. Dans les conditions énoncées plus haut, il existe toujours un lissage.

b. Si on a deux tels lissages, ils sont isotopes.

Soit alors  $BO_n$  le classifiant des fibrés vectoriels stables sur des bases de dimension au plus  $n$ . On peut prendre pour  $BO_n$  une grassmannienne de dimension finie, donc une variété différentiable. On notera  $\chi_n$  le fibré universel sur  $BO_n$  (réalisable par un fibré de dimension grande, mais finie) et  $T$  le fibré tangent à  $BO_n$  (fibrés différentiables). Soit  $V_n$  l'espace sous-jacent au fibré  $\chi_n \oplus T^{-1}$ . Le fibré tangent à  $V_n$  est stablement isomorphe à l'image réciproque de  $\chi_n$  par la projection  $V_n \rightarrow BO_n$ . On peut donc prendre pour classifier les fibrés vectoriels de base de dimension au plus  $n$ , la variété  $V_n$  et son fibré tangent, ou même de façon plus générale  $V_n \times R^p$  et son fibré tangent, pour un  $p$  quelconque. Soit alors  $\rho(T(V_n))$  le microfibré associé à ce fibré tangent. Si  $V$  est une variété linéaire par morceaux de dimension au plus  $n$ , et s'il existe un plongement de  $V$  dans  $V_n$ , telle que l'image réciproque de  $\rho(T(V_n))$  soit (stablement) égal au microfibré tangent de  $V$ , alors le microfibré normal à  $V$  dans  $V_n$  est trivial, et en appliquant le lemme de lissage au plongement de  $V \times R^N$  constitué par ce microfibré normal, on obtient une structure différentiable sur  $V$ , admettant pour fibré tangent l'image réciproque par le plongement donné du fibré universel. D'où immédiatement le théorème 1.

### 5. La classification des structures compatibles.

Soit  $V$  une variété linéaire par morceaux ; on dira que deux structures différentiables compatibles sur  $V$ ,  $(\tilde{V}_0, f_0)$  et  $(\tilde{V}_1, f_1)$ , sont équivalentes s'il existe une structure compatible  $(U, F)$  sur  $V \times I$ , telle que :

$$\tilde{V}_i \xrightarrow{f_i} V \xrightarrow{\text{incl}} V \times I \xrightarrow{F^{-1}} U$$

soit un plongement différentiable ( $i = 0, 1$ ).

On obtient ainsi l'ensemble  $\Gamma(V)$  des classes de structures différentiables compatibles sur  $V$ .

#### Remarques.

$\alpha$ . Si deux structures sont équivalentes, les variétés différentiables sous-jacentes sont difféomorphes, et on peut même ajouter que l'on peut passer de l'une à l'autre par un homéomorphisme de  $V$ , isotope à l'identité.

$\beta$ . Le (b) du théorème de lissage implique que si l'on a un plongement de  $V \times R^q$  dans  $\tilde{M}$ , et si l'on a deux lissages  $(\tilde{V}_0, f_0, \psi_0)$  et  $(\tilde{V}_1, f_1, \psi_1)$  :

$$(\tilde{V}_0, f_0) \simeq (\tilde{V}_1, f_1) \quad (\text{dans } \Gamma(V)) \quad .$$



Dans la suite on supposera toujours que  $\Gamma(V)$  n'est pas vide, et on choisira, une fois pour toutes, une structure  $(\tilde{V}_0, f_0)$  sur  $V$  ; on aura ainsi un élément privilégié dans  $\Gamma(V)$  .

Considérons l'application  $BO \rightarrow BPL$  , on peut en prendre une résolution fibrée, soit  $\Gamma$  la fibre. C'est un complexe simplicial dont le type d'homotopie est parfaitement défini. C'est aussi le noyau d'un homomorphisme de groupes à une homotopie près ; il est ainsi muni d'une structure de groupe à une homotopie près. Pour tout espace  $V$  (suffisamment bon, par exemple pour une variété linéaire par morceaux), on a une suite exacte :

$$\pi_0(V, 0) \rightarrow \pi_0(V, PL) \rightarrow \pi_0(V, \Gamma) \rightarrow \pi_0(V, BO) \rightarrow \pi_0(V, BPL)$$

dont tous les éléments sont des groupes, les deux derniers étant commutatifs.

**THÉORÈME 2.** - Soit  $V$  une variété linéaire par morceaux, à toute structure différentiable compatible sur  $V$  , correspond une bijection naturelle de  $\Gamma(V)$  sur  $\pi_0(V, \Gamma)$  qui envoie la classe de la structure donnée sur l'élément neutre du groupe  $\pi_0(V, \Gamma)$  .

Avant de démontrer ce théorème je vais en donner quelques conséquences :

**COROLLAIRE 1.** - Prenons pour  $V$  , une triangulation différentiable de  $S^n$  , et pour structure compatible la structure différentiable ordinaire de  $S^n$  , on obtient une bijection de  $\Gamma(S^n)$  sur  $\pi_0(S^n, \Gamma)$  . Or  $\Gamma(S^n)$  s'identifie au groupe des difféomorphismes de  $S^{n-1}$  modulo ceux qui se prolongent à la boule (classiquement noté  $\Gamma_n$  ). Il est facile de montrer que notre bijection est un isomorphisme du groupe  $\Gamma_n$  sur le groupe  $\pi_0(S^n, \Gamma) = \pi_n(\Gamma)$  .

**COROLLAIRE 2.** - Il résulte alors des résultats plus ou moins classiques de MILNOR, KERVAIRE et CERF, que  $\pi_n(\Gamma)$  est fini pour tout  $n$  , et est nul pour  $n \leq 6$  . Ce qui est à ma connaissance, le premier renseignement connu en ce qui concerne le type d'homotopie de  $\Gamma$  , et par suite de PL et de BPL .

**COROLLAIRE 3.** - On en déduit alors que si  $V$  a le type d'homotopie d'un complexe fini,  $\Gamma(V)$  est fini.

## 6. Démonstration du théorème 2.

Soient  $V$  et  $M$  des variétés différentiables, on appellera plongement différentiable par morceaux de  $V$  dans  $M$  , toute application linéaire par morceaux d'une triangulation différentiable injective de  $V$  dans une triangulation différentiable

de  $M$ . On dira que deux tels plongements sont isotopes s'ils sont restriction à  $V \times \{0\}$  et à  $V \times \{1\}$  respectivement d'un plongement différentiable par morceaux de  $V \times I$  dans  $M \times I$  respectant les projections sur  $I$ .

Considérons alors l'ensemble des classes d'isotopie de plongements différentiables par morceaux, homotopes à l'identité, de  $V_0 \times R^n$  dans lui-même. Soit  $A_n(V_0)$  cet ensemble.

Considérons aussi l'ensemble des classes d'isotopie de plongements linéaires par morceaux de  $V \times R^n$  dans lui-même (les isotopies sont astreintes à être des applications linéaires par morceaux de  $V \times R^n \times I$  dans  $V \times R^n \times I$ ), Soit  $B_n(V)$  cet ensemble. (Remarque : la composition des plongements induit sur  $A_n$  et  $B_n$  des structures de groupes.)

Considérons enfin  $\pi_0(V, PL(n))$ , les classes d'homotopie d'applications de  $V$  dans  $PL(n)$ , c'est-à-dire les classes d'équivalence de trivialisations du micro-fibré trivial de dimension  $n$ .

On a des applications évidentes :

$$\pi_0(V, PL(n)) \xrightarrow{\alpha_n} B_n(V) \xrightarrow{\beta_n} A_n(V_0) \quad .$$

LEMME a. - Si on à la limite inductive suivant  $n$ , on a

$$\pi_0(V, PL) = \varinjlim \pi_0(V, PL(n)) \xrightarrow{\alpha} B(V) = \varinjlim B_n(V) \xrightarrow{\beta} A(V_0) = \varinjlim A_n(V_0)$$

et  $\alpha$  et  $\beta$  sont des isomorphismes.

En effet : de façon générale,  $B_n$  est un isomorphisme pour tout  $n$ , à cause du (c) du lemme de triangulation.

Le fait que  $\alpha$  est un isomorphisme se déduit du lemme suivant :

LEMME. - Soit  $W$  une variété linéaire par morceaux et soit  $f$  un plongement sans bord relatif de  $W \times R^n$  dans  $W \times R^n$  ( $W$  est une variété à bord,  $f$  est linéaire par morceaux), alors il existe un  $p$  tel que, si l'on note  $f_p$  l'application :

$$W \times R^n \times R^p \xrightarrow{f \times \text{id}_{R^p}} W \times R^n \times R^p$$

$f_p$  soit isotope (au sens de l'équivalence dans  $B_n(V)$  et sans bord relatif) à un plongement linéaire par morceaux  $g$  de  $W \times R^{n+p}$  dans lui-même, respectant  $W \times \{0\}$ , envoyant pour tout  $x \in W$ ,  $\{x\} \times R^{n+p}$  dans lui-même.

LEMME b. - I<sub>1</sub> existe une suite exacte :

$$\pi_0(V, 0) \xrightarrow{a} A(V_0^*) \xrightarrow{b} \Gamma(V) \xrightarrow{c} k_0(V) \xrightarrow{\rho} k_{PL}(V) \quad .$$

Où a est l'application évidente, où c consiste à associer à toute structure différentiable sur V la différence de son fibré tangent et du fibré tangent de la structure différentiable initiale (V<sub>0</sub>, f<sub>0</sub>), où ρ est l'application définie au § 3, et où b se déduit du lemme de lissage.

L'exactitude en k<sub>0</sub>(V) résulte du théorème de Milnor. L'exactitude en A(V<sub>0</sub>) résulte du (b) du lemme de lissage. L'exactitude en Γ(V) résulte du fait que, si l'on a une structure différentiable (V<sub>1</sub>, f<sub>1</sub>) admettant même fibré tangent que (V<sub>0</sub>, f<sub>0</sub>), il existe un n tel que l'on puisse construire un plongement différentiable de V<sub>0</sub> × R<sup>n</sup> dans V<sub>1</sub> × R<sup>n</sup>, homotope à l'application (f<sub>1</sub> ∘ f<sub>0</sub><sup>-1</sup>) × id<sub>R<sup>n</sup></sub>.

D'autre part on a, pour tout espace V, la suite exacte :

$$\pi_0(V, 0) \rightarrow \pi_0(V, PL) \rightarrow \pi_0(V, \Gamma) \rightarrow \pi_0(V, BO) \rightarrow \pi_0(V, BPL) \quad .$$

Le théorème résulte du fait que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} \pi_0(V, 0) & \longrightarrow & \pi_0(V, PL) & \longrightarrow & \pi_0(V, \Gamma) & \longrightarrow & \pi_0(V, BO) & \longrightarrow & \pi_0(V, BPL) \\ \downarrow \text{id} & & \downarrow \beta \circ \alpha & & \downarrow \gamma & & \downarrow u & & \downarrow v \\ \pi_0(V, 0) & \longrightarrow & A(V_0^*) & \longrightarrow & \Gamma(V_0^*) & \longrightarrow & k_0(V) & \longrightarrow & k_{PL}(V) \end{array}$$

où l'on sait que toutes les flèches verticales autres que γ sont des isomorphismes. Mais il faut définir γ. Pour cela je considère l'ensemble des couples formés d'un fibré vectoriel (différentiable) sur V<sub>0</sub>, et d'un plongement différentiable par morceaux de V × R<sup>n</sup> (n = dimension du fibré) dans l'espace sous-jacent à ce fibré. Sur ces couples je mets la relation d'équivalence qui identifie deux couples s'ils diffèrent par un isomorphisme de fibrés vectoriels, ou s'ils diffèrent par une isotopie différentiable par morceaux (cf. définition de A<sub>n</sub>(V)). J'obtiens un ensemble PL/O<sub>n</sub>(V) et en multipliant tout par R, PL/O<sub>n</sub>(V) s'envoie dans PL/O<sub>n+1</sub>(V), si bien que l'on a une limite inductive PL/O(V). Il est alors facile de voir que PL/O(V) s'identifie naturellement à π<sub>0</sub>(V, Γ), d'autre part, à tout élément de PL/O(V), on peut faire correspondre une structure différentiable compatible grâce au lemme de lissage. Ce qui définit γ.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CAIRNS (Stewart S.). - The manifold smoothing problem, Bull. Amer. math. Soc., t. 67, 1961, p. 237-238.
  - [2] DEDECKER (Paul). - Une variétés linéaires par morceaux et variétés combinatoires, Annali di Matem. pura ed appl., Série 4, t. 60, 1962, p. 365-383.
  - [3] MAZUR (Barry). - Séminaire de l'Institut des hautes Etudes scientifiques : Topologie combinatoire et différentielle, 1962/63, n° 1-8 (multigraphiés).
  - [4] MILNOR (J.). - Microbundles and differentiable structures. - Princeton, Princeton University, 1961 (multigraphié).
  - [5] WHITEHEAD (J. H. C.). - On  $C^1$ -complexes, Annals of Math., t. 41, 1940, p. 809-824.
  - [6] WHITEHEAD (J. H. C.). - Manifolds with transverse fields in euclidean space, Annals of Math., t. 71, 1961, p. 154-212.
-