

# SÉMINAIRE N. BOURBAKI

MOHAMED SALAH BAOUENDI

## **Les opérateurs de convolution**

*Séminaire N. Bourbaki*, 1964, exp. n° 254, p. 171-178

[http://www.numdam.org/item?id=SB\\_1962-1964\\_\\_8\\_\\_171\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SB_1962-1964__8__171_0)

© Association des collaborateurs de Nicolas Bourbaki, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Bourbaki (<http://www.bourbaki.ens.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LES OPÉRATEURS DE CONVOLUTION

par Mohamed Salah BAOUENDI

(d'après Léon EHRENPREIS [1] et Lars HÖRMANDER [2])

Notations. -  $\Omega$  désignera un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .  $\mathcal{E}(\Omega)$ ,  $\mathcal{O}(\Omega)$ ,  $\mathcal{O}^k(\Omega)$ ,  $\mathcal{E}'(\Omega)$ ,  $\mathcal{O}'^k(\Omega)$ ,  $\mathcal{O}'(\Omega)$ ,  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{S}'$  sont les espaces de Schwartz [5].  $\mathcal{O}'^F(\Omega)$  désignera l'espace des distributions d'ordre fini dans  $\Omega$ .

Pour  $\varphi \in \mathcal{O}$ , on posera

$$\|\varphi\|_j = \sum_{|\alpha| \leq j} \sup_x |D^\alpha \varphi(x)| \quad \text{avec } \alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n) \text{ et } |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \quad .$$

Pour  $S \in \mathcal{E}'$ , nous noterons  $\hat{S}$  sa transformée de Fourier

$$\hat{S}(\zeta) = \langle S_x, e^{i\langle \zeta, x \rangle} \rangle$$

avec  $\zeta \in \mathbb{C}^n$ ,  $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ .

Introduction. - MALGRANGE a étudié dans sa thèse [4] les opérateurs différentiels à coefficients constants, et a donné des conditions nécessaires et suffisantes sur  $\Omega$  pour avoir

$$P(D) \mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{E}(\Omega), \quad P(D) \mathcal{O}'^F(\Omega) = \mathcal{O}'^F(\Omega) \quad .$$

EHRENPREIS a étudié les opérateurs de convolution dans  $\mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$ , et a caractérisé les  $S \in \mathcal{E}'$  pour lesquelles on a :  $S \star \mathcal{O}' = \mathcal{O}'$  [1]. HÖRMANDER dans [2] étudie les opérateurs de convolution dans des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et obtient des conditions nécessaires et suffisantes d'existence généralisent ainsi les résultats indiqués.

1. Existence dans  $\mathcal{E}$ .

Soient  $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ ,  $\Omega_1, \Omega_2$  deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant

$$\Omega_1 + \text{support } S \subset \Omega_2 \quad .$$

Soit  $T : \mathcal{O}(\Omega_1) \rightarrow \mathcal{O}(\Omega_2)$ ,  $T(\varphi) = S \star \varphi$ .  $T$  est injective (par transformation de Fourier).  $T^* : \mathcal{O}'(\Omega_2) \rightarrow \mathcal{O}'(\Omega_1)$  la transposée de  $T$  et on a, par définition,  $T^* u = \check{S} \star u \mid \mathcal{O}(\Omega_1)$ . Notre but, dans ce paragraphe, est de donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur  $S, \Omega_1$  et  $\Omega_2$ , pour avoir  $T^* \mathcal{E}(\Omega_2) = \mathcal{E}(\Omega_1)$ .

LEMME 1. - Pour que  $T^{-1}$  soit continue pour les suites, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1°  $\forall K_1 \subset \Omega_1$ ,  $K_1$  compact,  $\exists C$ ,  $\exists N$  tels que

$$\|\varphi\|_0 \leq C \|S * \varphi\|_N \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}_{K_1} \quad .$$

2°  $\forall K_2 \subset \Omega_2$ ,  $K_2$  compact,  $\exists K_1$ ,  $K_1$  compact,  $K_1 \subset \Omega_1$  tel que :

$$\forall \varphi, \varphi \in \mathcal{O}(\Omega_1), \quad \text{supp } T\varphi \subset K_2 \implies \text{supp } \varphi \subset K_1 \quad .$$

La démonstration de ce lemme est immédiate [2].

THÉOREME 1. - Pour que l'on ait  $T^* \mathcal{O}'(\Omega_2) \supset \mathcal{E}(\Omega_1)$ , il est nécessaire que  $T^{-1}$  soit continue pour les suites.

Démonstration. - Soit  $K_2$  un compact de  $\Omega_2$  ; posons

$$E = \{ \varphi \mid \varphi \in \mathcal{O}(\Omega_1), \text{ supp } T\varphi \subset K_2 \} \quad ,$$

avec les semi-normes  $\|T\varphi\|_j$ .  $E$  est un espace métrique. Considérons sur  $E \times \mathcal{E}(\Omega_1)$  la forme bilinéaire  $\int f(x) \varphi(x) dx$ . On voit facilement, en utilisant l'hypothèse, qu'elle est séparément continue.  $\mathcal{E}(\Omega_1)$  étant un espace de Fréchet, il en résulte qu'elle est continue. Il existe donc deux entiers  $k$  et  $N$ , une constante  $C$ , et un compact  $K_1$ , tels que :

$$\left| \int f\varphi dx \right| \leq C \sup_{\substack{x \in K_1 \\ |\alpha| \leq k}} |D^\alpha f(x)| \|T\varphi\|_N \quad \forall f \in \mathcal{E}(\Omega_1), \quad \forall \varphi \in E \quad .$$

On en déduit aussitôt que  $\text{supp } \varphi \subset K_1$ . En prenant  $f \in \mathcal{S}$ , et  $g = (1 - \Delta)^j f$ , on en déduit, pour  $j$  assez grand,

$$\left| \int g\varphi dx \right| \leq C' \int |g| dx \|T\varphi\|_{N+2j}$$

d'où :

$$\|\varphi\|_0 \leq C' \|T\varphi\|_{N+2j} \quad .$$

C. Q. F. D.

Notre but est de démontrer la réciproque du théorème 1. Auparavant, nous allons étudier les conditions 1° et 2° du lemme 1.

THÉOREME 2. - La condition 1° du lemme 1 est équivalente à la condition (c) suivante portant sur  $\hat{S}$  :

(c) Il existe trois constantes  $A_1, A_2, A_3$  vérifiant :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad \sup_{|\eta-\xi| \leq A_1 \text{Log}(2+|\xi|)} |\hat{S}(\eta)| \geq \frac{1}{(A_2 + |\xi|)^3}, \quad \eta \in \mathbb{R}^n .$$

Démonstration.

1re partie. - Elle résultera de la proposition suivante, en apparence plus forte :

PROPOSITION 1. - Supposons qu'il existe un compact  $K_1$  contenu dans  $\mathbb{R}^n$ , a intérieur non vide, et deux constantes  $C$  et  $N$  vérifiant

$$\forall \varphi \in \mathcal{O}_{K_1} \quad \|\varphi\|_0 \leq C \|\mathcal{T}\varphi\|_N$$

alors  $\hat{S}$  vérifie (C).

En supposant (C) non vérifiée, EHRENPREIS construit une suite de fonctions  $\varphi_n$  de  $\mathcal{O}_{K_1}$  avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S * \varphi_n\| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|_0 = +\infty$$

(voir [1] et [2]).

2ème partie. - En posant  $\psi = S * \varphi$ , on a :  $\hat{\psi} = \frac{\hat{\psi}}{\hat{S}}$ , et on est ramené à majorer le rapport de deux fonctions entières. Nous avons :

LEMME 2. - Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions analytiques dans  $\mathbb{C}^n$  telles que  $\frac{f}{g}$  soit aussi analytique, alors, pour tout  $r$  ( $r > 0$ ), on a :

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq \sup_{|z-\zeta| \leq 4r} |f(\zeta)| \sup_{|z-\zeta| \leq 4r} |g(\zeta)| / \left( \sup_{|z-\zeta| \leq r} |g(\zeta)| \right)^2 .$$

Ce lemme résulte du suivant :

LEMME 2 bis. - Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions analytiques dans  $\mathbb{C}^n$  telles que  $\frac{f}{g}$  soit aussi analytiques, alors pour tout  $R$  ( $R > 0$ ) on a

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq \sup_{|\zeta| \leq R} |f(\zeta)| \left( \sup_{|\zeta| \leq R} |g(\zeta)| \right)^{(2|z|)/(R-|z|)} |g(0)|^{-((R+|z|)/(R-|z|))} \quad \text{pour } |z| < R .$$

On se ramène au cas où  $n = 1$ ,

$$\sup_{|z| \leq R} |f(z)| = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{|z| \leq R} |g(z)| = 1 .$$

On écrit alors

$$f(z) = f_1(z) f_2(z) \quad g(z) = g_1(z) g_2(z)$$

avec  $f_1(z) g_1(z) \neq 0$  pour  $|z| < R$ ;  $f_2(z)$  et  $g_2(z)$  holomorphes pour  $|z| < R$  et vérifiant :

$$|f_2(z)| = |g_2(z)| = 1 \text{ pour } |z| = R \quad .$$

On a alors :

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq \left| \frac{f_1(z)}{g_1(z)} \right| \leq \frac{1}{|g_1(z)|} \quad .$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Harnack à la fonction harmonique et positive  $-\log|g_1(z)|$  il vient

$$-\log|g_1(z)| \leq -\frac{R+|z|}{R-|z|} \log|g_1(0)|$$

d'où

$$\frac{1}{|g_1(z)|} \leq |g(0)|^{-((R+|z|)/(R-|z|))} \quad .$$

C. Q. F. D.

Le lemme 2 en résulte immédiatement en prenant  $R = 3r$ , et pour origine un point  $\zeta_0$  avec

$$|g(\zeta_0)| = \sup_{|z-\zeta| \leq r} |g(\zeta)| \quad .$$

Appliquons-le à  $\hat{\varphi} = \frac{\hat{\psi}}{\hat{S}}$ . On a

$$|\hat{\psi}(\zeta)| \leq C_1 e^{R|\eta|} (1 + |\zeta|)^{-N} \|\psi\|_N$$

avec

$$\zeta = \xi + i\eta \text{ et } R = \sup_{\substack{y \in K_1 \\ z \in \text{supp} S}} |y + z|$$

et

$$|\hat{S}(\zeta)| \leq C_2 e^{H|\eta|} (1 + |\zeta|)^\mu$$

$\mu$  étant l'ordre de  $S$ . Par hypothèse, on a aussi la condition (C) portant sur  $\hat{S}$ . Prenons  $r = A_1 \log(2 + |\xi|)$  et appliquons le lemme 2, il vient alors :

$$|\hat{\varphi}(\zeta)| \leq C(1 + |\xi|)^\alpha \|\psi\|_N$$

avec  $\alpha = 4A_1(R + H) + \mu + 2A_3 - N$ . Toutes les constantes qui interviennent sont indépendantes de  $\varphi$ . Par intégration, et pour  $N$  assez grand, on obtient

$$\|\varphi\|_0 \leq C' \|\psi\|_N \quad .$$

L'idée de cette démonstration est due à MALGRANGE [2].

C. Q. F. D.

Définition. - Si  $\hat{S}$  vérifie (C), on dira qu'elle est lentement décroissante et que  $S$  est inversible :

Donnons une autre caractérisation de la décroissance lente :

THÉOREME 3. - Pour que  $\hat{S}$  soit lentement décroissante, il faut et il suffit que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ , telle que  $S \star \varphi \in \mathcal{O}$ , on ait  $\varphi \in \mathcal{O}$ .

Condition nécessaire. - Par PALEY-WIENEF, il suffit de démontrer que  $\frac{\hat{\psi}}{S}$  est de type exponentiel à décroissance rapide pour  $\zeta$  réel, ce qui est immédiat avec les hypothèses et le lemme 2.

Condition suffisante. - Voir [2].

Étudions maintenant la condition 2° du lemme 1.

THÉOREME 4. - La condition 2° du lemme 1 est équivalente à la suivante :

Pour tout  $\varphi \in \mathcal{E}'(\Omega_1)$  la distance du support de  $\varphi$  à  $\Omega_1$  est égale à la distance du support de  $S \star \varphi$  à  $\Omega_2$ .

La démonstration est immédiate avec le théorème des supports [3] et l'inclusion  $\Omega_1 + \text{supp } S \subset \Omega_2$ .

Nous voyons que, si la première condition du lemme 1 ne fait intervenir que  $\hat{S}$ , la deuxième est, par contre, géométrique, et fait intervenir les ouverts  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

Définition. - Un couple d'ouverts  $(\Omega_1, \Omega_2)$  tels que  $\Omega_1 + \text{supp } S \subset \Omega_2$ , est appelé S-convexe s'il vérifie l'une des deux conditions équivalentes du théorème 4.

Signalons que si  $\Omega_2$  est convexe, et  $\Omega_1$  le plus grand ouvert vérifiant  $\Omega_1 + \text{supp } S \subset \Omega_2$ , alors  $\Omega_1$  est convexe, et  $(\Omega_1, \Omega_2)$  est un couple S-convexe pour tout  $S$ . Ce qui justifie la définition.

Nous arrivons au théorème fondamental suivant :

THÉOREME FONDAMENTAL I. - Les conditions suivantes sont équivalentes

- 1°  $T^* \mathcal{E}(\Omega_2) = \mathcal{E}(\Omega_1)$ .
- 2°  $T^* \mathcal{O}'(\Omega_2) \supset \mathcal{E}(\Omega_1)$ .
- 3°  $\hat{S}$  lentement décroissante, et  $(\Omega_1, \Omega_2)$  S-convexe.

Démonstration. - On a évidemment  $(1^\circ) \implies (2^\circ)$ . Les théorèmes 1, 2 et 4 montrent que  $(2^\circ) \implies (3^\circ)$ . Il reste à démontrer que  $(3^\circ) \implies (1^\circ)$ , c'est-à-dire que  $T^*$  est surjective comme application de  $\mathcal{E}(\Omega_2)$  dans  $\mathcal{E}(\Omega_1)$ . D'après un théorème d'espaces vectoriels topologiques, il suffit de vérifier que l'application :

$$T : \mathcal{E}'(\Omega_1) \rightarrow \mathcal{E}'(\Omega_2) \quad (T\varphi = S \star \varphi)$$

est injective et que  $T\mathcal{E}'(\Omega_1)$  est fermé dans  $\mathcal{E}'(\Omega_2)$ .

Démontrons ce deuxième point, le premier étant trivial.

Soit  $M$  une partie équicontinue et fermée de  $\mathcal{E}'(\Omega_2)$ , montrons que  $M \cap T\mathcal{E}'(\Omega_1)$  est fermée dans  $\mathcal{E}'(\Omega_2)$ . On a,  $\forall \psi \in M, \forall f \in \mathcal{E}(\Omega_2)$  :

$$|\langle \psi, f \rangle| \leq C \sum_{|\alpha| \leq N} \sup_{x \in K_2} |D^\alpha f(x)|$$

$C, N$  et le compact  $K_2$  étant indépendants de  $\psi$  et  $f$ . On en déduit que  $\text{supp } \psi \subset K_2$  et  $|\hat{\psi}(\zeta)| \leq C(1 + |\zeta|)^N e^{R|\eta|}$  pour tout  $\psi$  dans  $M$ .

Soit  $\psi_i$  un filtre convergeant dans  $S \star \mathcal{E}'(\Omega_1) \cap M$ . Posons  $\psi = \lim \psi_i$ ; on a  $\psi \in M$ .

Par hypothèse, il existe un compact  $K_1$  ( $K_1 \subset \Omega_1$ ) tel que  $\psi_i = S \star \varphi_i$  avec  $\varphi_i \in \mathcal{E}'(K_1)$ .

$\hat{\psi}_i$  converge uniformément sur tout compact (MONTEL). D'après le lemme 2 et la condition (C), il en est de même pour  $\hat{\varphi}_i$ ; on a même  $\hat{\varphi}_i \rightarrow \frac{\hat{\psi}}{S}$  dans  $\mathcal{S}'$ . On en déduit que  $\varphi_i \rightarrow \varphi$  dans  $\mathcal{S}'$  avec  $\varphi \in \mathcal{E}'(K_1)$  et  $\psi = S \star \varphi$ .

C. Q. F. D.

## 2. Existence dans $\mathcal{O}'$ .

Si  $u \in \mathcal{O}'(\Omega)$ , nous appelons support singulier de  $u$ , le plus petit fermé  $F$  de  $\Omega$ , tel que

$$u \in \mathcal{E}(\Omega \cap \mathbb{C}F) \quad .$$

Définition. - Soient deux ouverts  $(\Omega_1, \Omega_2)$  tels que :

$$\Omega_1 + \text{supp } S \subset \Omega_2 \quad .$$

Ce couple est dit S-fortement convexe s'il satisfait aux deux conditions suivantes:

1°  $(\Omega_1, \Omega_2)$ , S-convexe.

i. e.  $\forall \varphi \in \mathcal{E}'(\Omega_1), d(\text{supp } \varphi, \mathbb{C}\Omega_1) = d(\text{supp } S \star \varphi, \mathbb{C}\Omega_2)$ .

2°  $\forall \varphi \in \mathcal{E}'(\Omega_1)$

$$d(\text{supp sing } \varphi, \Omega_1) = d(\text{supp sing } S * \varphi, \Omega_2) \quad .$$

THÉOREME FONDAMENTAL II. - Pour que l'on ait  $T^* \mathcal{O}'(\Omega_2) = \mathcal{O}'(\Omega_1)$ , il faut et il suffit que les deux conditions suivantes soient satisfaites :

1°  $\hat{S}$  lentement décroissante.

2°  $(\Omega_1, \Omega_2)$  fortement S-convexe.

Pour la démonstration, voir [2].

COROLLAIRE 1. -  $T^* \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n) = \mathcal{O}'(\mathbb{R}^n)$  est équivalent à  $\hat{S}$  lentement décroissante

COROLLAIRE 2. -  $T^* \mathcal{O}'(\Omega_2) \supset \mathcal{O}'^F(\Omega_1)$  est équivalent aux conditions du théorème fondamental I.

Ce corollaire résulte du théorème et du lemme.

LEMME 3. - Toute distribution f d'ordre fini dans  $\Omega_1$  ( $f \in \mathcal{O}'^F(\Omega_1)$ ) s'écrit sous la forme :  $f = g + h$  avec  $g \in \mathcal{E}(\Omega_1)$  et  $h = H/\Omega_1$ , H étant une distribution sur  $\mathbb{R}^n$  ( $H \in \mathcal{O}'$ ).

La démonstration se fait par partition de l'unité, et régularisation.

Remarques.

1° On peut se demander si les conditions du théorème fondamental I sont équivalentes à  $T^* \mathcal{O}'^F(\Omega_2) = \mathcal{O}'^F(\Omega_1)$ . La réponse est négative en général (due à EHRENPREIS et MALLIAVIN). La décroissance lente de  $\hat{S}$  ne suffit pas, il faut une condition plus forte.

2° On peut avoir  $(\Omega_1, \Omega_2)$  S-convexe, mais non fortement S-convexe (voir le contre-exemple donné par ZERNER [6]).

3° Signalons enfin que si le support de S est formé d'un nombre fini de points,  $\hat{S}$  est lentement décroissante, et si  $\Omega_2$  est convexe et  $\Omega_1$  le plus grand ouvert vérifiant  $\Omega_1 + \text{supp } S \subset \Omega_2$ , alors  $(\Omega_1, \Omega_2)$  est fortement S-convexe.

En particulier si  $S = P(-D) \delta$ , on en déduit que, pour tout ouvert convexe  $\Omega$ , on a :

$$P(D) \mathcal{O}'(\Omega) = \mathcal{O}'(\Omega) \quad .$$



BIBLIOGRAPHIE

- [1] EHRENPREIS (Léon). - Solutions of some problems of division, Amer. J. Math., I : t. 76, 1954, p. 883-903 ; III : t. 78, 1956, p. 685-715 ; IV : t. 82, 1960, p. 522-588.
  - [2] HÖRMANDER (Lars). - On the range of convolution operators, Annals of Math., Series 2, t. 76, 1962, p. 148-170.
  - [3] LIONS (Jean-Louis). - Supports dans la transformation de Laplace, J. Anal. math. Jérusalem, t. 2, 1952-1953, t. 369-380.
  - [4] MALGRANGE (Bernard). - Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 274-355 (Thèse Sc. math. Paris. 1955).
  - [5] SCHWARTZ (Laurent). - Théorie des distributions, Tomes I (2e éd.) et II. - Paris, Hermann, 1957 et 1961 (Act. scient. et ind., 1091 = 1245 et 1122 ; Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 9 et 10).
  - [6] ZERNER (Martin). - Solutions de l'équation des ondes présentant des singularités sur une droite, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 250, 1960, p. 2980-2982.
-