Bernard Morin

Un contre-exemple de Milnor à la Hauptvermutung

Séminaire N. Bourbaki, 1962, exp. nº 226, p. 41-63

<http://www.numdam.org/item?id=SB_1961-1962__7__41_0>

Séminaire BOURBAKI
14e année 1961/62, n° 226

Décembre 1961

UN CONTRE-EXEMPLE DE MILNOR À LA HAUPTVERMUTUNG

par Bernard MORIN

1. La Hauptvermutung.

On dit qu'un polyèdre P, c'est-à-dire un espace topologique homéomorphe à la réalisation géométrique d'un complexe simplicial abstrait K localement fini et de dimension finie, vérifie la propriété (H) si, quels que soient les complexes simpliciaux K' et K'' dont les réalisations géométriques sont homéomorphes à P, K' est combinatoirement équivalent à K''. La conjecture fondamentale de la topologie combinatoire (Hauptvermutung) s'énonce : tout polyèdre de dimension finie vérifie (H).

Cette conjecture, formulée en 1908 par TIETZE et STEINITZ, a été démontrée pour les polyèdres de dimension $K \leq 2$ par PAPAKYRIAKOPOULOS [10]. On ne sait rien pour les dimensions 3, 4 et 5. Enfin MILNOR [7] a démontré récemment :

THÉORÈME 1. - En toute dimension $k \geq 7$, il existe 2 complexes finis K_1 et K_2 combinatoirement distincts dont les réalisations géométriques sont homéomorphes.

Notre but est de reproduire la démonstration de ce théorème.

En fait, le résultat de MILNOR est beaucoup plus fort puisqu'il construit 2 polyèdres compacts P_1 et P_2 et qu'il démontre :

a. P_1 est homéomorphe à P_2

b. il existe une décomposition simpliciale K_1 de P_1 et une décomposition simpliciale K_2 de P_2, telles qu'aucune subdivision cellulaire (en un sens très large, cf. § 2) finie de K_1 ne soit isomorphe à une subdivision cellulaire de K_2.

On démontre (a) en appliquant le théorème de Mazur (§ 6) (cf. [5] et [6]) à deux espaces lenticulaires de dimension 3, L^1 et L^2 qui ont même type d'homotopie. Les polyèdres P_1 et P_2 sont alors les compactifications d'Alexandroff de $L^1 \times R^n$ et $L^2 \times R^n$ respectivement, et sont par suite de dimension $k = n + 3$.

La démonstration du théorème de Mazur telle qu'elle est donnée dans [5] et esquissée dans [7] ne permet d'affirmer que P_1 est homéomorphe à P_2 que pour $k \geq 8$. Mais MAZUR assure qu'il peut gagner une dimension.

En vue d'établir (b), on montre, à l'aide de la torsion définie par REIDEMEISTER, FRANZ et de RHAM que des triangulations $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ de L^1 et L^2 respectivement, compatibles avec les structures différentiables de ces variétés, sont combinatoirement distinctes. Désignant le n-simplexe type par Δ^n et sa frontière par $\partial(\Delta^n)$, on définit le complexe K_1 (resp. K_2), en adjoignant à $\mathcal{T}_1 \times \Delta^n$ (resp. $\mathcal{T}_2 \times \Delta^n$) le cône (au sens simplicial) de base $\mathcal{T}_1 \times \partial\Delta^n$ (resp. $\mathcal{T}_2 \times \partial\Delta^n$). La réalisation de K_1 (resp. de K_2) est évidemment homéomorphe à P_1 (resp. à P_2). En vue de distinguer combinatoirement les complexes K_1 et K_2, on étend la notion de torsion définie pour des complexes simpliciaux munis de systèmes à coefficients locaux à des complexes cellulaires d'un type très général, munis de faisceaux localement constants. Pour définir cette torsion généralisée, on doit utiliser la cohomologie à supports compacts à coefficients dans un faisceau, alors que la notion classique de torsion ne faisait intervenir que la théorie de l'homologie simpliciale. De même que la torsion de Franz est invariante par subdivision simpliciale, de même la torsion de MILNOR est invariante par subdivision cellulaire au sens général.

REMARQUE. - Il convient de noter que les polyèdres construits ici ne sont pas des variétés topologiques et que, par suite, il reste raisonnable d'espérer que toute variété triangulable (ou combinatoire) vérifie (H). En tout cas MOÏSE [8] l'a montré pour toute variété de dimension $\leqslant 3$ et SMALE [11] pour des triangulations de la sphère S_n $(n \neq 4, 5)$ localement semblables à la triangulation ordinaire. Une forme affaiblie de la Hauptvermutung a été démontrée par GLUCK [3] pour les boules et les sphères.

Rappelons enfin que WHITEHEAD [12] a démontré :

THÉORÈME 2. - Soit V_n une variété différentiable de dimension n, avec ou sans bord, $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ deux triangulations de V_n, $|\mathcal{T}|$ et $|\mathcal{T}'|$ les réalisations géométriques des complexes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$. On suppose que $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont compatibles avec la structure différentiable de V_n, c'est-à-dire que les restrictions à chaque n-simplexe des homéomorphismes $|\mathcal{T}| \to V_n$, $|\mathcal{T}'| \to V_n$, qui servent à les définir, sont des applications différentiables de classe C^1 de rang maximum. Dans ces conditions $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sont combinatoirement équivalentes.

Une triangulation $\mathcal{T}$ d'une variété différentiable V_n qui satisfait à la condition du théorème 2 s'appelle une C^1-triangulation.

2. Complexes cellulaires.

DÉFINITION 1. – Un complexe cellulaire K est un espace topologique localement compact (noté aussi K) d'une suite

$$\dots \subset K^{-1} \subset K^{0} \subset K^{1} \subset \dots$$

de sous-espaces fermés vérifiant les axiomes :

(IC$_1$) $$K = \bigcup_q K^q$$

(IC$_2$) $$K^q = \emptyset \quad \text{pour tout} \quad q \leq -1$$

$K^q - K^{q-1}$ est une somme topologique de boules ouvertes de dimension q, $(q \geq 0)$. (On convient de considérer les points isolés comme des boules de dimension 0.)

K^q s'appelle le q-squelette de K. Les composantes connexes de $K^q - K^{q-1}$ sont les q-cellules de K. On dit qu'une application f d'un complexe K_1 dans un complexe K_2 est un isomorphisme, si f est un homéomorphisme des espaces sous-jacents, et si f applique les q-squelettes de K_1 sur les squelettes de K_2 pour tout entier q.

Un sous-complexe cellulaire de K est une réunion K_1 de cellules de K munie des squelettes $K_1^q = K^q \cap K_1$ pour tout entier q.

Si K_1 et K_2 sont deux complexes cellulaires de squelettes respectifs K_1^q, K_2^q on appelle complexe-produit de K_1 et de K_2 l'espace $K_1 \times K_2$ muni des squelettes $(K_1 \times K_2)^q = \bigcup_{r+s=q} K_1^q \times K_2^{q'}$.

Toute q-cellule e de $K_1 \times K_2$ est de la forme $e_1 \times e_2$ où e_1 est une r-cellule de K_1, et e_2 une s-cellule de K_2 avec $r + s = q$.

On dit qu'une application f d'un complexe cellulaire K' dans un complexe cellulaire K est une subdivision de K, si f est un homéomorphisme qui applique chaque cellule de K' dans une cellule de K.

Toute subdivision $f_1 : K_1' \to K_1$ d'un sous-complexe fermé K_1 de K définit une subdivision K' de K dont les squelettes K'_q sont de la forme $K_1^q \cup f_1(K_1'^q)$.

On dit que K est de dimension finie n si $K^q = K^n$ pour tout $q \geq n$.

Lorsque K est fini, c'est-à-dire lorsqu'il n'a qu'un nombre fini de cellules,

<u>La caractéristique d'Euler-Poincaré</u> $\chi(K)$ de K est la somme alternée sur $q \geq 0$ du nombre B_q de q-cellules :

$$\chi(K) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q B_q \quad .$$

EXEMPLE. - L'espace euclidien R^n est un complexe cellulaire de dimension n qui n'a qu'une seule cellule. Tout CW-complexe (donc tout complexe simplicial) localement fini est un complexe cellulaire.

<u>Cohomologie cellulaire</u>. - Dans la suite, on utilise la théorie de la cohomologie à supports compacts à valeurs dans un faisceau.

Soient K un complexe cellulaire, $\mathcal{G}$ un faisceau localement constant sur K (c'est-à-dire un système de coefficients locaux si K est connexe par arcs), on a :

$$H^i(K^q - H^{q-1}, \mathcal{G}) = 0 \quad \text{pour tout} \quad i \neq q \quad .$$

Posons :

$$C^q(K ; \mathcal{G}) = H^q(K^q - K^{q-1}, \mathcal{G})$$

où

$$H^q(K^{q-1}, \mathcal{G}) = \bigoplus_{e \in \pi_0(K^q - K^{q-1})} H^q(e, \mathcal{G}) \quad .$$

On identifie $H^q(e, \mathcal{G})$ à la fibre type au-dessus d'un point de la cellule e au moyen d'une orientation de e.

On définit le complexe des <u>cochaînes cellulaires</u> à valeurs dans $\mathcal{G}$

$$C^*(K, \mathcal{G}) = \bigoplus_{q \geq 0} C^q(K, \mathcal{G})$$

en prenant pour opérateur cobord :

$$\delta : C^q(K, \mathcal{G}) \to C^{q+1}(K, \mathcal{G})$$

le cobord de la paire $(K^{q+1} - K^{q-1}, K^q - K^{q-1})$.

L'homologie $H(C^*(K, \mathcal{G}))$ s'appelle le <u>cohomologie cellulaire</u> de K à valeurs dans $\mathcal{G}$.

LEMME 1. - Soit K un complexe cellulaire de dimension finie n. La cohomologie $H^q(K, \mathfrak{S})$ à supports compacts à valeurs dans un faisceau $\mathfrak{S}$ localement constant sur K, est canoniquement isomorphe au q-ième groupe de cohomologie cellulaire $H(C^q(K, \mathfrak{S}))$ de K à valeurs dans $\mathfrak{S}$.

DÉMONSTRATION. - Considérons les données spectrales ([2], p. 335, ex. 2)

$$H(p, q) = H^*(K^q, K^p ; \mathfrak{S}) \qquad (0 \leqslant p \leqslant q \leqslant n)$$

définies par la suite

$$\dots \subset K^o \subset K^1 \subset \dots \subset K^n \dots$$

des squelettes de K.

Les squelettes d'indices négatifs étant vides par définition, l'axiome SP_5 de [2] est évidemment vérifié. Comme K^p est fermé dans K^q, et que la cohomologie à valeurs dans le faisceau $\mathfrak{S}$ est prise à supports compacts,

$$E(p, q) \approx H^*(K^q - K^p, \mathfrak{S}) \qquad .$$

Par suite d'après les définitions précédentes, le terme E_1^p de la suite spectrale associée s'identifie aux groupes des cochaînes cellulaires $C^p(K, \mathfrak{S})$ de degré p de K, et la différentielle d_1 à l'opérateur cobord de $C^*(K, \mathfrak{S})$. Par suite le terme E_r de cette suite spectrale est isomorphe à la cohomologie $H(C^*(K, \mathfrak{S}))$ et les différentielles d_r sont toutes nulles pour $r \geqslant 2$. Par suite $E_r \approx H(C^*(K, \mathfrak{S}))$. Comme par hypothèse $K^p = \emptyset$ pour $p \geqslant n+1$, la suite est faiblement convergente au sens de [2] et l'on a :

$$E_\infty \approx H(C^*(K, \mathfrak{S})) \qquad .$$

Or comme l'image de l'homomorphisme

$$E(p, \infty) \to E(-\infty, \infty) = H^*(K, \mathfrak{S})$$

s'identifie (comme on le voit par exemple en utilisant la cohomologie de Čech) à $\sum_{q \geqslant p} H^q(K, \mathfrak{S})$, on voit que

$$E_\infty = H^*(K, \mathfrak{S})$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

3. La torsion d'un complexe acyclique.

DÉFINITION 2. – Soient A un anneau principal, M un A-module libre de dimension r. On appelle volume dans M un générateur v du A-module libre $\Lambda^r M$ de dimension 1 (puissance extérieure r-ième de M).

Lorsque $r = 0$, v s'identifie à un élément inversible de A.

Soit la suite exacte

$$(1) \qquad 0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \to 0$$

de A-modules libres de dimension finie r', r et r'' respectivement. On désigne par

$$i_* : \Lambda(M') \to \Lambda(M)$$

$$j_* : \Lambda(M) \to \Lambda(M'')$$

les homomorphismes d'algèbres extérieures définies par i et j. On dira que la suite (v', v, v'') de volumes v' v v'' dans M', M et M'' respectivement est adaptée à la suite (1) si l'on a :

$$v = i_*(v') \wedge \overline{v''}$$

où $\overline{v''} \in \Lambda^{r''}(M)$ vérifie :

$$j_*(\overline{v''}) = v'' \quad .$$

La suite adaptée (v', v, v'') est entièrement déterminée dès qu'on s'est donné deux quelconques de ses éléments.

Soit maintenant le complexe acyclique $C = \bigoplus_{-1 \leqslant q \leqslant n} C^q$, défini par la suite exacte :

$$0 = C^{-1} \to C^0 \xrightarrow{\delta} C^1 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} C^n \to 0$$

de A-modules libres C^q de dimension finie, et soient v_q des volumes dans C^q pour $0 \leqslant q \leqslant n$.

Comme A est un anneau principal le sous-module $\delta(C^{q-1})$ du module C^q est un module libre. A l'aide des suites exactes partielles :

$$(2q) \qquad 0 \to \delta(C^{q-1}) \to C^q \to \delta(C^q) \to 0 \qquad (0 \leqslant q \leqslant n-1)$$

on détermine par récurrence descendante pour $n - 1 \geqslant q \geqslant -1$ des volumes t_q dans $\delta(C^q)$ en posant $t_n = 1$, de façon que les suites (t_{q-1}, v_q, t_q) soient adaptées aux suites (2q). D'après ce qui précède, les t_q sont déterminés de façon unique. On dit que les t_q sont <u>adaptés</u> aux volumes v_q.

DÉFINITION 3. - Soit $C = \bigoplus_{-1 \leqslant q \leqslant n} C^q$ un complexe acyclique de différentielle δ gradué par des A-modules libres de dimension finie C^q avec $C^{-1} = 0$; soient v_q des volumes dans chacun des C^q $(0 \leqslant q \leqslant n)$; soient t_q $(-1 \leqslant q \leqslant n)$ les volumes adaptés aux v_q. On appelle <u>torsion</u> du complexe C, relativement aux volumes v_q, le volume t_{-1} dans C^{-1}. C'est un élément inversible de A qu'on notera :

$$t = t(v_0, v_1, \ldots, v_n) \qquad .$$

REMARQUES.

1° Si l'on ne suppose pas que le complexe C est acyclique, on peut encore, lorsque A est un corps, définir une torsion, mais elle dépend alors non seulement de volumes v_q dans C^q, mais également de volumes u_q dans les espaces vectoriels d'homologie H^q du complexe C.

2° Le fait que A soit un anneau principal n'est pas essentiel pour parvenir à la définition de la torsion d'un complexe.

Si A est un anneau commutatif quelconque on dit qu'un A-module M est quasi-libre de dimension r, s'il existe un A-module libre N de dimension finie n tel que $M \oplus N$ soit un module libre de dimension $r + n$. Si M est quasi-libre de dimension r, la puissance extérieure r-ième, $\Lambda^r M$ de M, est libre à un générateur ce qui permet de définir les volumes dans M.

Dans une suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de A-modules, si M et M'' sont quasi-libres, alors M' est quasi-libre.

A tout complexe acyclique C de différentielle δ gradué par des modules quasi-libres de dimension finie C^q munis de volumes v_q, on peut donc associer comme ci-dessus des volumes t_q dans $\delta(C^q)$.

LEMME 2. - Soit

$$(3) \qquad 0 \to C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \to 0$$

une suite exacte de complexes acycliques gradués par des A-modules libres de dimension finie C'^q , C^q , C''^q respectivement $(-1 \leqslant q \leqslant n)$ tels que $C'^{-1} = C^{-1} = C''^{-1} = 0$.

Soient v'_q , v_q et v''_q des volumes dans les modules C'^q , C^q , C''^q respectivement, pour $0 \leqslant q \leqslant n$, de sorte que les suites $v'_q\ v_q\ v''_q$ soient adaptées aux suites exactes

$$0 \to C'^q \xrightarrow{i^q} C^q \xrightarrow{j^q} C''^q \to 0$$

induites par la suite exacte (3). Alors la torsion du complexe C relativement aux volumes v_q est égale au signe près au produit des torsions des complexes C' et C'' relativement aux volumes v'_q et v''_q respectivement :

$$t(v_o , v_1 , \dots , v_n) = \pm\, t(v'_o , v'_1 , \dots , v'_n)\ t(v''_o , v''_1 , \dots , v''_n) .$$

DÉMONSTRATION. - Soient t'_q , t_q et t''_q les volumes adaptés aux volumes v'_q , v_q et v''_q respectivement $(-1 \leqslant q \leqslant n)$.

Dans le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \delta'(C'^{q-1}) \arrow[r, "\bar{i}^q"] \arrow[d, "\varepsilon'"] & \delta(C^{q-1}) \arrow[r, "\bar{j}^q"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \delta''(C''^{q-1}) \arrow[r] \arrow[d, "\varepsilon''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C'^q \arrow[r, "i^q"] \arrow[d, "\delta'"] & C^q \arrow[r, "j^q"] \arrow[d, "\delta"] & C''^q \arrow[r] \arrow[d, "\delta''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \delta'(C'^q) \arrow[r, "\bar{i}^{q+1}"] \arrow[d] & \delta(C^q) \arrow[r, "\bar{j}^{q+1}"] \arrow[d] & \delta''(C''^q) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

on suppose que

$$(4) \qquad t_q = \pm\, i^{q+1}(t'_q) \wedge \bar{t}''_q \qquad (0 \leqslant q \leqslant n-1)$$

où $\bar{t}''_q \in \Lambda\delta(C^q)$ est tel que

$$j^{q+1}(\bar{t}''_q) = t''_q \quad .$$

En remarquant que les suites

$$(t'_{q-1}\ ,\ v'_q\ ,\ t'_q)\ ,\quad (t''_{q-1}\ ,\ v''_q\ ,\ t''_q)\ ,\quad (v'_q\ ,\ v_q\ ,\ v''_q)\ ,\quad (t_{q-1}\ ,\ v_q\ ,\ t_q)$$

sont adaptées aux suites exactes correspondantes extraites du diagramme précédent, on voit aisément que (4) est encore valable en remplaçant q par $q-1$; le changement de signe éventuel étant déterminé par la parité du produit

$$\dim \delta(C'^q)\ \dim \delta(C''^{q-1}) \quad .$$

Comme $t'_n = t_n = t''_n = 1$, on en déduit que $t_{-1} = \pm\, t'_{-1}\ t''_{-1}$ ce qui démontre le lemme.

4. La torsion d'un complexe cellulaire muni d'un faisceau localement constant.

DÉFINITION 4. – Soit A^* le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'anneau A. Soient K un espace topologique, connexe par arcs, à point-base b, et $\mathcal{G}$ un faisceau localement constant de A-modules libres de dimension r sur K.

Soit $S(\alpha) : \mathcal{G}_b \to \mathcal{G}_b$ l'automorphisme de la fibre de $\mathcal{G}$ au point b défini par un lacet quelconque représentant l'élément $\alpha \in \pi_1(K\ ,\ b)$; on appelle <u>homomorphisme caractéristique</u> $s : \pi_1(K\ ,\ b) \to A^*$ du faisceau $\mathcal{G}$ l'application qui associe à α le déterminant $s(\alpha)$ de l'automorphisme $S(\alpha)$. Lorsque $r = 1$, s est égal à S, et détermine par conséquent le faisceau $\mathcal{G}$.

<u>Volumes distingués dans un complexe de chaînes</u>. – Soit K un complexe cellulaire fini de dimension n, connexe par arcs, muni d'un point-base b. On ordonne les B_q cellules de dimension q de K en une suite e^q_i $(1 \leq i \leq B_q\ ,\ 0 \leq q \leq n)$ On munit chaque cellule e^q_i d'une orientation et d'un point-base b^q_i. Soit c^q_i un chemin quelconque de K joignant b à b^q_i. Si $\mathcal{G}$ est un faisceau localement constant de A-modules libres de dimension finie r sur K, soit $(m_1\ ,\ m_2\ ,\ \dots\ ,\ m_r)$ une base de la fibre $\mathcal{G}_b$ au-dessus de b. Les $c^q_i(mj)$ $(1 \leq i \leq B_q\ ,\ 1 \leq j \leq r)$ forment une base du A-module libre

$$C^q(K\ ,\ \mathcal{G}) = \bigoplus_{1\leqslant i\leqslant B_q} H^q(e_i^q\ ,\ \mathcal{G})$$

les produits extérieurs

$$v_q\ :\ (m_1\ ,\ m_2\ ,\ \dots\ ,\ m_r) = \bigwedge_{ij} c_i^q(mj)$$

s'appellent des volumes distingués dans $C^q(K\ ,\ \mathcal{G})$ (Lorsque $B_q = c$, on prendra pour volume distingué $v_q = 1$.)

On dira que le faisceau $\mathcal{G}$ sur l'espace topologique K est un faisceau <u>admissible</u> si c'est un faisceau localement constant de A-modules libres de dimension finie tel que $H^q(K\ ,\ \mathcal{G}) = 0$ quel que soit q .

LEMME 3. - Soient K un complexe cellulaire fini de dimension n , connexe par arcs, de point-base b , $\mathcal{G}$ un faisceau admissible de dimension r sur K , la torsion $t(v_o\ ,\ v_1\ ,\ \dots\ ,\ v_n)$ du complexe $C^*(K\ ,\mathcal{G})$ relativement à des volumes distingués v_q dans $C^q(K\ ,\ \mathcal{G})$ est indépendante de la base $m_1\ ,\ m_2\ ,\ \dots\ ,\ m_r$ choisie sur la fibre $\mathcal{G}_b$ pour définir les volumes v_q .

DÉMONSTRATION. - Soient $m_1'\ ,\ m_2'\ ,\ \dots\ ,\ m_r'$ une autre base de $\mathcal{G}_b$, v_q' les volumes définis à l'aide des $m'j$, et a le déterminant de la base $(m'j)$ sur la base (m_j) . Pour chaque q , $v_q' = a^{B_q} v_q$, où B_q est le nombre des cellules de dimension q . Par suite

$$t(v_o'\ ,\ v_1'\ ,\ \dots\ ,\ v_q') = a^{\chi(K)}\ t(v_o\ ,\ v_1\ ,\ \dots\ ,\ v_n)$$

où $\chi(K)$ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré de K . Or parce que $H^*(K\ ,\ \mathcal{G}) \equiv 0$, il faut que $\chi(B) = 0$ ou bien que $\mathcal{G} = 0$, d'où le lemme.

REMARQUE. - Comme les volumes v_q dépendent de l'ordre dans lequel on a pris les cellules en chaque dimension et de l'orientation choisie sur chacune d'elles, ils sont définis au signe près. D'autre part, si on change les chemins c_i^q , les produits extérieurs $\bigwedge_{i\leqslant j\leqslant r} c_i^q(mj)$ sont multipliés par un élément arbitraire de l'homomorphisme caractéristique du faisceau $\mathcal{G}$. Finalement, on voit que les $v_o(m_1\ ,\ m_2\ ,\ \dots\ ,\ m_r)$ sont déterminés à la multiplication par des éléments de la forme $\pm\ s(\alpha)$ près.

DÉFINITION 5. – Soient K un complexe cellulaire fini connexe par arcs et $\mathfrak{S}$ un faisceau admissible sur K. Soit $s : \pi_1(K , b) \to A^*$ l'homomorphisme caractéristique du faisceau $\mathfrak{S}$ en un point $b \in K$. On notera $A^*(\mathfrak{S})$ le groupe $A^*/\pm (s(\pi_1(K , b)))$ des éléments inversibles de A tordus par le faisceau $\mathfrak{S}$. On appelle <u>torsion de</u> K <u>relativement</u> au faisceau $\mathfrak{S}$ l'élément $t(K , \mathfrak{S})$ du groupe $A^*(\mathfrak{S})$ défini par la torsion $t(v_0 , v_1 , \dots , v_n) \in A^*$ du complexe $C^*(K , \mathfrak{S})$ relativement à des volumes distingués v_q dans $C^q(K , \mathfrak{S})$. D'après la remarque précédente, cet élément est indépendant des volumes choisis pour le définir.

LEMME 4. – Soient K un complexe cellulaire fini, connexe par arcs, $\mathfrak{S}$ un faisceau admissible sur K, K_1 un sous-complexe fermé et connexe par arcs de K, tel que le sous-complexe $K - K_1$ soit connexe par arcs et que $\mathfrak{S}$ induise sur K_1 et $K - K_1$ des faisceaux admissibles encore notés $\mathfrak{S}$; relativement aux faisceaux $\mathfrak{S}$, la torsion $t(K , \mathfrak{S})$ de K est égale au produit des torsions $t(K_1 , \mathfrak{S})$ de K_1 et $t(K - K_1 , \mathfrak{S})$ de $K - K_1$.

Ce lemme est une conséquence immédiate des lemmes 1 et 2.

THÉORÈME 3. – Soit K un complexe cellulaire fini connexe par arcs, et $\mathfrak{S}$ un faisceau admissible sur K. La torsion de K relativement à $\mathfrak{S}$ est invariante par subdivisions finies de K. En d'autres termes, si $\overline{K}$ est un complexe fini et $f : \overline{K} \to K$ une subdivision de K, on a $t(K , \mathfrak{S}) = t(\overline{K} , f^*(\mathfrak{S}))$.

DÉMONSTRATION. – On choisit une suite $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset K_r = K$ de sous-complexes fermés de K de sorte que $K_0 = \emptyset$, et que $K_{i+1} - K_i$ consiste en une cellule unique $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Soit I l'intervalle fermé $[0 , 1]$ considéré comme complexe cellulaire. Soit K' le complexe obtenu en subdivisant le sous-complexe $K \times \{1\}$ de $K \times I$ au moyen de f.

Soit K'_i le complexe obtenu en subdivisant dans $K \times \{0\} \cup K_i \times I$ le sous-complexe $K_i \times \{1\}$ au moyen de la restriction de f. On désignera encore par $\mathfrak{S}$ le faisceau induit de $\mathfrak{S}$ sur K' par la projection $K \times I \to K$ ainsi que les faisceaux induits par $\mathfrak{S}$ sur les sous-complexes K'_i et $K'_{i+1} - K'_i$ de K'. On a

$$H^*(K'_{i+1} - K'_i , A) \equiv 0$$

et puisque $\mathfrak{S}$ est trivial sur $K_{i+1} - K_i$:

$$H^*(K'_{i+1} - K_i , \mathcal{G}) = 0 \quad .$$

De plus

$$t(K'_{i+1} - K'_i , \mathcal{G}) = t(K'_{i+1} - K'_i , A) = t(K'_{i+1} - K'_i , \mathcal{Z}) = 1$$

(où $\mathcal{Z}$ est le faisceau constant défini par l'anneau Z des entiers rationnels) car le groupe $Z^*(\mathcal{B})$ de la définition 5 se réduit à l'élément unité.

D'après le lemme 4, on a

$$t(K'_i , \mathcal{G}) = t(K'_{i+1} , \mathcal{G})$$

et par suite

$$t(K , \mathcal{G}) = t(K'_o , \mathcal{G}) = t(K'_r , \mathcal{G}) = t(K' , \mathcal{G}) \quad .$$

Soit K''_i le complexe obtenu en subdivisant dans $K \times \{0\} \cup K_i \times I$ le sous-complexe $K \times \{0\}$ au moyen de f. Pour les mêmes raisons que précédemment, on a

$$t(\overline{K} , f(\mathcal{G})) = t(K''_o , \mathcal{G}) = t(K''_r , \mathcal{G})$$

où K''_r est isomorphe à K'_r par renversement de l'orientation de I. Par suite $t(K , \mathcal{G}) = t(\overline{K} , f^*(\mathcal{G}))$ ce qui achève la démonstration du théorème 3.

DÉFINITION 6. - Soient V une variété différentiable, compacte connexe avec ou sans bord, et $\mathcal{G}$ un faisceau admissible sur V. On appelle <u>torsion de la variété</u> V relativement à $\mathcal{G}$, et l'on note $t(V , \mathcal{G})$ la torsion $t(|\mathcal{C}| , f^*(\mathcal{G}))$ de la réalisation géométrique $|\mathcal{C}|$ d'une C^1-triangulation $\mathcal{C}$ de V relativement à l'image réciproque du faisceau $\mathcal{G}$ par l'application $f : |\mathcal{C}| \to V$ qui définit la triangulation.

D'après les théorèmes 2 et 3, $t(V , \mathcal{G})$ est indépendante de la C^1-triangulation $\mathcal{C}$ qui a servi à la définir. On voit en outre que la torsion d'une variété différentiable est invariante par difféomorphisme.

LEMME 5. - Soient K_1 et K_2 deux complexes cellulaires finis, connexes par arcs. Soit $\mathcal{G}$ un faisceau admissible sur K_1, on notera également $\mathcal{G}$ le faisceau induit sur $K_1 \times K_2$ par la projection $K_1 \times K_2 \to K_1$. La torsion $t(K_1 \times K_2 , \mathcal{G})$ est égale à $t(K_1 , \mathcal{G})^{\chi(K_2)}$ où χ désigne la caractéristique d'Euler-Poincaré.

DÉMONSTRATION. – Si K_2 se compose d'une cellule unique l'assertion est évidente. Dans le cas général on choisit des sous-complexes fermés : $\emptyset = K'_0 \subset K'_1 \subset \dots \subset K'_r = K_2$ de sorte que chaque $K'_{i+1} - K'_i$ consiste en une seule cellule. Le lemme se démontre alors par récurrence au moyen du lemme 4.

5. Espaces lenticulaires.

DÉFINITION 7. – Soit Γ un sous-groupe cyclique d'ordre p (p entier $\geqslant 2$) de $SO(2n)$ tel que tout élément T de Γ opère sans point fixe sur la sphère unité S_{2n-1} de l'espace euclidien R^{2n}. On appelle espace lenticulaire L_p d'indice p, l'espace quotient S_{2n-1}/Γ de S_{2n-1} par la relation d'équivalence définie par Γ. L'application canonique $\pi : S_{2n-1} \to S_{2n-1}/\Gamma = L_p$ est un revêtement universel de L_p.

Les espaces L_p sont des variétés différentiables, orientées compactes connexes, de dimension $2n-1$ tels que

$$(5) \qquad \pi_1(L_p) = Z_p\ , \quad \pi_i(L_p) = 0 \quad \text{pour} \quad 1 < i < 2n-1$$
$$\pi_{2n-1}(L_p) = Z \qquad .$$

Par un changement de coordonnées sur R^{2n}, on peut en identifiant R^{2n} à C^n au moyen de l'application

$$z^i = x^{2i-1} + ix^{2i} \quad (1 \leqslant i \leqslant n\ ,\ z^1, z^2, \dots, z^n \text{ coordonnées de } C^n\ ,$$
$$x^1, x^2, \dots, x^{2n} \text{ coordonnées de } R^{2n})$$

représenter un générateur T de Γ sous la forme diagonale :

$$\begin{pmatrix} \omega^{\lambda_1} & & & 0 \\ & \omega^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega^{\lambda_n} \end{pmatrix} \qquad \omega = \exp(2i\pi/p)$$

où les λ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont des entiers premiers à p (à cause des hypothèses faites sur Γ) définis à un multiple entier de p près.

On note ℓ_i les images des λ_i dans Z_p, et on les appelle les <u>nombres types</u> de la variété lenticulaire L_p définie au moyen de Γ.

REMARQUE. - A chaque élément inversible ℓ de Z_p on associe le générateur T^λ de Γ (où λ est un représentant de la classe ℓ) qui détermine des nombres types $\ell_i^! = \ell\ell_i$. De plus, à l'aide de l'automorphisme $z_i \to z_i$ $(i \neq h)$, $z_h \to \overline{z}_h$ définis pour chaque entier h $(1 \leqslant h \leqslant n)$, on peut, au prix d'un changement d'orientation, remplacer n'importe quel nombre type ℓ_j par $-\ell_j^!$

Enfin comme les ℓ_i sont définis à l'ordre près, on voit que deux systèmes $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$, $\ell_1^!$ $\ell_2^!, \dots, \ell_n^!$ définissent la même variété lenticulaire L_p s'ils vérifient la relation

$$\ell_i = \pm \ell\ell^!_{j(i)} \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

où ℓ désigne un élément inversible de Z_p et j une permutation quelconque de l'intervalle $[1, n]$.

On considère dans S_{2n-1} les cellules E_q $(\dim E_q = q)$ définies comme suit :

E_{2k} est l'ensemble des éléments $z \in C^n$, tels que

$$z^{k+1} = z^{k+2} = \dots = z^n = 0, \quad \arg z^k = 0$$

$$\sum_{i=1}^n z^i \overline{z^i} = 1, \quad \sum_{i=1}^{k-1} z^i \overline{z^i} < 1 \qquad (0 \leqslant k \leqslant n-1) \quad .$$

E_{2k+1} est l'ensemble des éléments $z \in C^n$, tels que

$$z^{k+1} = z^{k+2} = \dots = z^n = 0, \quad 0 < \arg z < 2\pi/p$$

$$\sum_{i=1}^n z^i \overline{z^i} = 1, \quad \sum_{i=1}^{k-1} z^i \overline{z^i} < 1 \qquad (0 \leqslant k \leqslant n-1) \quad .$$

Les adhérences des cellules E_q sont des sous-variétés à bord différentiablement plongées dans S_{2n-1} ($\overline{E}_1$ et $\overline{E}_{2k}$ sont des boules à bord régulier ; lorsque $q > 1$ est impair la boule $\overline{E}_q$ est une "lentille" c'est-à-dire que l'équateur de son bord présente une "arête" de dimension $q-2$) (cf. [1], exposé 1).

Les $T^j(E_q)$ $(0 \leqslant j \leqslant p-1)$ forment une subdivision polyédrale de S_{2n-1} invariante par Γ, et l'on a

$$\partial E_{2k+1} = T^{\mu k}(E_{2k}) - E_{2k} \tag{6}$$

où μK est un entier tel que $\lambda k\,\mu k \equiv 1 \mod p$, et

$$\partial E_{2k} = \sum_{j=0}^{p-1} T^j E_{2k-1} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n-1) \quad .$$

Par suite les images e_q par π des cellules E_q forment une subdivision polyédrale de $L_p(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ qui est ainsi munie d'une structure de complexe cellulaire, et l'on a

$$\left.\begin{aligned} \partial e_{2k+1} &= 0 \\ \partial e_{2k} &= p e_{2k-1} \end{aligned}\right. \qquad (0 \leqslant k \leqslant n-1)$$

et l'on voit que

$$\begin{aligned} & H^0(L_p, Z) = H_{2n-1}(L_p, Z) = Z \\ & H^{2k-1}(L_p, Z) = 0 \qquad\qquad (1 \leqslant k \leqslant n-1) \\ & H^{2k}(L_p, Z) = Z_p \quad . \end{aligned} \tag{7}$$

En subdivisant chaque lentille au moyen de son plan équatorial, et en identifiant chaque demi-lentille au "joint" de son arête et de son axe, on définit par récurrence sur k (après avoir subdivisé les $T^j(E_1)$ en deux segments) une C^1-triangulation de S_{2n-1} invariante par Γ. On construit ainsi une subdivision du complexe cellulaire $L_p(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n)$ qui est une C^1-triangulation.

Soit

$$A = Q(\tau)/(1 + \tau + \dots + \tau^{p-1})$$

le quotient de l'anneau des polynômes à coefficients rationnels à une indéterminée τ par l'idéal engendré par le polynôme $1 + \tau + \dots + \tau^{p-1}$; on peut identifier A au produit d'anneaux $\prod_{r|p} Q(\omega_r)$ où $Q(\omega_r)$ est l'extension du corps des rationnels par une racine primitive r-ième de l'unité, ω_r, et où r parcourt l'ensemble des entiers positifs qui divisent p.

Soit $\mathcal{G}$ le faisceau de A-modules libres de dimension 1 sur L_p défini par l'homomorphisme caractéristique

$$s : \pi_1(L_p , e_o) \to A \quad \text{tel que} \quad s(\overline{T}) = \tau$$

(où le générateur $\overline{T}$ de $\pi_1(L_p , e_o)$ est déterminé par le générateur T de Γ). En chaque dimension q , le complexe de cochaînes $C^*(L_p , \mathfrak{G})$ n'a qu'un seul élément de base $\overline{e}_q$, et l'on a d'après (6) :

$$\delta \overline{e}_{2k-2} = (\tau^{-\mu_k} - 1)\ \overline{e}_{2k-1} \qquad (1 \leq k \leq n)$$

(où les μ_k sont choisis comme dans (6))

$$\delta \overline{e}_{2k-1} = (1 + \tau + \dots + \tau^{p-1})\ \overline{e}_{2k} = 0 \qquad (1 \leq k \leq n - 1)$$

$$\delta \overline{e}_{2n-1} = 0 \qquad .$$

Le faisceau $\mathfrak{G}$ est donc admissible sur $L_p(\ell_1 , \ell_2 , \dots , \ell_n)$ dont la torsion (au sens différentiable aussi bien qu'au sens cellulaire) relativement à $\mathfrak{G}$ est l'image dans $A_{\mathfrak{G}}^*$ de $\prod_{i=1}^{n} (\tau^{-\mu_i} - 1)$ où les μ_i sont des entiers $(1 \leq \mu_i \leq p - 1)$ dont les images dans Z_p sont égales aux inverses des ℓ_i .

REMARQUE. – Comme tout faisceau admissible $\mathfrak{G}'$ de A-modules libres de dimension 1 sur L_p est isomorphe à $\mathfrak{G}$ à un automorphisme de A près, la torsion $t(L_p(\ell_1 , \ell_2 , \dots , \ell_n) , \mathfrak{G}')$ sera représentée dans A par un élément de la forme

$$\prod_{i=1}^{n} (\tau^{-\mu\mu_i} - 1)$$

où μ est un entier premier à p .

THÉORÈME 4. – Pour que deux espaces lenticulaires $L_p(\ell_1 , \ell_2 , \dots , \ell_n)$, $L'_{p'}(\ell'_1 , \ell'_2 , \dots , \ell'_{n'})$ respectivement de dimension $2n - 1$, $2n' - 1$ et d'indice p et p' soient combinatoirement équivalents (resp. difféomorphes), il faut et il suffit que $n = n'$, $p = p'$, et que les nombres types de L_p et $L'_{p'}$ vérifient les relations

$$\ell_i = \pm \ell \ell'_{j(i)} \qquad (1 \leq i \leq n)$$

où ℓ désigne un élément inversible de Z_p et j une permutation quelconque de l'intervalle $[1 , n]$.

D'après la remarque du début de ce paragraphe les conditions du théorème sont suffisantes. Pour tous faisceaux $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ de A-modules libres de dimension 1 admissibles sur L_p et L'_p respectivement, les torsions $t(L_p, \mathfrak{S})$ et $t(L'_p, \mathfrak{S}')$ peuvent, d'après la remarque précédente, se représenter dans A par des éléments

$$\prod_{i=1}^{n} (\tau^{-\mu\mu_i} - 1) \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} (\tau^{-\mu'\mu'_i} - 1) \quad .$$

où μ et μ' sont premiers à p, et $\mu_i \ell_i = 1$ et $\mu'_i \ell'_i = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Si L_p est combinatoirement équivalent (resp. difféomorphe) à L'_p on peut choisir μ et μ' de façon que :

$$\prod_{i=1}^{n} (\tau^{-\mu\mu_i} - 1) = \pm \tau^{\nu} \prod_{i=1}^{n} (\tau^{-\mu'\mu'_i} - 1)$$

(ν entier premier à p) ou bien :

$$\prod_{i=1}^{n} (\tau^{-\mu\mu_i} - 1)(\tau^{\mu\mu_i} - 1) = \prod_{i=1}^{n} (\tau^{-\mu'\mu'_i} - 1)(\tau^{\mu'\mu'_i} - 1) \quad .$$

Le théorème résulte alors immédiatement du lemme suivant :

LEMME 6. - Soient p un nombre entier $\geqslant 2$, Z_p^* l'ensemble des éléments inversibles de Z_p, et $\bar{h}$ un entier représentant la classe h, pour tout $h \in Z_p^*$. Soit $a : Z_p^* \to Z$ une application telle que

$$a(h) = a(-h) \quad \text{pour tout} \quad h \in Z_p^*$$

et

$$\sum_{h \in Z_p^*} a(h) = 0 \quad .$$

Dans le corps des complexes C si, pour toute racine p-ième de l'unité ζ différente de 1, on a

$$\prod_{h \in Z_p^*} (1 - \zeta^{\bar{h}})^{a(h)} = 1$$

alors $a(h) = 0$ pour tout h.

Nous n'aurons à utiliser le théorème 4 que lorsque l'entier p est premier.

Dans ce cas, si l'on pose

$$\varepsilon_j = \frac{(1-\zeta^j)(1-\zeta^{-j})}{(1-\zeta)(1-\zeta^{-1})} \qquad (2 \leq j \leq (p-1)/2)$$

pour une racine p-ième de l'unité $\zeta \neq 1$ fixée, on est ramené à montrer que

$$\prod_{j=2}^{(p-1)/2} \varepsilon_j^{\alpha_j} = 1$$

où les α_j sont entiers, entraîne que tous les α_j sont nuls. Ceci se déduit immédiatement d'une formule de Kummer (cf. [4], § 120)

THÉORÈME 5. - Pour que deux espaces lenticulaires

$$L_p(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n), \quad L'_{p'}(\ell'_1, \ell'_2, \dots, \ell'_{n'})$$

respectivement de dimension $2n-1$, $2n'-1$ et d'indices p et p' aient même type d'homotopie, il faut et il suffit que $n = n'$, $p = p'$ et qu'il existe un élément inversible ℓ de Z_p tels que les nombres types respectifs de L_p et $L'_{p'}$ satisfassent à

$$\ell_1 \ell_2 \dots \ell_n = \pm \ell^n \ell'_1 \ell'_2 \dots \ell'_n \quad .$$

D'après (5), il faut évidemment que $n = n'$ et $p = p'$.

Pour démontrer ce théorème, on s'appuie sur les deux propositions suivantes dont on trouvera la démonstration dans [9]. Pour une démonstration directe, voir de RHAM (1).

PROPOSITION 1. - Soient V et V' deux variétés triangulables de même dimension m, orientables compactes et connexes ; soit p l'ordre du groupe $\pi_1(V')$; on suppose $\pi_q(V') = 0$ pour $2 \leq q \leq m-1$.

a. Pour que deux applications continues f_o et f_1 soient homotopes relativement à des points-bases x_o et x'_o de V et V' respectivement, il faut et il suffit que f_o et f_1 aient même degré topologique, et qu'elles induisent le même homomorphisme

$$f_* : \pi_1(V) \to \pi_1(V') \quad .$$

b. Les applications continues $f : V \to V'$ qui induisent l'homomorphisme f_* peuvent admettre pour degré tous les entiers de la forme $h + k_p$ $(k \in Z)$, où h

(1) de RHAM (Georges). - Topologie des rotations et espaces lenticulaires. Séminaire de Topologie, Lausanne, 1960/61, exposé nº 1, 6 pages.

est un entier déterminé par f_* $(0 \leq h \leq p-1)$.

PROPOSITION 2. – Soient V et V' deux variétés triangulables de même dimension m, compactes, orientables et connexes, et soit f une application continue $V \to V'$ induisant un isomorphisme f_* des groupes fondamentaux de V et V'. On suppose en outre que

$$\pi_q(V) = \pi_q(V') = 0 \quad \text{pour} \quad 2 \leq q \leq m-1 \quad .$$

Dans ces conditions, pour que V ait même type d'homotopie que V', il faut et il suffit que le degré de f soit identique à ± 1 mod p, où p désigne l'ordre du groupe $\pi_1(V)$.

En désignant par $S_{2n-1} \xrightarrow{\pi} L_p$ et $S_{2n-1} \xrightarrow{\pi'} L'_{p'}$ les revêtements universels de L_p et de $L'_{p'}$ respectivement,

par Γ et Γ' les groupes d'automorphismes de ces revêtements,

par T et T' les générateurs de Γ et Γ' qui déterminent les nombres types de L_p et de $L'_{p'}$,

par $z^1, z^2, \ldots, z^n$ (resp. $z'^1, z'^2, \ldots, z'^n$) les coordonnées de C^n relativement à une base sur laquelle Γ (resp. Γ') se diagonalise, on définit pour chaque entier k $(1 < k \leq p')$ tel que $kp = k'p'$ une application

$$\overline{f} : S_{2n-1} \to S_{2n-1}$$

par les équations

$$|z'_i| = |z_i|$$

$$\arg z'_i = k'\mu_i \lambda'_i \arg z_i$$

$$(1 \leq i \leq n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |z'_i|^2 = 1$$

où les λ'_i sont des entiers représentant les classes ℓ'_i, et les μ_i des entiers tels que $\mu_i \ell_i = 1$. Le degré de $\overline{f}$ est égal à $k'^n \lambda'_1 \lambda'_2 \cdots \lambda'_n \mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n$; son image modulo p' ne dépend que des nombres types de L_p et de $L'_{p'}$. Comme

$$\overline{f}(T(z)) = T'^k(\overline{f}(z)) \; (z \in S_{2n-1})$$

on peut définir par passage au quotient une application $f : L_p \to L'_{p'}$ dont le degré est donné par la formule

$$\deg(f)\ \deg(\pi) = \deg(\pi')\ \deg(\overline{f})$$

puisque $f\pi = \pi'\overline{f}$, et comme $\deg(\pi) = p$ et $\deg(\pi') = p'$, on a

$$\deg(f) = kk'^{n-1}\ \lambda'_1 \lambda'_2 \dots \lambda'_n\ \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \quad .$$

Lorsque $p = p'$, on a $k = k'$, et par suite pour que L_p ait même type d'homotopie que $L'_{p'}$, il faut et il suffit que

$$k^n \lambda'_1 \lambda'_2 \dots \lambda'_n \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n \not\equiv \pm 1 \mod p$$

d'où le théorème 5.

6. Démonstration du théorème 1 et résultats connexes

THÉORÈME 6 (MAZUR). - Soient V_1 et V_2 deux variétés différentielles compactes sans bord, de même dimension m , ayant même type d'homotopie et $f : V_1 \to V_2$ une homotopie-équivalence telle que le fibré tangent de V_1 soit induit par f du fibré tangent de V_2 (ce qui est le cas notamment si V_1 et V_2 sont parallelisables) ; alors, pour tout entier $n \geqslant m + 2$, les variétés $V_1 \times R^n$ et $V_2 \times R^n$ sont difféomorphes.

Tout revient à montrer qu'il existe une variété différentiable compacte qui possède les propriétés suivantes :

1° le bord de W est la réunion disjointe des variétés $W_1 = V_1 \times S_{n-1}$, $W_2 = V_2 \times S_{n-1}$

2° si on recolle deux exemplaires W' et W'' de W le long de W_2 (resp. de W_1) , le résultat $W' \underset{W_2}{\cup} W''$ (resp. $W' \underset{W_1}{\cup} W''$) est difféomorphe à la variété $W_1 \times I$ (resp. $W_2 \times I$) où I est l'intervalle-unité.

Pour cela on choisit un plongement différentiable

$$\varphi : V_1 \to V_2 \to \mathcal{B}'^n$$

(où $\mathcal{B}'^n$ est la boule ouverte de dimension n) assez voisin de f , et qui lui soit homotope (théorème de Whitney, cf. [1]), et on le prolonge en un plongement

$$\bar{\varphi} : V_1 \times \mathbb{B}^n \to V_2 \times \mathbb{B}'^n$$

ceci est toujours possible car le fibré normal à $\bar{\varphi}(V_1)$ est trivial. On vérifie alors, toujours à l'aide du théorème de Whitney que

$$W = V_2 \times \mathbb{B}^n - \bar{\varphi}(V_1 \times \mathbb{B}'^n)$$

(où $\mathbb{B}^n$ est la boule fermée de dimension n), ce qui vérifie les propriétés 1 et 2 ci-dessus.

LEMME 7. - Si les variétés V_1 et V_2 vérifient les hypothèses du théorème 6, et si n est un entier $\geqslant m + 2$, les variétés $W_1 = V_1 \times S_{n-1}$ et $W_2 = V_2 \times S_{n-1}$ sont J-équivalentes par la variété W ; en d'autres termes $\partial W = W_1 \cup W_2$ et W_1 et W_2 sont retractes par déformation de W .

$$\pi_1(V_2 \times \mathbb{B}^n , V_2 \times \mathbb{B}^n - \varphi(V_1)) = \pi_2(V_2 \times \mathbb{B}^n , V_2 \times \mathbb{B}^n - \varphi(V_1)) = 0$$

puisque $n \geqslant 3$ on a

$$\pi_1(W) \approx \pi_1(V_2 \times B^n)$$

et

$$\pi_1(W_i) \approx \pi_1(W) \quad \text{pour} \quad i = 1 , 2 \quad .$$

Si $\mathfrak{S}$ est un faisceau localement constant sur W , on a par excision :

$$H^*(W , W_1 , \mathfrak{S}) \approx H_*(V_2 \times \mathbb{B}^n , \bar{\varphi}(V_1 \times B^n) ; \mathfrak{S})$$

qui est nul puisque $\bar{\varphi}$ est une homotopie-équivalence. D'après le théorème de Whitehead (cf. [13], théorème 3), W_1 est rétracte par déformation de W . De plus

$$H_K(W , W_2 ; \mathfrak{S}) = H^{n-K}(W , W_1 ; \mathfrak{S})$$

(dualité de Poincaré pour les variétés à bord) donc $H_*(W , W_2) = 0$, et W_2 est rétracte par déformation de W , ce qui achève la démonstration du lemme.

PROPOSITION 3. - Pour tout entier p impair, les variétés lenticulaires L_p de dimension 3 sont parallélisables.

En effet les obstructions à considérer sont dans les groupes

$$H^i(L_p , \pi_{i-1}(SO_3)) = H^i(L_p , \pi_{i-1}(L_2(1 , 1))) \qquad (1 \leqslant i \leqslant 3)$$

et ces groupes sont nuls d'après les formules (5) (7) et la formule des coefficients universels.

N. B. - On sait d'ailleurs que STIEFEL et WHITNEY ont démontré que toute variété de dimension 3 est parallélisable, par suite la proposition 3 est vraie également si p est pair.

DÉMONSTRATION du théorème 1.

a. Les variétés $L_7(1\ ,\ 1) = L^1$ et $L_7(1\ ,\ 2) = L^2$ ont même type d'homotopie (théorème 5) ; comme elles sont parallélisables (proposition 3), les variétés $L^1 \times R^n$ et $L^2 \times R^n$ $(n \geq 5)$ sont difféomorphes (théorème 6). Il s'en suit que les compactifications d'Alexandroff P_1 , P_2 de $L^1 \times R^n$ et de $L^2 \times R^n$ respectivement, sont homéomorphes.

b. Soient K_1 et K_2 les complexes simpliciaux définis au § 1, x_1 et x_2 les sommets respectifs des cônes $\mathcal{C}(L^1 \times \partial\Delta^n)$ et $\mathcal{C}(L^2 \times \partial\Delta^n)$ les sous-complexes cellulaires $K_1 - \{x_1\}$, $K_2 - \{x_2\}$ n'admettent aucune subdivision cellulaire finie isomorphe.

En effet comme L^i est retracte par déformatioh de $K_i - \{x_i\}$ les faisceaux localement constants sur L^i s'identifient aux faisceaux localement constants sur $K_i - \{x_i\}$ $(i = 1\ ,\ 2)$. Soit A l'anneau défini au § 5, comme pour tous faisceaux $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ de A-modules de dimension 1 admissibles sur L^1 et L^2 respectivement, on a $t(L^1\ ,\ \mathcal{G}_1) \neq t(L^2\ ,\ \mathcal{G}_2)$ (lemme 6), on voit que $t(K_1 - \{x_1\}\ ,\ \mathcal{G}_1) \neq t(K_2 - \{x_2\}\ ,\ \mathcal{G})$ car :

$$t(K_i - \{x_i\}\ ,\ \mathcal{G}_i) = t(L^i\ ,\ \mathcal{G}_i)^{\pm 1}$$

le signe de l'exposant étant déterminé par la parité de n (lemme 5). L'affirmation précédente suit alors du théorème 4. Comme tout homéomorphisme $K_1 \to K_2$ applique nécessairement x_1 sur x_2 , il s'en suit que les complexes simpliciaux K_1 et K_2 n'admettent pas de subdivisions cellulaires fines (et par suite pas de subdivisions simpliciales) isomorphes. Ceci achève la démonstration du théorème 1.

On a en outre lesrésultats suivants :

PROPOSITION 4.

a. Les variétés J-équivalentes $L^1 \times S_4$ et $L^2 \times S_4$ ne sont pas difféomorphes.

b. Les variétés à bord $L^1 \times B^5$ et $L^2 \times B^5$ qui ont leurs intérieurs difféomorphes ne sont pas difféomorphes.

DÉMONSTRATION. - Comme $\pi_1(S_4) = 0$, les faisceaux localement constants sur $L^i \times S_4$ s'identifient aux faisceaux localement constants sur L^i $(i = 1, 2)$. En désignant toujours par A l'anneau du § 5, puisque $\chi(S_4) = 2$, on a pour tous faisceaux admissibles $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$ sur $L^1 \times S_4$, $L^2 \times S_4$ respectivement :

$$t(L^1 \times S_4, \mathcal{G}_1) \neq t(L^2 \times S_4, \mathcal{G}_2)$$

d'après les lemmes 5 et 6 ce qui démontre (a).

(b) se démontre comme (a) en remarquant que B^5 est contractile et que $\chi(B^5) = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (Henri). - Topologie différentielle, Séminaire Cartan, t. 14, 1961/62 (à paraître).

[2] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[3] GLUCK (H.). - The weak Hauptvermutung for cells and spheres, Bull. Amer. math. Soc., t. 66, 1960, p. 282-284.

[4] HILBERT (David). - Die Theorie der algebraischen Zahlenkörper, Jahresb. Deutschen Math. - Verein., t. 4, 1897, p. 175-539.

[5] LANG (Serge). - L'équivalence homotopique tangentielle, Séminaire Bourbaki, t. 13, 1960/61, exposé 222, 10 p.

[6] MAZUR (B.). - (à paraître).

[7] MILNOR (J.). - Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct. - Princeton, Princeton University Press, 1961 (multigraphié).

[8] MOÏSE (Edwin E.). - Affine structures in 3-manifolds, V., Annals of Math., Series 2, t. 56, 1952, p. 96-114.

[9] OLUM (Paul). - Mappings of manifolds and the notion of degree, Annals of Math., Series 2, t. 58, 1953, p. 458-480.

[10] PAPAKYRIAKOPOULOS (C.). - Une nouvelle démonstration de l'invariance des groupes d'homologie d'un complexe [en grec], Bull. Soc. math. Grèce, t. 22, 1943, p. 1-154.

[11] SMALE (S.). - Differentiable and combinatorial structures on manifolds, Annals of Math., Series 2 (à paraître).

[12] WHITEHEAD (J. H. C.). - On C^1-complexe, Annals of Math., Series 2, t. 41, 1940, p. 809-824.

[13] WHITEHEAD (J. H. C.). - Combinatorial homotopy, I., Bull. Amer. math. Soc., t. 55, 1949, p. 213-245.

[14] WHITEHEAD (J. H. C.). - Simple homotopy types, Amer. J. of Math., t. 72, 1950, p. 1-57.